

Дуально-биполярная модель в проекциях теоремы Пифагора

Была бы точка опоры, рычаг найдётся

Несмотря на палитру красок отношений в явлениях и процессах, мир в своем развитии-проявлении хорошо укладывается в схему взаимодействия противоположностей.

Именно взаимодействия, а не эфемерной борьбы, искусственно привнесенной из социально-классовой нетерпимости.

По принципу «белое – черное»...

У магнита два полюса. Биологическая клетка делится надвое.

Живое – неживое. И так далее. Как в зеркальной симметрии.

Есть, конечно, промежуточные формы и состояния.

С их взаимопроникновением в общем единстве противоположностей и развитии явлений.

Но, так или иначе, они всё равно приводят к условно-конечному варианту по схеме «плюс – минус». Между условными полюсами может быть ноль. В том числе с явно выраженным или неявным смещением типа (+0, -0).

Смысл промежуточных "серых" состояний можно соотнести с метками-точками между главными полюсами, которые одновременно тяготеют в обе стороны (рис. 1).

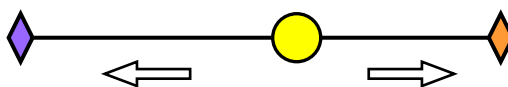


Рис. 1. Мнемоника биполярной системы со смещенным центром взаимодействия

Подобная биполярная модель не есть статичное образование. В ходе её движения-функционирования постоянно меняются параметры взаимодействия системно-образующих и системно-разрушающих факторов-связей.

Дуальный образ, – значит двойственный, двойной. Как "две стороны одной медали" или две противоположности.

Биполярность (лат. *bi* два + гр. *polos* полюс) понимается в классическом смысле, как двухполюсный, имеющий два противоположных функтора.

В координатах внутрисистемных состояний, по сути, имеем дуальную «вещь в себе» (по И. Канту).

Чтобы стать зримо-различимой, данная схема дополняется внешним наблюдателем. Живым или гипотетическим, – не столь существенно.

Важна его способность видеть-охватывать ситуацию в целом и давать или назначать количественные оценки связям-отношениям в принятой метрике (рис. 2).

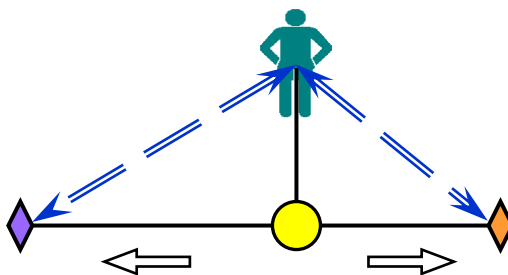


Рис. 2. Биполярная система с внешним наблюдателем

Роль стороннего наблюдателя принципиальна и значима.

С его помощью чисто линейная связь (в геометрическом контексте) "разворачивается" в плоскостную структуру.

В определённом смысле перед нами предстаёт тетрадная или четверичная модель.

По умолчанию наблюдатель предполагается пассивным. – Созерцателем-аналитиком.

Однако вполне допустимо считать его активной субстанцией. В плане движения-смещения с изменением угла зрения. Кроме того, не исключены допустимые инициативные воздействия и на саму биполярную систему.

Возьмем, к примеру, теологическую тримурти-структуру «отец – сын – святой дух».

Априори она троичная. Де-факто является тетрадной.

Модель основана на вере и наличествует исключительно в умах-настроениях человека. Как четвертой составляющей.

Формальное рассмотрение биполярной системы с внешним наблюдателем (рис. 2) позволяет подключить закономерности планиметрии. В том числе разнообразные свойства треугольников.

Наиболее фундаментальной здесь является теорема Пифагора, как одна из основополагающих скреп не только в мире математики, но и в философском восприятии окружающего бытия-пространства.

Примечательный факт: в книгу рекордов Гиннеса занесено 367 доказательств теоремы Пифагора, которые известны по научной литературе, не считая других источников.

Золотая пропорция как обусловленная необходимость. Откуда в природе возникли, те или иные, в нашем понимании, отношения и действия? – Подсказку даёт опыт развития науки и поиск новых знаний.

Резонно считать, что в основе движений-отношений лежит принцип минимальных энергий и движений.

Вспомним И.Ньютона: «Природа довольствуется простотой. А природа не дура».

Рассматривая биполярную систему (рис. 1), вполне закономерен вопрос о смещении центра взаимодействия.

