С.Л. Василенко, А.В. Никитин

Модельные структуры пропорционального роста
Часть 1. Синтез

Всё определяется пропорциями:
искусство, разведка, любовь, политика...
К-ф «Семнадцать мгновений весны»

В научной и популярной литературе можно немало прочесть о золотом сечении – редчайшем, необычном построении, с красивыми рекуррентными формулами.

Оно, конечно, притягивает внимание, как и всякий феномен. Но часто возникает и некоторое предубеждение, которое настораживает и даже отталкивает.

Противоестественной и явно надуманной представляется известная фетишизация и обожествление золотой пропорции. Явление, которое больше порождено состоянием эйфории нескольких исследователей, чем фактической картинкой математических реалий.

А они таковы, что содержат такое огромное количество необыкновенных конструкций, что для их систематики не хватит не только названий благородных металлов, но и никаких таблиц химических элементов или драгоценных камней.

Тем не менее, термин "золотая пропорция" прижился. Пусть таковым и остаётся.

Что касается исключительности золотого сечения, то здесь не всё так очевидно и требует освобождения от традиционных методологических ограничений. С более широким изучением сходных структур и подключением обновлённых методов мышления.

Безальтернативная конструкция. Остановимся на традиционном геометрическом представлении математического сечения. Будем оперировать только тремя величинами-отрезками прямой и двух её частей $\{1, a, b\}$, без каких-либо дополнительных операций над ними: суммы, разности, умножения на вещественное число и т.п.

Приложив минимум мыслительных усилий, легко разобраться, что из такого набора (целого и его двух слагаемых) просто невозможно создать иной пропорции, кроме золотой!

Если конечно, *ещё раз подчеркнём* (!), не прибегать к конструктивным дополнительным образованиям типа вычитания частей $b-a$, их умножения на весовые коэффициенты и прочие вычислительные премудрости. То есть в данном случае имеем три объекта $\{1, a, b\}$, связанные формулой $1=a+b$, и одну-единственную (!) пропорцию

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{a}\,. \qquad (1)$$

Так, две спички можно положить крестиком, параллельно, буквой "г", в одну линию.

Здесь же, как в трёх соснах $\{1, a, b\}$, ни одного дополнительного варианта!

Никакой альтернативы! Не считая тождественных модификаций, свойственных любой пропорции, как-то: обращения, перестановки членов и проч.

Так, в чём же тогда божественность-золотистость? – Неужели в том, чтобы составить очевидное и единственно мыслимое возможное равенство отношений (1)...

Примерно как в одном сказочном эпизоде, когда козлик вынимал из мешка и бросал обратно одну и ту же волчью голову, всё больше пугая тем самым своих врагов.

Не нужно быть семи пядей во лбу, чтобы из множества $\{1, a, b\}$ составить пропорцию (1), в коих ещё древнегреческие учёные были большие мастера.

Данная пропорция, несомненно, являлась для них проходной задачкой. Весь смысл состоял не в образовании самоочевидной пропорции (целое – к большему как оно – к меньшему) или подборе некоторого приближённого решения. Что довольно-таки легко, в тех же отношениях целых чисел.

Гений Евклида и его современников был направлен на непростой поиск точного решения пропорции (1) геометрическим путём. Ибо алгебраических решений квадратных уравнений типа $b^2 = a = 1 - b$ тогда ещё не знали.

Надо полагать, именно это определило причинно-следственную связь в отношении «золотого сечения – правильного пятиугольника». То есть вначале, пропорциональное деление отрезка в пропорции (1), и уже потом использование полученного алгоритма-решения для точного вычерчивания равностороннего 5-угольника.

Об этом свидетельствует последовательность изложения материала в "Началах" Евклида. Более того, две разные по форме, но сходные по содержанию формулировки "золотоносной" задачи, подтверждают основной тезис о главенстве пропорции.

Говорить о её некоей гармоничности в смысле эстетики просто бессмысленно, ибо в исходной постановке она единственна в своем роде. Пропорция безальтернативна.

