С.Л. Василенко

Пропорциональное деление целого

Модель золотого сечения (ЗС) насчитывает несколько тысячелетий. Однако над её онтологическими истоками особо не задумывались. Разве что ограничивались обрывочными историческими событиями. Всевозможных делений целого насчитывается бесконечное множество. Отсюда невольно возникает ощущение какого-то магического возникновения-рождения ЗС. Между тем всё просто. Рассмотрев основные варианты-комбинации (а их пять) составления математической пропорции с целым 1 *и его аддитивными частями* $a+b=1$, *можно легко убедиться, что золотая пропорция – практически единственна и безальтернативна. Если, конечно, не считать тривиального деления пополам* $1 : a = 1 : b$. *То есть модель ЗС совершенно естественна и элементарна в своём образовании. Почему и была предметом изучения ещё античных учёных...*

Начало – половина целого (Пифагор)

Часть и целое – старинные философские категории. Они выражают отношение совокупности предметов с её отдельными образующими предметами.

Одно из первых определений целого дал Аристотель: «Целым называется (1) то, у чего не отсутствует ни одна из тех частей, состоя из которых оно именуется целым от природы, а также (2) то, что так объемлет объемлемые им вещи, что последние образуют нечто одно» (Метафизика, 4-й век до н.э.).

Первое математическое упоминание деления целого на части мы находим в "Началах" Евклида, как задачу пропорционального деления отрезка на две части.

Наиболее простая и самоочевидная разновидность такой пропорции приводит к золотому сечению или делению отрезка в крайнем и среднем отношении [1].

В своём классическом определении золотое сечение (ЗС) – это пропорциональное деление отрезка на две неравные части, при котором отрезок относится к большей части, как она – к меньшей части. Решение задачи приводит к любопытным математическим закономерностям, которые позволяют утверждать о самобытных особенностях ЗС с его красивой разноплановой геометрией [2]. И не только...

Спекулятивная фетишизация ЗС. Редкостные математические особенности золотой пропорции исторически привели к порождению-проявлению мифической составляющей. Действительно, она обладает рядом воистину замечательных свойств [3, 4]. Но ещё больше наличествует вымышленных описаний.

Так, нередко утверждается, что объекты с золотой пропорцией якобы воспринимаются человеком как наиболее гармоничные [5]. Возможно, и так. Но в любом случае к этим утверждениям следует относиться с долей скептицизма. Ибо на поверку они часто оказываются результатом случайных совпадений либо обычной подгонки.

Авторы невольно становятся заложниками слабо обоснованных предположений, в своём навязчивом стремлении найти константу золотого отношения во всём, что количественно выражается между полутора и двумя.

Есть веское основание полагать, что значимость золотой пропорции на практике часто преувеличена, а конкретные примеры основываются на неточных расчётах.

Тем временем, в небольшой когорте исследователей-единомышленников принято считать, что золотое сечение является, чуть ли не универсальным формирователем и единением целостных структур целого, а также всеобщим принципом гармонии.

Взывая к духу древних, в головы людей, весьма далёких от предметной области, в разное время навязчиво вдалбливали представления, чуть ли не о всеобъемлющих особенностях ЗС.

Например, в своё время профессор А.Цейзинг в книге «Золотое деление как основной морфологический закон в природе и искусстве» абсолютизировал золотое "чудо-сечение", провозгласив его универсальным феноменом для всех явлений (?). Совершенно безосновательно, бездоказательно и, можно даже сказать, авантюристически. Руководствуясь собственными эмоциями.

Ему голословно вторит современный популяризатор золотоносных идей В.Лаврус: «Принцип золотого сечения – высшее проявление структурного и функционального совершенства целого и его частей в искусстве, науке, технике и природе» [6]. – Такой себе прыткий математический прототип бозона Гиггса.

Как правило, всё это беспочвенные утверждения, имеющие мало общего с реальностью. Алогичное и бездумное клонирование-тиражирование золотой пропорции.

Взять, к примеру, только названия монографий [7, 8] о «золотых сечениях» (?), где одну единственную модель (константу) ЗС неожиданно ксерокопируют, представляя во множественном числе.

Хотя на самом деле нужно говорить не о «золотых сечениях». – В числовом выражении одно единственно и определяется константой Φ.

Следует различать разнообразие возможных проявлений ЗС.

Например, как в круге (рис. 1).