Один из уникальных и достаточно распространенных случаев расположения такого центра соответствует золотому сечению с константой Φ .

Почему так? – На наш взгляд, ответ должен быть простым и очевидным. Лежать, что называется, на поверхности. Быть на виду.

Такая позиция соответствует нашему естественному пониманию и ключевым представлениям. Попробуем это показать.

На сколько частей можно минимально разделить *целое*? – Менее чем на две части не получается. Значит, вводим две части: a и b .

В общем случае эти части a и b неравны между собой и составляют *целое*.

Итак, есть минимальное множество $\{1, a, b\}$. *Целое* и его две части. Частей, составляющих *целое*, меньше просто не бывает.

Допустимо считать отсутствие взаимного проникновения частей. В противном случае достаточно провести обычную перенормировку, чтобы составные части не пересекались.

Следовательно, единственной минимальной формой образования *целого* становится аддитивно-сочетательная схема $1 = a + b$.

Взаимодействие частей между собой *в целом* должно удовлетворять некому глобальному признаку-проявлению.

Анализ физических законов (всемирного тяготения, Кулона и др.) даёт основание считать, что основополагающей согласованностью частей может стать их отношение: между собой и/или в сравнении с целым.

Эти отношения не могут просто «висеть в воздухе». Нужна некая "подвеска" или точка опоры и когерентной согласованности.

Припоминается изречение: «Дайте мне точку опоры, и я переверну весь мир» или буквально по Архимеду: «Дай, где стать, и я поверну Землю».

Прототипом такой закономерной подосновы становится обычная математическая пропорция как равенство двух отношений.

Итак, имеем три объекта $\{1, a, b\}$, связанные аддитивной формулой $1 = a + b$.

Исходя из условия сходимости решений в области реально осязаемых вещественных значений, из этих объектов можно составить только две (!) пропорции [1]:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} - \text{обыкновенное деление пополам};$$

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi - \text{золотое сечение или пропорционально-асимметричное деление.}$$

Деление пополам – наиболее очевидное разбиение целого. Для его фиксации можно обойтись и без составления пропорции. Всё заранее ясно.

Можно считать, что равноудаленное месторасположение центральной точки от полюсов соответствует статическому равновесию дуально-биполярной системы.

Поэтому из всех возможных нетривиальных вариантов пропорциональной модели остаётся лишь золотая пропорция.

Таким образом, из наименьшего состава связанных величин $\{1, a, b\}$ со смещённым центром, составляется лишь одна пропорция и получается единственное решение $\Phi \approx 1,618$.

Единственное!! То есть золотое сечение – единственная пропорциональная скрепа целого и его двух частей [1].

Золотое сечение (ЗС) – суть наилучшей и единственной пропорции, уравнивающей отношения целого и его двух частей. То есть частей между собой и с целым. В определённом смысле речь идёт об идеальном соотношении величин.

Одновременно ЗС – это точка самоидентификации. Интегратор. Положение, которое обеспечивает лёгкое восприятие отношений.

Именно поэтому его выявили ещё древние математики. Пусть и не численно, но геометрическими построениями.

К слову, им-то и выбирать особо не приходилось. В составлении пропорций они были большие мастера. Поэтому что «валялось под ногами», то и зафиксировали.

Тут вам и красота. Здесь вам и гармония. Но скорее всего, ни того, ни другого. Ибо решение единственное. Как вынужденное безальтернативное проявление. Ибо в рамках структуры $\{1, a, b\}$ другого не дано.

Отсюда вытекает надуманность придания золотой пропорции "божественности" в интерпретации экзальтированного монаха средневековья Луки Пачоли. Вся его шумиха-эйфория образована, можно сказать, на ровном месте.

Формируя математическую пропорцию, особенно в её геометрическом толковании-отображении, просто невозможно не "споткнуться" через золотоносный феномен. Как единственно возможный прообраз в выбранном классе взаимодействий.

Если деление пополам связано с закономерностями симметрии, то золотое сечение – с признаками асимметрии. При этом членение на неравные части отвечает принципу разнообразия и вызывает ощущение подвижности и динамики.

То есть ЗС характеризует динамическое равновесие целого, большей и меньшей части.

Асимметрия уравнивает неравные элементы за счет соответствующего пропорционального изменения расстояния до центральной точки (оси) целого.

Пифагорова ратсодия золотому сечению. В работе [2] представлены структурно-образующие модели, общие для теоремы Пифагора и золотого сечения.