Её не с чем сравнивать в классе обычного пропорционального деления.

Ничего большего на множестве $\{1, a, b\}$ составить не удаётся.

Все другие варианты деления целого на две части обязательно выходят за исходные рамки и вовлекают в сферу отношений неединичные весовые коэффициенты, сочетательные факторы типа сложения-вычитания элементов и проч.

Иногда золотую пропорцию называют гармонической, что терминологически неправильно. Понятие математической гармоничности для пропорции (1) не свойственно, поскольку определяется другими положениями-критериями.

Гармоническая пропорция. Примером усложнения сравниваемых отношений является *гармоническая пропорция* Архита в вариациях:

«на какую часть первой величины вторая превосходила первую, на такую же часть третьей величины эта третья превосходила вторую» [1, ч. 7, гл. 6, § 1];

«на какую часть своей собственной величины один член превосходит другой, на ту же самую часть третьего члена этот последний превосходит второй» [2, ч. 2, гл. 1, § 2].

Другими словами, три числа образуют гармоническую пропорцию, если отношение двух из них равно отношению разностей между каждым из них и третьим числом.

Например, числа 6, 4 и 3 находятся в гармонической пропорции, ибо 6 превосходит 4 на 2 или третью часть от 6, и 4 превосходит 3 на 1 или третью часть от 3. При этом $\frac{6}{3} = \frac{6-4}{4-3}$.

Применительно к задаче деления целого $1 = a + b$ эта пропорция принимает вид:

$$\frac{1-b}{b-a} = \frac{1}{a} \quad \to \quad a^2 + 2a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2} - 1, \quad b = 2 - \sqrt{2}\,.$$

Тройка возрастающих чисел $(a, b, 1) = \left(\sqrt{2} - 1\right),\ 2 - \sqrt{2},\ 1)$, объединённая дополнительным свойством целого из двух частей, действительно является гармонической: второе число получается прибавлением к первому его $\left(\sqrt{2} - 1\right)$-й части и одновременно вычитанием из третьего его $\left(\sqrt{2} - 1\right)$-й части:

$$a + \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot a \;=\; 2 - \sqrt{2} \;=\; 1 - \left(\sqrt{2} - 1\right) \cdot 1.$$

Данная пропорция имеет непреходящее значение в музыкальной гармонии. Что касается гармонии, якобы обусловленной пропорцией (1), то она сугубо субъективна и потому под большим сомнением.

Да и сравнивать не с чем, ибо она единственная в своём классе $\{1, a, b\}$.

Как говорил одесский классик, если не видел другие, то наши туфли <машины> вот такие!

Модель Фибоначчи. Значимость золотоносной модели часто подчёркивают числами Фибоначчи. То, что они тесно взаимосвязаны, сомнений нет. Весь вопрос в причине...

Почему двучленные последовательности Фибоначчи сходятся к константе золотого сечения? И насколько они усиливают золотую подоснову? – Попробуем разобраться...

Как оказывается, всё достаточно просто. Связь, можно сказать, определена на "генетическом" уровне. Золотое сечение и числа Фибоначчи имеют одну совместную подоснову.

Геометрически-пропорциональное деление прямой на два отрезка и аддитивная модель Фибоначчи, обладают практически тождественным строением:

$$1 = b + a;$$
$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}.$$

В обоих случаях имеем суммирование.

Располагаем только двумя слагаемыми.

Весовые коэффициенты при слагаемых равны единицы.

Отличие – лишь в предметах исследования и соответствующих им способах записи.

Главная идея – общая: двучленно-аддитивная структура. Разнятся только математические формы выражения. Кажущееся несовпадение становится менее значимым, если эти равенства разделить на средние по размеру (значению) величины b, x_n:

$$\frac{1}{b} - \left(\frac{b}{a}\right)^{-1} = 1;$$
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} - \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right)^{-1} = 1.$$

Теперь достаточно выбрать пропорцию (1) и при $n \to \infty$ идентичность форм становится явной. Абсолютное совпадение обусловлено единством квадратного уравнения $z^2 - z = 1$.