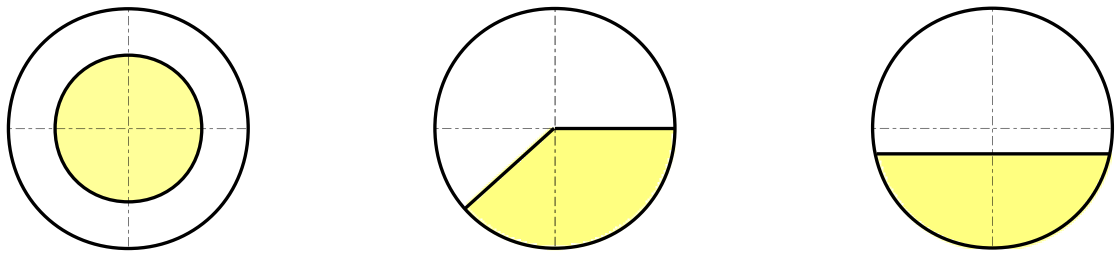


Рис. 1. Примерные формы выделения "золотой" площади в круге

Не случайно в основательных научных исследованиях золотое сечение обычно не выходит за рамки традиционного использования классической пропорции $1:b=b:a$.

Без фетишизации. Без насаждения элементов культовых диффамаций. Без излишнего умозрительного обожествления-почитания.

И это правильно. «В сохранившихся древнегреческих текстах золотое сечение рассматривается исключительно в связи с геометрической задачей построения правильного пятиугольника в планиметрии, а также икосаэдра и додекаэдра в стереометрии» [9].

«От античности до нас не дошло ни одного текста, в котором деление величины в среднем и крайнем отношении обсуждалось бы в качестве формообразующего начала в изобразительном искусстве и архитектуре» [10]. Все античные рукописи, в которых обсуждается модель ЗС, – это сугубо математические трактаты.

В то же время отдельные авторы интенсивно навязывали разного толка феерические идеи. Золотое сечение стало предметом романтико-спекулятивных теорий и эзотерических учений золотоискателей-гармонистов – поклонников ЗС и всеобщей гармонии.

«По своей эпистемологии ... «эпидемическое заболевание под названием "гармоническая золотуха" стоит на примитивном уровне каббалы и учения о нумерологии, ничем не отличаясь от многочисленных квазинаучных религий одушевленного космоса» [11]. Как предмет культового поклонения.

Ведь никто пока не определил, что есть красота в терминах, которые имели бы точки соприкосновения с языком формул математики, то есть с содержанием золотоносной теории.

Искусственное обожествление золотой пропорции выглядит противоестественным и явно надуманным. Это порочное явление де-факто дискредитирует саму идею ЗС, имеет слабое отношение к синтезу научных знаний и в основном порождено нездоровой эйфорией нескольких исследователей.

Очевидность конструкции ЗС. Мы нисколько не ставим под сомнение востребованность и полезность модели золотой пропорции. Хотя бы в исследовании биологического явления филлотаксиса. Речь идёт о другом.

Объективная и непредвзятая оценка золотоносной модели показывает, что по своему происхождению перед нами рядовая математическая конструкция.

В действительности ЗС – это заурядная задача пропорционального деления целого на две части. Причём деления безальтернативного, не считая явного разбиения пополам [12].

Напомним, в общем случае *пропорциональное деление* – деление какого-нибудь числа (отрезка) на части, прямо или обратно пропорциональные данным числам (отрезкам).

Деление ЗС настолько очевидно, что только диву даёшься разным спекуляциям вокруг данной темы.

Рассмотрим модель несколько подробнее, помня, что в своей основе "золотая пропорция" – это сугубо математическое понятие.

Со всеми вытекающими последствиями, включая абстрактность идеальных форм.

Обычно принимается, что целое c равно сумме частей $c = a + b$.

Без потери общности рассуждений целое полагается равным единице $c = 1$. – Очень удобный математический приём для большей наглядности выкладок.

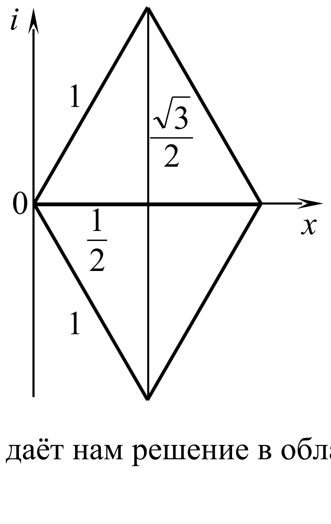
Остановимся на традиционном геометрическом представлении математического сечения. Будем оперировать только тремя величинами-отрезками прямой и двух её частей $\{1, a, b\}$, без каких-либо дополнительных операций над ними типа суммы, разности, умножения на вещественное число и т.п. Приложив минимум мыслительных усилий, легко разобраться, что из данного «супового набора» (целого и его двух слагаемых) просто невозможно создать иной значимой пропорции, кроме золотого инварианта! Если конечно, не прибегать к конструктивным дополнительным образованиям типа вычитания частей $b - a$, их умножения на весовые коэффициенты и прочие вычислительные премудрости.