Ввиду простых и одновременно уникальных свойств, Иоганн Кеплер охарактеризовал эти математические объекты как «два сокровища геометрии»:

«Существует два сокровища в геометрии: одно есть отношение диагонали прямоугольника к сторонам, другое – деление линии в крайнем и среднем отношении. Из первой вытекает построение куба, пирамиды и октаэдра, а из второго – построение додекаэдра и икосаэдра. Обе теоремы – бесконечной полезности и потому в высшей степени драгоценны... первую, гласящую, что стороны прямоугольника, будучи возведены в степень, равны квадрату линии, противолежащей прямому углу, – эту теорему, говорю я, вы справедливо уподобите куску золота, вторую, о пропорциональном сечении, назовете драгоценным камнем. Ведь она, хотя и прекрасна сама по себе, однако без первой ничего не стоит». – J. Kepler, *Mysterium Cosmographicum*, 1596.

Данный оригинальный текст высказывания Кеплера, который приведен в докторской диссертации В. Зубова «Архитектурная теория Альберти» (1946), напомнил В. Белянин.

Объединяющими подосновами для теоремы Пифагора и ЗС являются рекуррентные числовые последовательности, треугольники специального вида и др.

В частности, выделен равнобедренный треугольник [2], стороны которого соотносятся как периметр к их сумме.

Решений здесь всего два: корень квадратный из двух и константа золотого сечения.

Первое число символизирует квадрат и далее кубическую решетку.

Второе, в своих различных проявлениях, больше тяготеет к одушевлённым (биологическим и зоологическим) объектам.

Их единение в одной модели позволяет высказать предположение об особой роли и дуализме в структурировании живых и неживых материальных тел с одинаковым "строительным" алгоритмом формирования массы.

Продолжим начатую тему.

Любому разбиению отрезка на две составные части можно сопоставить прямоугольный треугольник.

Его гипотенуза – есть исходный отрезок. А линия, соединяющая точку деления отрезка и вершину треугольника с прямым углом, является перпендикуляром (рис. 3).

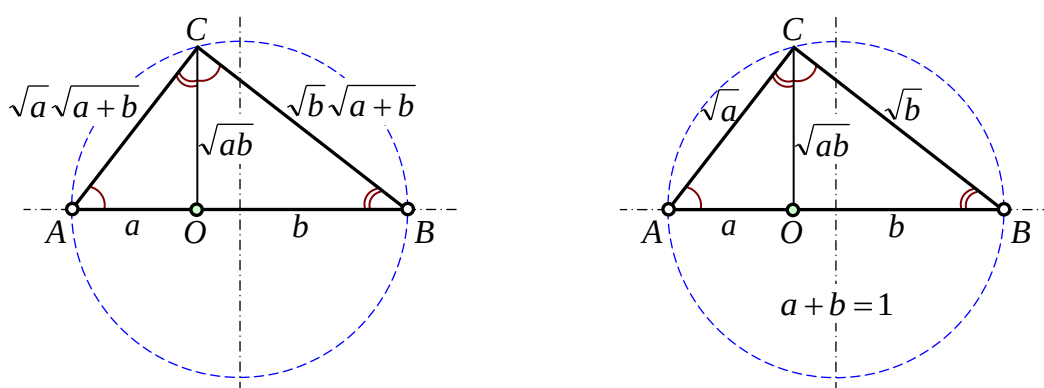


Рис. 3. Деление линейного отрезка $AB = AO + OB$ в привязке к круговой системе

Учитывая равенство углов три треугольника эквивалентны: один большой – ACB и его два составляющих – ACO , BCO .

То есть высота, проведенная к гипотенузе, делит треугольник на два меньших треугольника, которые подобны исходному треугольнику и подобны друг другу.

Отсюда вытекают многие соотношения, в частности:

- высота есть среднее геометрическое (пропорциональное) двух сегментов гипотенузы

$$CO^2 = ab;$$

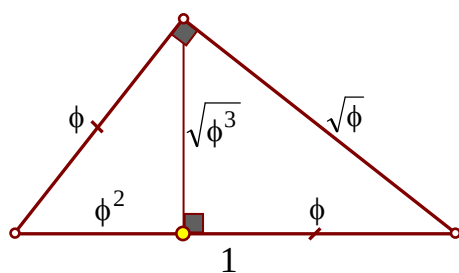
- каждый катет треугольника есть среднее пропорциональное гипотенузы и смежных сегментов

$$CA^2 = a(a+b), \quad CB^2 = b(a+b);$$

- для единичной гипотенузы имеем $1 = a + b$ или $1^2 = (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2$.