Поэтому, несмотря на визуальное различие, отношение пар соседних объектов в области больших чисел x равно золотой константе:

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{a} = \Phi = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_{n-1}}.$$

Удивительно было бы другое, если при таком явно несомненном родстве модели приводили к разным результатам.

Хотя в математическом аспекте это, конечно, отличные структуры. Хотя бы своим разным описанием и применением.

Модели структурного роста. И всё же... Можно ли как-то расширить границы пропорциональности нашей модели? – Математика с её делением целого на две части нам ничего нового не привносит. В изначальной постановке пропорция (1) одинока, несмотря на безбрежный океан дробей-отношений.

Обратим внимание, что геометрическое деление целого на две части – это своего рода статика. Разделили и всё. В результате получили две части и одну единственную пропорцию (1). Большего из тройки $\{1, a, b\}$ не выжать.

Однако задачу можно несколько расширить, подключив динамическую составляющую.

Нужную подсказку дают живые системы. В частности, таковые, которые в процессе своего роста-развития выдерживают те или иные пропорции.

То есть нам нужно выйти за рамки имеющегося целого, придав ему динамичность.

Не просто делить, резать или кромсать целое. Но наоборот приумножать его, развивать, наращивать, как в работе [3]: от золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию!

Например, путём присоединения к нему элемента, равному одной из образуемых частей. При этом вовсе не требуется отрываться от «золотых корней».

Пускай не совершенно и доподлинно точно, но в большой мере это отвечает исходному положению, согласно которому в пропорции фигурирует только целое и его две части.

Итак, пусть целое, условно равное 1, состоит из двух аддитивных частей $1 = a + b$.

В общем случае можно выделить два основных пути-варианта пропорционального роста: увеличение-наращивание целого на величину $\Delta = \{a,\ b\}$, равную одной из частей.

В каждой из версий можно образовать по четыре возможных пропорции с новым "подросшим" целым $1' = 1 + \Delta$:

$$\frac{1'}{1} = \frac{1}{b}, \qquad \frac{1'}{1} = \frac{1}{a},$$

$$\frac{1'}{1} = \frac{b}{a}, \qquad \frac{1'}{b} = \frac{b}{a}.$$

Как видно, три равенства отношений имеют общие средние члены: 1 или b.

Рассмотрим эти пропорции подробнее, решив их относительно большей части b и ограничившись только положительными решениями:

$$1)\quad \frac{1+b}{1} = \frac{1}{b} \quad \to \quad b^2 + b - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618\,;$$

$$2)\quad \frac{1+b}{1} = \frac{1}{a} \quad \to \quad b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0\,;$$

$$3)\quad \frac{1+b}{1} = \frac{b}{a} \quad \to \quad b^2 + b - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618\,;$$

$$4)\quad \frac{1+b}{b} = \frac{b}{a} \quad \to \quad 2b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,;$$

$$5)\quad \frac{1+a}{1} = \frac{1}{b} \quad \to \quad b^2 - 2b + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 1\,;$$

$$6)\quad \frac{1+a}{1} = \frac{1}{a} \quad \to \quad a^2 + a - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618\,;$$

$$7)\quad \frac{1+a}{1} = \frac{b}{a} \quad \to \quad b^2 - 4b + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586\,;$$

$$8)\quad \frac{1+a}{b} = \frac{b}{a} \quad \to \quad 3b = 2 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2}{3} \approx 0{,}667\,.$$

Анализ результатов показывает, что примеры 1 и 3 одинаково выражают золотую пропорцию, равно как и симметричное решение 6.

Примеры 2 и 5 – непоказательно-тривиальные, когда одна из частей целого равна нулю.