Итак, имеем исходную совокупность объектов $\{1, a, b\}$. В ней отражено дихотомическое деление целого на две непересекающиеся части $a + b = 1$.

Отметим возможные комбинации составления пропорции из этих элементов.

1) $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad a = b = \dfrac{1}{2}$ – обыкновенное деление пополам.

2) $\dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{b}{a} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ – золотое сечение или пропорциональное ассиметричное деление.



3) $\dfrac{1}{b} = \dfrac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad a \to 1, \quad b \to 0$ – предельное деление, при котором одна из частей стремится к нулю.

4) $\dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{1} \quad \Rightarrow \quad a = 0, \quad b = 1$ – выделение части, равной целому.

5) Ещё один вариант

$$\frac{1}{b} = \frac{a}{1} \quad \Rightarrow \quad a^2 - a + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a, b = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

даёт нам решение в области комплексных чисел с мнимой единицей $i = \sqrt{-1}$.

Пропорция приводит к ромбу, составленному из двух равносторонних треугольников, и числовому тождеству $a + b = ab = 1$.

Полученное пропорциональное деление выводит нас на следующий уровень размерности: от линии-отрезка – к плоскости.

Выполненный перебор пяти допустимых вариантов имеет характер математического доказательства, как стадии окончательной строгости и надежности решения, имеющего фундаментальный статус. Исходя из эмпирических соображений, данные математические представления обосновывают самоочевидность золотой пропорции с её, по сути, безальтернативным происхождением.

В ней фокусируются простейшие свойства пропорционального единения целого и двух частей. Других вариантов просто нет. Деление пополам не в счёт, в силу своего априорного присутствия-происхождения симметричного типа.

Дело даже не в постижении какой-то скрытой истины. И важна даже не сама истина, к которой мы пришли способом полного перебора-перечисления вариантов.

Главный смысл заключается в полученной данности общезначимого утверждения, которое приобрело смысл азбучного факта: ЗС – это явная и очевидная модель.

Можно сказать, настолько тривиальная и банальная пропорция или «фигура из трёх», что проще не бывает.

Понятие целого здесь представлено широко и не обязательно соотносится с прямолинейным отрезком, да и геометрией вообще.

Анализ результатов. Ортодоксы-золотоискатели иногда высказываются голословные положения, будто «ЗС было введено с единственной ясной и четкой целью – построить геометрическую теорию додекаэдра – главной фигуры Мироздания». – По меньшей мере, наивно. Если не сказать неумно. Никто ЗС специально не вводил.

Как нами показано, ЗС – это такой математический объект, который просто невозможно обойти, не споткнувшись. Особенно в античные времена, с их наипростейшей математикой.

Достаточно было заняться пропорциональными структурами, в коих учёные древности весьма преуспели, и немедленно выскакивает ЗС, как «чёрт из табакерки».

Деление пополам – наиболее очевидное разбиение целого. Равно как и предельный случай, когда одна из частей равна нулю и так такового деления нет (рис. 2). Для фиксации этих вариантов собственно и пропорции-то не нужны. И так всё заранее ясно.

Поэтому из всех возможных вариантов остаётся лишь золотая пропорция.

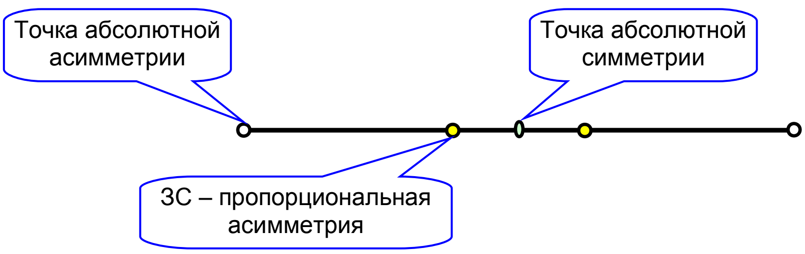


Рис. 2. Точки пропорционального деления целого на две части:
единственная нетривиальная точка – это золотое сечение

ЗС – единственная пропорциональная скрепа целого и его двух частей.

Золотая модель отражает устойчивую связь взаимосвязанных частей. Она скрепляет, соединяет, связывает и объединяет части. Образует общность.

ЗС – наилучшая и единственная пропорция, уравнивающая отношения целого и его двух частей. То есть частей между собой и с целым. В определённом смысле речь идёт об идеальном соотношении величин.