Если точка O – суть золотое сечение, то размеры частей составляют (см. рисунок)

$$a = \phi^2, \quad b = \phi, \quad \phi = \Phi^{-1} = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618.$$



Катеты соответственно равны ϕ , $\sqrt{\phi}$, а соотношение сторон имеет вид $1 : \sqrt{\phi} : \phi$.

Исходное алгебраическое тождество золотого сечения запишем в эквивалентной форме теоремы Пифагора

$$1 = \phi + \phi^2 \Leftrightarrow 1^2 = (\sqrt{\phi})^2 + \phi^2.$$

Единица равна сумме двух скаляров $1 = \phi + \phi^2$ или сумме двух векторов $\bar{1} = \bar{\phi} + \sqrt{\phi}$.

После масштабирования путем умножения на Φ получаем отношение сторон $\Phi : \sqrt{\Phi} : 1$.

Такие стороны формируют прямоугольный треугольник, который в литературе по пирамидам называют Δ Кеплера или Δ Прайса [3].

Это единственный прямоугольный треугольник, стороны которого образуют геометрическую прогрессию $c : b = b : a$ и вытекающую из этого геометрическую прогрессию сторон $a : b : c = 1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$.

Данное соотношение непосредственно связано с написанием квадратного трёхчлена, определяющего золотое сечение, в виде прообраза теоремы Пифагора:

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \Leftrightarrow \Phi^2 = (\sqrt{\Phi})^2 + 1^2.$$

Треугольник Кеплера – прямоугольный треугольник, в котором длины двух катетов и гипотенузы образуют геометрическую прогрессию [4, с. 81–85]:

$$\text{гипотенуза} / \text{больший катет} = \text{больший катет} / \text{меньший катет}.$$

Таким образом, треугольник Кеплера объединяет золотое сечение отрезка единичной длины и теорему Пифагора.

Что касается треугольников общего вида (не обязательно прямоугольных) со свойством геометрической пропорции $c : b = b : a$ для сторон, то таких фигур существует великое множество, образуя любопытную резольвенту Вассера [5, 6].

Целочисленное решение задачи. Для получения целочисленного решения следует исходить из наличия радикалов или извлечений арифметического корня.

С учетом квадратных корней $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ составляющие части (a, b) исходного отрезка должны быть квадратами целых чисел: $a = x^2$, $b = y^2$.

Присутствие ещё одного радикала $\sqrt{a+b}$ приводит к тому, что и сумма этих чисел должна быть квадратом числа: $a + b = x^2 + y^2 = z^2$.

Итак, отрезок и его две части численно являются квадратами чисел.

Значит, они составляют *пифагоровы тройки* [7] – упорядоченный набор из трёх натуральных чисел (x, y, z) , удовлетворяющих однородному (с равными степенями одночленов) уравнению $x^2 + y^2 = z^2$ второй степени (рис. 4).

Чем больше числа примитивной пифагоровой тройки, тем больше треугольник с их длинами приближается к равнобедренному, деля заданный отрезок практически пополам.

Напомним, что пифагорова тройка называется примитивной, если она не может быть получена из другой пифагоровой тройки при умножении на одно и то же натуральное число.

Самая простая тройка соответствует египетскому треугольнику $3^2 + 4^2 = 5^2$.

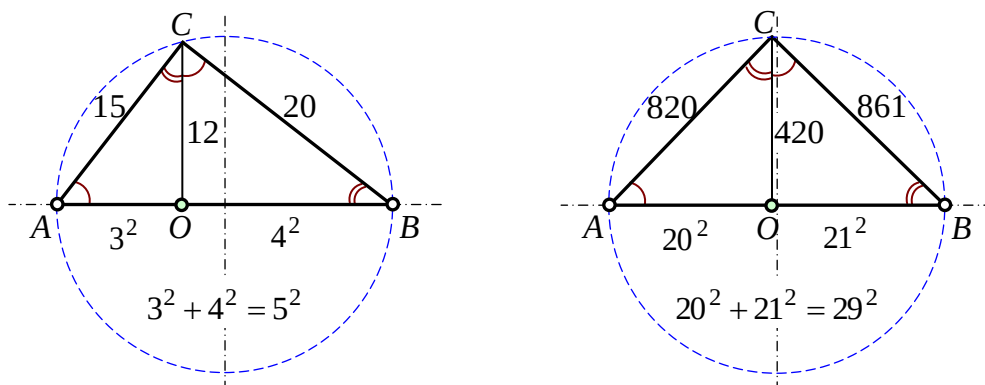


Рис. 4. Примеры целочисленных решений деления отрезка на две части согласно пифагоровым тройкам