В итоге, среди простых структурных моделей пропорционального роста, составленных по аналогии с золотой пропорцией, имеем такие характерные неочевидные случаи:

$\frac{1+a}{1} = \frac{b}{a}$ – гармоническая $b = 2 - \sqrt{2} \approx 0{,}586$;

$\frac{1+b}{1} = \frac{1}{b} = \frac{b}{a}$ – золотое сечение $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$;

$\frac{1+a}{b} = \frac{b}{a}$ – две трети $b = \frac{2}{3} \approx 0{,}667$;

$\frac{1+b}{b} = \frac{b}{a}$ – корень из двух + 1 $b = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$.

Что мы имеем «в сухом остатке»? – Перед нами равнозначные по идеологии образования модели пропорционального роста: «гармоническая», «золотое сечение», «две трети» (по большей части *b*) и «корень из двух +1» (табл. 1).

Таблица 1

Параметры деления целого на две части согласно моделям пропорционального роста

Модель роста	b – большая часть		$a = 1 - b$	b/a	
Гармоническая	$2-\sqrt{2}$	0,586	0,414	1,414	$\sqrt{2}$
Золотое сечение	$(\sqrt{5}-1)/2$	0,618	0,382	1,618	$(\sqrt{5}+1)/2$
Две трети	$2/3$	0,667	0,333	2,000	2
Корень из двух +1	$1/\sqrt{2}$	0,707	0,293	2,414	$1+\sqrt{2}$

Таким образом, в новых условиях или координатах развития золоте сечение пополнилось ещё тремя моделями. Одна из них – рациональная, две другие основаны на иррациональном корне из двух. Последнее сразу воссоздаёт образ диагонали квадрата с единичной стороной. Та самая диагональ, которая долгие столетия не давала покоя многим поколениям учёных своей несоизмеримостью со стороной фигуры.

Все модели синтезированы на основе одинакового принципа роста.

В этих условиях *модельная структура золотого роста*: приобретает свежее "звучание":

новое z относится к старому 1, как оно – к приращению:

$$\frac{z}{1} = \frac{1}{z-1} \quad \rightarrow \quad z^2 - z - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad z = (\Phi,\ -\phi) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Золотому отношению $b/a = \Phi$, по-прежнему соответствует аддитивно-разностное уравнение:

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1},$$

как формообразующая структура числовой последовательности с двумя произвольными заданными начальными условиями, не равными одновременно нулю. Аттрактор такого ряда в виде предельного отношения соседних членов равен константе золотого сечения Ф.

Пропорции с решением $x = b/a = 1 + \sqrt{2}$ на основе "корня из двух + 1" можно сопоставить подобное соотношение:

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1+b}{b} = \frac{a+2b}{b} = \frac{1+2\,b/a}{b/a} = \frac{1+2x}{x} \quad \rightarrow \quad x^2 - 2x - 1 = 0\,;$$

$$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}\,.$$

В свою очередь, модели «две трети» соответствует аддитивная форма [4]

$$x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}\,,$$

которая следует из простых преобразований:

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1+a}{b} = \frac{2a+b}{b} = \frac{2+b/a}{b/a} = \frac{2+x}{x} \quad \to \quad x^2 - x - 2 = 0\,.$$

Образующая тройка $\{a,\ b,\ 1\} = \{1/3,\ 2/3,\ 1\}$ одновременно составляет арифметическую прогрессию.

Гармоническая пропорция также основана на корне из двух, но в отличие от предшествующих аналогов, модель не имеет двучленно-аддитивного представления.

Решение находится сразу путём извлечения корня:

$$x = \frac{b}{a} = \frac{1+a}{1} = \frac{2a+b}{a+b} = \frac{2+b/a}{1+b/a} = \frac{2+x}{1+x} \quad \to \quad x^2 = 2\,.$$

Заметим, что структурные модели *пропорционального роста* не одиноки в своем существовании. Известен также *экспоненциальный рост* или возрастание величины, когда скорость роста пропорциональна значению самой величины, и некоторые другие модели.