Одновременно ЗС – это точка самоидентификации. Интегратор. Положение, которое обеспечивает лёгкое восприятие отношений.

Если деление пополам связано с закономерностями симметрии, то золотое сечение – с признаками асимметрии. Членение на неравные части отвечает принципу разнообразия и вызывает ощущение подвижности и динамики.

Асимметрия уравновешивает неравные элементы за счет соответствующего пропорционального изменения расстояния до центральной точки (оси) целого.

Новые интерпретации. Рассматривая модель ЗС, в работе [13] предложено оригинальное сравнение-выделение только одной части целого.

Например, в задаче на деление геометрического отрезка фиксируется некая величина b по отношению к одному краю, и затем она соотносится с отклонением от другого края.

По сути, образуется точка пропорционального баланса-равновесия, а не деления!

Не середина. А именно равновесие. С наличием явной асимметрии.

То есть с точки зрения целого выделяется всего одна часть.

Соответственно видоизменяется и основная формулировка с её удивительной формой равновесия, синтеза и созидания:

целое так относится к своей части,
как она – к собственному отклонению от целого.

Более того, выделять одну из частей вовсе не обязательно от края.

В общем случае золотую часть (бóльшую или меньшую) можно смещать в целостном объекте произвольным образом. Например, золотую часть приемлемо фиксировать симметрично относительно середины (рис. 3, рис. 4).

То есть некоторым способом вычленяем золотоносный элемент, а всё остальное составляет его отклонение от целого.

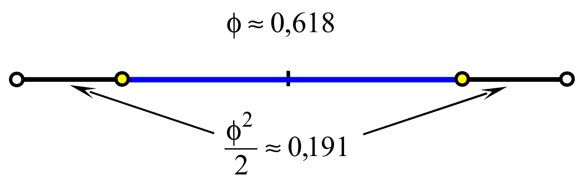


Рис. 3. Выделение большей части ЗС относительно середины

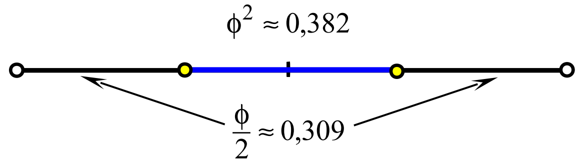


Рис. 4. Выделение меньшей части ЗС относительно середины

Допустимы и другие вариации, например, с обусловленными расстояниями от краёв (рис. 5, рис. 6). Так, мы приходим к множеству реализаций в проявлении золотой модели.

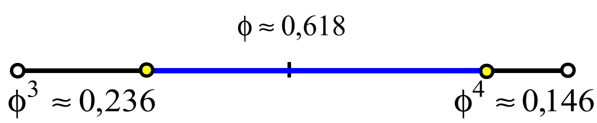


Рис. 5. Частная фиксация большей части ЗС относительно краёв

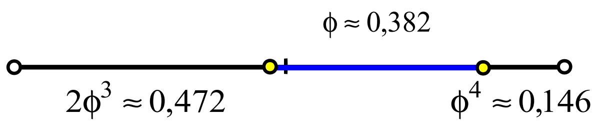


Рис. 6. Частная фиксация меньшей части ЗС относительно краёв

Таким образом, несмотря на разнообразие способов выделения золотых частей, в своей основе ЗС – это единственное нетривиально-пропорциональное деление целого на две части. Первое и последнее.

Акценты единственности. Золотая пропорция – *единственно возможная пропорция*, уравнивающая отношения целого и его двух частей. Другой такой пропорции, не считая тривиального деления пополам, просто нет.

Она связывает части и целое в равенстве отношений между ними. Гармония или красота здесь совершенно не причём. Хотя глаз и может улавливать равенство отношений.

Золотая пропорция не может быть наилучшей, оптимальной или первейшей среди равных. Де-факто она одна. Почти по определению.

В выбранном классе отношений её не с чем сравнивать. В этом контексте она уникальна.

Основой модели является не столько число золотого сечения, сколько пропорция! Как точка равновесия в отношениях целого с его частями и самих частей.

Другими словами, ЗС – пропорциональная дихотомия целого. Единственная реальная математическая диковинка пропорции.

Если в глобальном проявлении окружающий мир упорядочен пропорциональными структурами, то велика вероятность, что в его основе лежит именно модель золотого сечения. Тогда пропорция с основанием Ф становится неким универсальным кодом Вселенной. Деление живых клеток пополам синтезирует организмы. А модель ЗС выступает в роли структурирующей подосновы.