Полезь целочисленных решений. В евклидовой геометрии точка не имеет размеров. По определению. Подобное суждение имеет свои издержки и труднопреодолимые противоречия-нестыковки, как результат принимаемых аксиом.

К этому нужно относиться философски терпимо. Ровно настолько, насколько позволяет здравый смысл в рамках формальной аксиоматики.

Гораздо удобнее и строже оперировать бесконечно малыми величинами ε со сколь угодно малым размером, большим нуля. В противном случае непрерывная линия, содержащая невероятно большое множество "нулевых" точек, не проводится.

Например, мы не можем в одной метрической плоскости воспроизвести единичный квадрат и провести в нём диагонали с иррациональной длиной $\sqrt{2}$.

Чертя линию, обычно говорим: «соединим точки – углы квадратов».

Но всё дело в том, что эти точки не соединяются, и треугольники не замыкаются.

Единственно *отчетливые замыкания образуют пифагоровы тройки*.

То есть не всякие точки можно соединить отрезком прямой. Тогда, оперирую безразмерными точками, речь можно вести об условно проведенном отрезке.

Древние удивлялись: отрезок типа $\sqrt{2}$ есть, а эквивалентного ему числа нет.

Всё намного проще: отрезка такой длины тоже нет! Угловые точки метрического квадрата в буквальном смысле слова не соединятся. В процессе вычерчивания происходит недобор расстояния или перебор-перескакивание. Что-то вроде «недолёт-перелёт».

Но никогда в самую суть-точку.

Достоверное местоположение безразмерной точки $\sqrt{2}$ на числовой оси не определено.

Если и определено, то с точностью конечной бесконечно малой величины $\varepsilon \rightarrow 0$.

Квадратичный закон. Заметим, что знаменитый египетский треугольник является частным случаем числового проявления более общего квадратичного закона [8]:

$$\sum_{y=0}^n (x+y)^2 = \sum_{y=n+1}^{2n} (x+y)^2,$$

где $x = n(2n+1)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Формула суммы таких чисел выражается формулой [9, A059255]

$$S = n \left[\frac{1+n^2}{2} + 2n(1+n)^2(1+2n) \right].$$

Например,

$$n = 1: \quad 3^2 + 4^2 = 5^2, \quad S = 25;$$

$$n = 2: \quad 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2, \quad S = 365;$$

$$n = 5: \quad 55^2 + 56^2 + \dots + 60^2 = 61^2 + 62^2 + \dots + 65^2, \quad S = 19855.$$

Связь средних с золотым сечением. Пусть $H = 2 \frac{ab}{a+b}$, $G = \sqrt{ab}$, $A = \frac{a+b}{2}$ – средние значения двух положительных чисел $b > a$: гармоническое, геометрическое (пропорциональное) и арифметическое.

Если в прямоугольном треугольнике катеты равны H и G , а гипотенуза равна A , то получаем [10] $\frac{A}{H} = \frac{A^2}{G^2} = \frac{G^2}{H^2} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – золотое сечение и $\frac{b}{a} = \Phi^3$.

Положим $(a, b) = (\Phi, \Phi^2)$.

Тогда $(H, G, A) = (1, \sqrt{\Phi}, \Phi)$.

Это всё тот же гармонический треугольник Кеплера.

Антиреклама золотой пропорции [11]. Слова "божественное", "деление", "отрезки", числа Фибоначчи усыпили исследователей. Многообразие синтеза в мироздании древние и многие современные "золотоискатели" свели к тривиальному анализу. Причём в его наихудшем виде – разрезанию на две части.

Явное ограничение такого церковного и одновременно убогого толкования в надежде расширения стали подменять субститутутом в виде надуманного суррогата «обобщенных золотых сечений» (А. Стахов, Э. Сорока и др.) [11].