Предварительные итоги и оценки.

Через механизм развития-приумножения целого мы фактически добавили к «обособленно-сиротливой золотой пропорции» ещё одну степень свободы.

Придав целому динамику роста, удалось расширить множество пропорциональных моделей с одной до четырёх.

Они имеют следующую структуру

$$\frac{1'}{(1,\ b)} = \frac{(1,\ b)}{(b,\ a)}\,,$$

где $1' = 1 + (a, b)$ – новое целое, увеличенное на меньшую a или большую b часть; $(1,\ b)$, $(b,\ a)$ – возможные пары величин, из которых в конкретной пропорции выбирается одна.

Одна из пропорций – гармоническая (по Архиту) $\frac{1+a}{1} = \frac{b}{a}$: большая часть равна $b = 2 - \sqrt{2}$, отношение частей $\sqrt{2}$.

В основе остальных трёх равноправных моделей роста лежат двучленно-аддитивные рекурсии:

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ – золотая пропорция;

$x_{n+1} = 2x_n + x_{n-1}$ – корень из двух + 1;

$x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}$ – две трети.

Данные структуры никоим образом не обобщают золотое сечение, как это порой считают отдельные авторы. – Вопреки здравому смыслу. Вопреки логике обобщения.

Золотое сечение уникально и единственно, не считая своего зеркального отражения.

Данные структуры равноправны в выбранном классе моделей пропорционального роста и являются альтернативными. Каждая со своим именем и свойствами.

Из всех "золото-подобных" обобщений квадратного уравнения в работе [5, с. 30] "признаётся" только $x^2 = 2x + 1$ с его положительным корнем $1+\sqrt{2}$, который предлагается назвать «константой да Винчи»... Почему бы и нет? – Если по нашим выкладкам она является полноправным членом моделей пропорционального роста. На таких же равных правах, как золотое сечение, модель «две трети» или гармоническая пропорция с отношением частей, равным числу $\sqrt{2}$, которое иногда называется Пифагоровой константой.

Жаль только, "селекционная работа" в [5] выполнена с применением необоснованного и, можно сказать, надуманного «правила сохранения мантисс», например, для числа и его обратного значения: $x^2 = px + 1 \quad \rightarrow \quad x - x^{-1} = p$.

С таким же успехом можно образовать тысячи подобных равенств мантисс: числа и его квадрата $x^2 = x + q \quad \rightarrow \quad x^2 - x = q$; двух соседних степеней $x^{s+1} - x^s = q$; суммы числа, его квадрата и куба (расширенная модель Трибоначчи) $x^3 + x^2 + x = q$; суммы числа, квадрата и обратного $x^2 + x + x^{-1} = p$ и т.п. На любой вкус и размер, исходя из алгебраического уравнения общего вида произвольной степени.

Как и многие другие, описанные модели пропорционального роста представляют собой абстрактно-упрощенное выражение реальных процессов в форме уравнений, графиков. Однако, несмотря на принятую идеализацию, такие модели позволяют проанализировать отдельные стороны и закономерности многих изучаемых объектов.

А некоторые из них (как знать?) вполне могут составлять фундаментально образующие формы, которые лежат в основе мироздания...

Продолжение следует...

Литература:

1. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики / Т.8. Итоги тысячелетнего развития. Книга 2. – М.: Фолио; АСТ, 2000. – 688 с. – http://psylib.org.ua/books/lose008/index.htm.

2. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Т.1. Ранняя классика. – М.: Фолио; АСТ, 2000. – 688 с. – http://psylib.org.ua/books/lose001/index.htm.

3. *Василенко С.Л.*, *Никитин А.В.* От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математ. и истор. исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2, http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162094.htm.

4. *Василенко С.Л.* Серебрение в числовой гармонии // Математ. и истор. исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 08.05.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=67&sm=2.

5. *Аракелян Г.* О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm.

Харьков, Екатеринбург

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0560-00.htm