Не свойство золотого сечения делает эту геометрическую пропорцию единственной и неповторимой. Наоборот, из фактической единственности пропорции следует собственно модель ЗС.

В основе лежит строгая аддитивность двух составляющих!

При делении целого золотым сечением на b и a, меньший из них a в свою очередь является бóльшим отрезком для разделяемого по золотому сечению отрезка b.

Золотая пропорция – единственная не столько в своих свойствах, сколько в исходно-априорном построении.

Исконно, изначально. Естественно и натурально.

И, конечно, никакой таинственности. В крайнем случае, естественная «закономерность двойственности» (М.Беляев, 2001). Включая единство противоположностей. Как мера порядка в хаосе и т.п.

Но без надуманных привязок к гармонии, эстетике и тем более эталону красоты.

Гармония в роли эстетической категории выглядит здесь как «сбоку бантик».

Или образ «божественной пропорции», который в своей восторженной экзальтации использовал ученый и монах средневековья Лука Пачоли.

Вся эта шумиха-возня придумана на ровном месте.

Изучая математическую пропорцию, особенно в её геометрическом толковании-отображении, просто невозможно не спотыкаться через золотоносный аналог. Как единственно возможный прообраз в выбранном классе.

В этой связи, по крайне мере, наивно выглядит наносное затуманивание налётом древности, который искусно нагоняется "гармонистами" в их преподнесении золотого сечения «важнейшим математическим открытием античной науки в области гармонии».

Как говорится, и гармония здесь не при делах, ибо в те далёкие времена никогда не увязывалась с моделью ЗС. Да и важность события явно надуманная, когда золотая пропорция выявляется очевиднейшей математической конструкцией, – на фоне трёх десятков различных изобретённых пропорциональных сравнений древности, включая разнообразные средние.

Позолоты-инсинуации. Раскрывая тему, о расширенных возможностях-способах выделения золотых частей в целом, нельзя обойти противоположное явление. Когда, не имея достаточных оснований, под золотую модель бесцеремонно подводят произвольные структуры.

Решение золотой пропорции уникально и единственно. Это стало уж*е* аксиомой.

Но именно эта очевидная бесспорность не даёт покоя небольшой группе "золотоискателей-гармонистов" – технарей, философов, филологов, искусствоведов и экономистов.

Они заняты буквально маниакальным терминологическим золочением всевозможных решений алгебраических уравнений общего вида. Одновременно ратуют за развитие отдельной "математики гармонии". Хотя в науке «математика будь чего-либо» отсутствует. А сама гармония более 1000 лет вообще считалась 4-й "матемой".

Поэтому несообразно-бестолковыми выглядят так называемые обобщения ЗС. Поскольку обобщается не ЗС, а расширяется иерархический спектр математической пропорции. При этом используются алгебраические действия над частями и целым: сложение-вычитание, умножение, введение коэффициентов, возведение в степень и др. В частности, речь идёт об алгебраическом уравнении общего вида.

То есть, любое другое сечение целого будет основано на пропорции, в которой фигурируют не только объекты $\{1,\ a,\ b\}$, но также различные их комбинации типа $k \cdot b^m \pm l \cdot a^n$ и др. Соответствующие решения уже не имеют к ЗС никакого отношения. Кроме того, они более сложные и, скорее всего, менее востребованные Природой.

Так, задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении "гармонисты" иногда пытаются формализовать в обобщенном виде $\left(\frac{1}{b}\right)^p = \frac{b}{a}$, что явно выходит за рамки исходной группы возможных вариантов пропорции, рассмотренных выше.

Сами по себе сечения единичного отрезка в данном случае, конечно, формируются.

Однако получаемые при решении числа уже не имеют абсолютно никакого отношения к золотой пропорции. Не образуют и не могут обусловливать получение «обобщенных золотых пропорций».

Между этими числами и константой золотой пропорция лежит непреодолимая пропасть. И нет никакой реально ощутимой связи. Разве что общность описания с помощью алгебраического уравнения общего вида.

Обсуждение подобных фантазий хорошо описано в книге А.Черняева [14, с. 223–226], а также в ряде наших статей.

Ассемблирование золотоносных свойств. Золотая пропорция объединила в себе две, казалось бы, несоединимые вещи: тривиальность-очевидность образования и уникальность-неповторимость свойств. Спору нет... Всё простое гениально.

Наиболее характерное состоит в том, что буквально все свойства ЗС вытекают из пропорции $x = \frac{1}{b} = \frac{b}{a}$ с её приведением к квадратному уравнению $x^2 - x - 1 = 0$.

Решение пропорции относительно отношения b/a приводит к положительному значению корня $\Phi = \frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.

Это безразмерная величина.

Она не делит отрезок на две части, но отмечает количественное отношение долей.

Для решения задачи с получением размерного (физически, геометрически) "золотого числа" нужно перейти к адекватной записи пропорции $\frac{1}{b} = \frac{b}{1-b}$ или квадратному уравнению $b^2 + b - 1 = 0$ относительно большей части единичного отрезка с корнем $b = \Phi^{-1} \approx 0{,}618$.

Положительный корень $x = \Phi$ соответствует внутренней точке деления единичного отрезка и даёт числовое тождество

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0. \quad (1)$$

а) Прежде всего, заслуживает внимания эквивалентная запись квадратного уравнения в виде разностного аналога $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, который образует бесконечное множество-семейство последовательностей Фибоначчи, различающихся начальными условиями.

Среди них наиболее известны: ряд Фибоначчи **0**, **1**, 1, 2, 3, 5, 8, ... и ряд Люка **2**, **1**, 3, 4, 7, 11, 18,...

Все числовые последовательности едины в одном: отношение соседних членов стремится к предельному аттрактору, равному константе золотого сечения Ф.

На первый взгляд, математические структуры геометрии золотого сечения и числовых рядов вроде бы существенно различаются.

Хотя на поверку, это лишь разные описания одного и того же процесса, в основе которого лежит двучленно-аддитивное суммирование.

b) Если записать равенство (1) как $\Phi = 1 + 1/\Phi$, а потом каждый раз заменять Ф в знаменателе значением $1 + 1/\Phi$, то придем к единственной в своём роде цепной (непрерывной) дроби:

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}} = \Phi .$$

«Именно здесь золотая константа предстаёт во всем своем формальном великолепии, а любые сомнения в её значимости кажутся ворчливым брюзжанием математических маргиналов... Единственное число бесконечного континуума вещественных чисел, записываемое в виде цепной дроби унитарным кодом одним единственным символом и одинаково во всех системах счисления, самое иррациональное число, сильнее всех “сопротивляющееся” рационализации, а значит сохраняющее свое иррациональное *Я*.

В переводе на язык природных явлений, язык физической реальности это означает сохранение, стабильность, оптимальность, экстремальность, устойчивость по отношению к различным воздействиям, что высоко ценится в теории и на практике» (Г.Аракелян, 2012).

Непрерывная дробь содержит только единицы, что совершенно естественно (без наносной мистики), поскольку в исходном квадратном равенстве (1) все коэффициенты равны единице по абсолютной величине.

Другой похожий результат вытекает из модификации исходного равенства $\Phi = \sqrt{1+\Phi}$ через бесконечно встроенный радикал:

$$\Phi = \sqrt{1+\Phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}} = \Phi .$$

c) Представив равенство (1) в виде $\Phi = \frac{1}{-1+\Phi}$ и заменяя величину Ф последовательно в знаменателе этим значением, получаем альтернативную цепную дробь

$$\Phi = \frac{1}{-1+\Phi} = \frac{1}{-1+\frac{1}{-1+\Phi}} = \frac{1}{-1+\frac{1}{-1+\frac{1}{-1+\ldots}}} = \Phi . \qquad (2)$$

Аналогичным образом записывается малая золотая константа $\Phi^{-1} = \phi = \frac{1}{1+\phi}$ или

$$\phi = \frac{1}{1+\phi} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\phi}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots.}}} = \phi .$$

С использованием равенства $\Phi - \phi = 1$ можно выразить уникальное единичное тождество Вассера (собственное имя следует из работы [15]):

$$\boxed{\frac{1}{-1+\frac{1}{-1+\frac{1}{-1+\ldots}}} - \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}} \equiv 1} . \qquad (3)$$

На наш взгляд, тождество (3) более фундаментально, чем собственно разложение золотой константы (2).

Здесь одна математическая форма объединяет не только единичное разложение золотого числа Φ в цепную дробь, но и базовое равенство золотой пропорции $\Phi = 1 + \phi$.

В тождестве (3) фактически "зашифрован" код золотой пропорции.

Более того, в нём содержится основа в виде целого 1, а также *синтез-борьба-единение* двух противоположностей: 1 и –1.

Одна незадача: для сходимости первой цепной дроби в (3) начальное значение (на месте многоточия) следует положить в точности равным Φ, которое вполне подходит и для второй цепной дроби.

Образно говоря, необходимо высокоточное и целенаправленное «внешне воздействие», выходящее за рамки системно целого. Такой себе наружный толчок, "запускающий" цепные дроби, которые в своём взаимодействии обеспечивают сохранность исходного целого. Подобные идеи изложены в работе [16].

Кроме того, точность промежуточных вычислений должна быть невероятно большой.

В противном случае происходит "срыв" (рис. 7), и первая дробь устремляется к своему наиболее устойчивому аттрактору, равному $-\phi$. То есть выполнение равенства (3) требует неимоверно филигранных усилий в части поддержания устойчивости первой дроби.

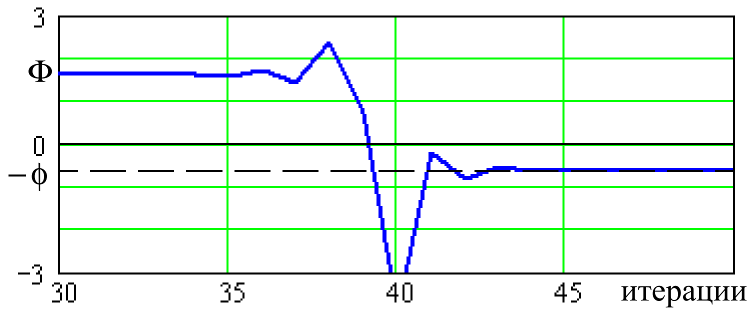


Рис. 7. Срыв итерационного расчёта цепной дроби
с принятой точностью вычислений 10^{-15} и переходом на новый аттрактор

Самым устойчивым единичным тождеством в категориях цепных дробей является соотношение на базе равенства $\phi + \phi^2 = 1$:

$$\frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} + \frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} \cdot \frac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}} \equiv 1 \quad . \tag{4}$$

При вычислении конкретного конечного приближения левой части в качестве начального значения допускается выбирать любое неотрицательное число, включая единицу или ноль. То есть тождество (4) абсолютно адаптировано к исходным данным.

В целом можно высказывать-синтезировать причудливые гипотезы на базе приведенных единичных тождеств (3)–(4). Они к тому располагают. Но это выходит за рамки настоящей работы.

d) Наиболее простое получение корня из пяти связано с выражением $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$. Поэтому все геометрические построения ЗС так или иначе основаны на теореме Пифагора для гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 1:2.

Это же свойство естественным образом приводит к многочисленным проявлениям золотого сечения в правильном пятиугольнике.

В этой связи обратим внимание на важный момент. Оказывается, нет ничего диковинного в том, что корень из пяти, как основа ЗС, образуется в квадратном уравнении, содержащим три исключительно единичных коэффициента $1 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 1 = 0$.

В решении такого уравнения средний коэффициент делится пополам. Отсюда в формообразующей формуле наравне с единицей появляется также двойка или «одна вторая». Далее дело техники...

e) Геометрическая прогрессия $1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \ldots$ со знаменателем Ф характеризуется вытекающим из (1) аддитивным свойством

$$\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}.$$

Подобно двухчленно-аддитивным последовательностям Фибоначчи, золотая константа образует единственную геометрическую прогрессию, которая обладает признаком аддитивного ряда так, что последующий член ряда равен сумме двух предыдущих членов.

Иррациональность. Примечательно, что в модели золотого сечения есть части, но они несоизмеримы с самим целым! Каждую из частей невозможно выразить рациональной дробью. То есть деление отрезка на части, выраженные рациональными числами, не даёт золотого сечения.

Здесь ЗС – больше числовая модель отношений, нежели абсолютное тождество.

Хотя и записывается строго математически с использованием иррациональных чисел.

Так или иначе, но наши одномерные части и само целое объективно лежат в пространствах различной кривизны.

Сколько бы мы не продолжали наращивать цепную дробь с её рациональными дробями-приближениями p_n / q_n, всё время будет наблюдаться различие произведений числителей и знаменателей, причём в точности на ±1: $p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$.

Таким образом, «обе части золотого сечения несоизмеримы между собой (не имеют общей меры)». Но если «две части некоторой величины несоизмеримы между собой, то они несоизмеримы и с целым» [9]. Весьма интересное наблюдение.

Из него следует, что в математическом аспекте никакую пару "золотоносных" объектов (из целого и его частей) невозможно соизмерить между собой. Это нужно хорошо помнить максималистам, пытающимся вырядить в «золотые одёжки» все процессы и явления мироздания.

Возможно, это можно как-то нивелировать общими философскими рассуждениями.

Однако факт остаётся фактом: элементы золотого деления – несоизмеримы!

Исходя из простоты и единственности образования, «золотая асимметрия» соответствует принципу наименьшего действия, сформулированному еще П.Мопертюи (1746) в физической реальности. Как универсальному закону движения и равновесия, согласно которому «природа при осуществлении своих действий идет всегда наиболее простыми путями».

Как только это отношение изменяется, система переходит в область более сложной пропорции, которая соответствует бифуркационным взрывам-революциям либо хаосу-деградации. Надо полагать, что на этих уровнях достигается соизмеримость пропорциональных элементов. Благо существует бесконечное число вариантов деления целого. Но, увы, уже не золотого...

Ещё раз о главном. Золотое сечение порождается тремя объектами $\{1, a, b\}$, два из которых образуют третий, так называемое *целое*.

«Из этого наименьшего состава связанных величин можно составить только единственную пропорцию, и получить единственное решение – Ф.

Единственное... Что еще, должны были здесь найти древние математики? – Выбирать не приходится. Что нашли, то и зафиксировали. Тут вам и красота, тут вам и гармония. Или ни того, ни другого, именно потому, что решение единственное. Но если решение единственное, то и все природные объекты, которые взаимодействуют между собой, как Часть и Целое, так или иначе, хоть примерно, но должны соблюдать эту пропорцию» [17].

Иного пути просто нет. Да и сравнивать особо не с чем. Разве что с более усложнёнными моделями-пропорциями. Среди простых ассиметричных пропорций золотой инвариант – единственный!

В выбранном классе объектов золотое сечение безальтернативно и совершенно очевидно. Никакой тебе сложности получения. И тем более таинственности.

В плане пропорций, коими в совершенстве владели древние учёные, золотая пропорция – рядовая и явственная форма получения.

Можно сказать, элементарная тривиальная пропорция на фоне многих других возможных структур.

Итак, мы подошли к завершению своего изложения.

Анализируя сказанное, ловим себя на мысли, что особо-то и добавить нечего.

Разве что ещё раз просмотреть-освежить аннотацию и отдельные положения данного исследования.

Золотая пропорция – очевидная по форме и уникальная по содержанию структура. Наипростейшая в получении и насыщенная редкостными свойствами модель.

Подводя черту, видимо, можно утверждать, что в настоящей статье установлена *закономерность структурно-системной пропорции*, неизменно выраженной моделью золотого сечения или деления целого в крайнем и среднем отношении.

Литература:

1.Василенко С.Л. Структурирование целого и его частей // АТ. – М.: Эл № 77-6567, публ.17044, 01.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322058.htm.

2.Василенко С.Л. Современная геометрия золотой пропорции // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 07.02.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=97&sm=2.

3.Тимердинг Г.Е. Золотое сечение: пер. с нем., 3-е изд., доп.. – М.: Либроком, 2009. – 108 с.

4.Васютинский Н.А. Золотая пропорция. – М.: Диля, 2006. – 366 с.

5.Корбалан Ф. Золотое сечение: математический язык красоты. – М.: DeAgostini, 2013. – 158 с.

6.Лаврус В. Золотое сечение / Наука и техника, 2000. – http://n-t.ru/tp/iz/zs.htm.

7.Сороко Э.М. Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем: Введение в общую теорию гармонии систем.– 4-е изд. – М.: Либроком, 2012. – 264 с.

8.Черняев А.Ф. Золото Древней Руси. Русская матрица – основа золотых пропорций. – М.: Белые альвы, 1998. – 144 с.

9.Щетников А.И. Золотое сечение в античной математике / Первое сентября – Математика. – Сентябрь 2006. – № 18 (608). – http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Golden_section.pdf.

10. Щетников А.И. Лука Пачоли и его трактат «О божественной пропорции» // Математическое образование, № 1(41), 2007, с. 33–44. – http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Pacioli.pdf.

11. Акимов О. Конец Науки. – http://sceptic-ratio.narod.ru/rep/kn8.htm/.

12. Василенко С.Л., Никитин А.В. Модельные структуры пропорционального роста. Часть 1. Синтез // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=107&sm=2; http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13091.html.

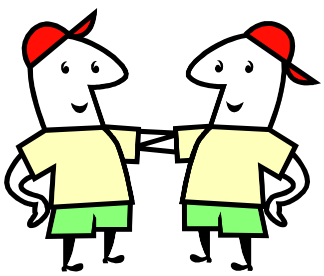
13. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2.

14. Черняев А.Ф. Основы русской геометрии. – М., 2004. – 413 с. // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17048, 02.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321237.htm.

15. Василенко С.Л. Пирамиды Вассера // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17321, 17.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161932.htm.

16. Василенко С.Л. Золотая пропорция как ядро генома мироздания // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2 // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 13.07.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11214.html.

17. Никитин А.В. Красота, гармония – простота... // АТ. – М.: Эл № 77-6567, публ.18239, 10.10.2013. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162189.htm.



Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html