Взять, к примеру, названия монографий [12, 13] о «золотых сечениях» (?), где одну единственную константу ЗС неожиданно ксерокопируют, представляя во множественном числе. Этим самым ещё больше нивелирована истинная значимость золотой пропорции с её подменой бесконечным арсеналом алгебраических чисел.

Всё это отодвинуло учение о золотой пропорции и поиск настоящего «золотого руно» на многие десятилетия лет назад. Привело к тому, что константа Φ в её истинном значении-проявлении оказалась практически не востребованной в математике и физике.

Золотая пропорция, прежде всего, имеет тесную связь с теоремой Пифагора, выраженной через квадраты взаимодействующих объектов – сторон треугольника.

Квадратичные корни в аналитике золотой пропорции иногда могут иметь специфическое проявление, создавая иллюзию проскакивания квадратного уравнения.

Нет, сама по себе внутренняя сущность остается. Но решение пропорции (равенства отношений) идет как бы в обход квадратного уравнения.

Об этом следует непременно говорить, дабы не абсолютизировать или порождать новую свежее испеченную догматику, бороться с которой будет труднее, чем её создавать.

Последнее подтверждается мифологическими сказаниями о золотой пропорции, собранными вперемешку с религиозно-социальным пафосом и сверхъестественными силами, а также преувеличениями и вымыслами.

Пифагорово прочтение золотого сечения. В работах [14, 15] на собственной доказательной базе делается вывод, что золотое сечение вытекает из знаменитой теоремы Пифагора, и нет оснований для его мистификации.

Мол, взяли гипотенузу, добавили два катета прямоугольного треугольника, вспомнили теорему Пифагора и получили совсем не частный случай, а новую самостоятельную сущность ЗС. Этим самым настойчиво проповедуется линия о некоей особенности золотого сечения в его связи с теоремой Пифагора.

На самом деле никакая уникальная связка здесь особо не просматривается.

Как было показано выше, любой прямолинейный отрезок может фигурировать в качестве диаметра соответствующей окружности.

На этом диаметре можно достроить бесконечное множество прямоугольных треугольников, соединив концы отрезка-диаметра с любой точкой окружности.

Перпендикуляр из данной точки к диаметру воспроизводит его надлежащее деление на две части в любом фиксированном соотношении.

Таким образом, любому делению отрезка на две части всегда можно сопоставить определённый прямоугольный треугольник, причём единственным образом.

В этом контексте золотое сечение не обладает никакими предпочтениями в сравнении с иными способами деления отрезка.

Излишняя суэта-возня вокруг этого сродни искусственному созданию очередного мифа-ореола вокруг золотого сечения. Оно в этом вовсе не нуждается в виду достаточного количества уникальных свойств, не требующих дополнительного раздувания очередного краснобайства. Если не сказать "златобайства".

В то же время заслуживает внимания продемонстрированный в работе [14] переход от теоремы Пифагора – через деление целого в среднем и крайнем отношении – к числу золотого сечения:

$$x^2 + y^2 = z^2 \rightarrow y^2 = z^2 - x^2 = (z+x)(z-x) \rightarrow \frac{z+x}{y} = \frac{y}{z-x}.$$

Сравнивая с математической пропорцией (задачей деления целого в среднем и крайнем отношении) $\frac{\text{Целое}}{\text{Большее}} = \frac{\text{Большее}}{\text{Меньшее}}$, имеем: Целое – Меньшее = $(z+x) - (z-x) = y$ или $y = 2x$.

Положив для определенности $x=1$, получаем $y=2$ и $z=\sqrt{5}$.

Обозначая через число ЗС безразмерную величину Φ как отношение целого к большему, находим

$$\Phi = \frac{z+x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Хотя запись решения квадратного уравнения напрямую не использовалась, из контекста преобразований хорошо видно: оно неявно присутствует в отображении пропорции, когда в равенство отношений мы вводим неизвестную переменную.

Хотя в целом перечень инструментов и набор разрешенных операций в значительной степени обусловлен главным образом историческими причинами и, вообще говоря, мог быть другим. Но это больше относится к философии математики [19].

По Евклиду, использовать циркуль можно только для проведения окружности с данным центром и радиусом, уже отложенным от данной точки, то есть, фактически, для проведения окружности с данным центром через данную точку (постулат 3) [20, с. 14]:

«И что из всякого центра и всяким раствором <может быть> описан круг».

Переносить отрезки раствором циркулем нельзя!

Корректное построение треугольника Кеплера и числа Φ содержит простые операции:

а) деление отрезка (единичного целого) пополам и восстановление на нём, как на диаметре, полуокружности;

б) стандартное деление целого в золотой пропорции (с учетом деления отрезка пополам) и восстановление из точки ЗС перпендикуляра до пересечения с полуокружностью;

в) длина Φ при желании образуется продолжением исходного целого на расстояние, равное большей части – обычным поворотом циркуля.

Развитие задачи. Дальнейшее развитие исходной темы позволяет свободно выйти на просторы универсального и поистине настоящего обобщения.

В самом деле, вполне естественным выглядит развитие понятия золотой пропорции, по-прежнему приводящей к константе Φ [17]:

$$x = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}, \quad c^n = a^n + b^n \quad \Rightarrow \quad x^n = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \Phi.$$

Если степень n числа a геометрически образует n -мерный гиперкуб с ребром a , то в общем случае золотая пропорция для целочисленных или натуральных значений $n \geq 1$ интерпретируется следующим образом: **сумма объёмов n -мерных гиперкубов так относится к одному из них, как он к другому.**

Кажется невероятным, но *равносторонний треугольник становится предельной моделью золотой пропорции* ($n \rightarrow \infty$).

Вместо заключения. Золотое сечение не имеет особых предпочтений с теоремой Пифагора. Однако позволяет одновременно выстроить абсолютную пропорцию сторон прямоугольного треугольника. Как частного гармоничного случая дуально-биполярной модели в проекциях теоремы Пифагора.

В общем случае для произвольного треугольника с пропорциональностью сторон выходим на кривую Вассера [5, 6].

В абстрактно-модельном аспекте число ЗС становится ключевой константой, способной объединить вокруг себя наибольший круг фундаментальных сущностей мироздания.

Литература:

1. Василенко С.Л. Пропорциональное деление целого // Математ. и историч. исслед. гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.10.2013. – artmatlab.ru/articles.php?id=108&sm=2.
2. Василенко С.Л. "Два сокровища геометрии" как основа структурирования природных объектов // Математ. и историч. исслед. гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.11.2013. – artmatlab.ru/articles.php?sm=2&id=110.
3. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.
4. Roger Herz-Fischler. The shape of the Great Pyramid. – Wilfrid Laurier University Press, 2000. – 294 p.

5. Василенко С.Л. В поисках математической гармонии мира // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.
6. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: гармонические треугольники // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16007, 22.07.2010. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.
7. Серпинский В. Пифагоровы треугольники: пер. с польск. – М.: Учпедгиз, 1959. – 112 с.
8. Герман Ф. Квадратичный закон в геометрии и не только. – 03.02.2014. – franz-hermann.com/pdf/zanimat/K_Zakon.pdf.
9. Sloane N.J.A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – research.att.com/~njas/sequences.
10. Di Domenico A. The golden ratio – the right triangle – and the arithmetic, geometric, and harmonic means // Mathematical Gazette 89, July 2005, 261.
11. Василенко С.Л. Базовые соотношения между фундаментальными константами // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm.
12. Сороко Э.М. Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем: Введение в общую теорию гармонии систем. – 4-е изд. – М.: Либроком, 2012. – 264 с.
13. Черняев А.Ф. Золото Древней Руси. Русская матрица – основа золотых пропорций. – М.: Белые альбы, 1998. – 144 с.
14. Бакунинский А. Математика гармонии: позолоченные сечения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16939, 05.11.2011. – trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322020.htm.
15. Бакунинский А. Математика гармонии: позолоченные сечения. – 23.04.2008. – a3d.ru/architecture/stat/219/.
16. Сергиенко П.Я. Гармоничные ("золотые") прямоугольные системы координат двухмерного пространства // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16992, 17.11.2011. – trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322033.htm.
17. Василенко С.Л. Главная тайна золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17178, 04.01.2012. – trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322109.htm.
18. Сергиенко П.Я. "Сакральный треугольник" Платона как математический объект гармоничной Вселенной // АТ. – М. Эл. № 77-6567, публ.18697, 20.03.2014. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001d/00162279.htm.
19. Успенский В.А. Апология математики, или о математике как части духовной культуры // Новый мир. – 2007. – № 11. – magazines.russ.ru/novyi_mi/2007/11/us10.html.
20. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.



© Василенко, 2014 
Харьков, Украина 

Авторские страницы:

<http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3>

<http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html>

<http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm>