С.Л. Василенко

Триномиальные аналогии с золотым сечением

Рассмотрено множество триномиальных алгебраических структур как расширение задачи золотого сечения, характеризуемого константой-корнем простейшего квадратного уравнения. Среди них: трином старших степеней, трехчлен с запаздыванием, уравнение k-боначчи в его триадной интерпретации и др. В ходе развития исходной модели образуются новые решения. В общем случае они не имеют ничего общего с золотым сечением, кроме совместной принадлежности к бесконечному множеству алгебраических уравнений.

Изобретал аналогии, которым нет аналогов …

Золотое сечение (ЗС) имеет тесное отношение к тройственному состоянию вообще и алгебраическим триномам в частности.

Если речь идет о делении целого $1 = a + b$ на две сопредельные части, то имеет место триада $\{1, a, b\}$.

Из данных элементов можно составить ограниченное семейство пропорций, а именно:

– деление пополам, $1/a = 1/b$;
– золотое сечение, $1/b = b/a$;
– отсутствие деления так такового.

Наравне с равновеликой дихотомией $a = b = 0{,}5$ золотое сечение является пропорциональной моделью. Как видно, вполне тривиальной и явственной получаемой. Но одновременно весьма значимой.

За многие столетия появилось много разноплановых описаний золотого сечения.

К сожалению, многие из них больше тяготеют к лженаучным конфигурациям, нежели к фактической картине.

Условно они делятся на три группы:

– слепое благолепие, идущее со времен обожествления золотой пропорции математиком-монахом средневековья Луки Пачоли;

– голословные и малоубедительные утверждения, вроде вольных фантазий о том, что хаос и гармония распределены в отношении ЗС, архитектура «поражена вирусом ЗС» и др.;

– экспериментально-дутые формулировки, когда под ЗС искусственно подгоняется «всё, что ползает и летает», зубы, сердце, пупок, лицо …

В частности, гипотеза о присутствии ЗС в живых системах обычно выдаётся в качестве некоего догмата.

Без серьезного теоретического обоснования. Как претензия на всеобщность. Когда с помощью различных логических уловок желаемое выдается за действительное.

Изредка, встречаются аргументированные высоко-содержательные материалы.

В основном же преобладают описания, похожие на «отображение соотношений размеров пузырьков в морской пене при движении вилами по воде».

Отметим, что под впечатлением "золотой лихорадки" мы однажды также не удержались от применения золотоносных эпитетов в одной из работ (2008), где обычные исследования корней алгебраических уравнений ошибочно названы «обобщенными ЗС».

Правда, в кавычках. Тем самым всё-таки подчеркивалась условность словосочетания.

Постановка задачи.

Мы не ставим целью глубокое исследование модельных структур и числовых последовательностей в зависимости от вида характеристических алгебраических уравнений и начальных условий.

В большей мере всё это уже изучено в математической литературе.

Наша задача – продемонстрировать, что золотоносный квадратный трехчлен x^2-x-1 является всего лишь частным случаем тринома x^n-px^r-q и никоим образом не отбрасывает на него тень своей позолоты.

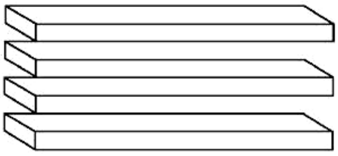
Последний, конечно, более сложен. В общем случае не имеет аналитически вычисляемых корней.

Корни определяются поисковыми вычислительными методами.

Напомним, трином (греч. *treis* три + *nomos* член) или трехчлен в математике – алгебраическое выражение, состоящее из трёх одночленов.

В отдельных частных примерах триномы могут иметь решение ЗС. При этом невольно возникает соблазн назвать вещественные корни всех разновидностей тринома «обобщенными золотыми сечениями».

Но в действительности это не верно, алогично и противоречит здравому смыслу. Подобно оптическим иллюзиям (рис. 1).



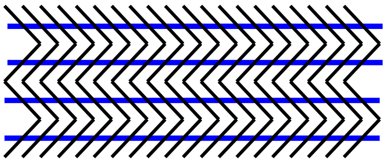


Рис. 1. Оптические иллюзии: "$3=4$", "непараллельность параллельных"

Триномы дают семейство констант, порождаемых выбранным типом алгебраического уравнения. Среди них может быть и ЗС. Ну, и что с того? – Общее алгебраическое уравнение в частном случае также дает модель ЗС. Не называть же его из-за этого обобщенным уравнением ЗС?

После решения задачи пропорционального деления целого на две части процесс моделирования вырождается, а ЗС одновременно становится личным именем математической константы $\Phi\approx 1{,}618$.

Этим самым проблематика структурирования ЗС себя исчерпывает.

Константы не обобщаются.

Искусственное навешивание золотых ярлыков себя не оправдывает и несет за собой терминологическую сумятицу и понятийный вздор.

Пути расширения задачи ЗС.

В понятийном аспекте золотоносные термины-эпитеты должны отбрасываться или уходить на задний план, как только мы переходим на структуры, которые в своей основе не содержат константу Φ.

В то же время допустимо говорить о развитии задачи ЗС. Но уже без золотого окраса. Используя отдельные свойства и закономерности исходной задачи, и стремясь продолжить их позитивные тенденции-начала на более сложные объекты.

Расширение задач, родственных с золотым сечением, может осуществляться самыми разнообразными способами: повышением размерности исходной модели, добавлением дополнительных членов, введением варьируемых коэффициентов, заменой целочисленных величин вещественными и др.

Действительно, если посмотреть чуть глубже, то практически «любой алгебраический полином с доминирующим положительным корнем, так или иначе, отражает деление единичного отрезка на две части в определённой пропорции» [1]. Пусть достаточно сложной и трудно интерпретируемой.

Однако «золотоносная инфекция прилипчива» и способна внедряться в интеллектуальные закоулки серого вещества. Будучи чрезвычайно въедливой, заставляет пораженные индивидуумы идти на любые уловки во имя сохранения своего status quo.

Понимая всю несообразность и алогичность обобщений золотого сечения, в работе [2] множество приемлемых кандидатов-вариаций ограничивается уравнением вида $x^2 - px - 1 = 0 \;\rightarrow\; x - x^{-1} = p$. То есть набором решений, когда число и ему обратное имеют одинаковые мантиссы: «В качестве фундаментального признака, выделяющее "золотое семейство среди множества других теоретически допустимых семейств, естественно брать уникальное *правило сохранения* <совпадения> *мантиссы*».

Ну, и в чем здесь уникальность? – В частности, любой трином допускает похожие интерпретации по одинаковости мантисс. Равно как и любое другое алгебраическое уравнение. Но из этого совсем не следует псевдонаучная дефиниция «обобщенных ЗС».

В правиле мантисс отсутствует отчетливая логика. Налицо чисто искусственное сужение предметной области. Можно сказать под надуманным предлогом.

Естественность данного признака вовсе не очевидна.

Де-факто он произволен.

Нечто свободного выбора (набора) начальных условий.

При этом в качестве аргумента приводятся очевидные преобразования на основе формальной замены буквенных обозначений (одних буковок другими) типа $\Phi = e^{\ln \Phi} = e^{\mathrm{arsh}\, 1/2}$, тривиально связывая тождественные (по определению) записи [3, 4].

Тот же признак равенства мантисс превосходно подходит и для корней уравнения $x^2 - x = q$. Только нужно сравнивать числа-корни $\lambda(q) = \left(1 + \sqrt{1+4q}\right)/2$ с их квадратами.

То есть образуется бесконечное множество пар чисел таких, что само число и его квадрат имеет одинаковые мантиссы.

При этом получается всецело безупречная и красивая структура.

Она идеально подходит под понятие "родового признака" с убедительнейшим формальным свойством-правилом сопоставления-равенства мантисс числа и его квадрата.

С совершенным геометрическим и алгебраическим толкованием квадрата. Всё также формируется бесконечный ряд иррациональных взаимных пар чисел, которые отличаются целым числом и порождают интересный эффект равенства мантисс числа и его квадрата.

Более того, подобных числовых и адекватных им алгебраических структур существует великое множество.

Например, *Имеют одинаковые мантиссы* такие структуры ($n \ge 2$, q, p, r – положительные целые):

a) $x^n - x = q$ – число и его n-я степень, например, число и его квадрат;

b) $x^n - x^r = q$ – две разные степени числа, в том числе $x^n - x^{n-1} = q$ – две последовательные степени числа;

c) $x^n = px + 1 \;\Rightarrow\; x^{n-1} - x^{-1} = p$ – степень числа и его обратное значение, включая само число и его обратное значение [2];

d) $x^n = px^{n-1} + 1 \;\Rightarrow\; x - x^{-n+1} = p$ – число и обратное значение его степени (отрицательная степень числа).

Таким образом, несмотря на верное акцентирование на несообразность золочения любых алгебраических полиномов [2], «золотоносная инфекция» всё одно живуча и способна к поражению-распространению.

Автор невольно становится заложником своего варианта «обобщенных» ЗС, допустив одновременно две принципиальные логические ошибки:

1. Несомненная подстройка с очевидным желанием протиснуть только собственный вариант $x - x^{-1} = p$.

2. Явное пренебрежение другими вариациями и отсечение иных возможностей, включая несложные триномиальные структуры (табл. 1).

Хотя вместе, оба варианта приводят к новым структурам, которые не имеют ничего общего с золотым сечением, за редкими исключениями.

Таблица 1

Простые триномиальные структуры

y – часть целого	x – отношение целого к одной из частей	Рекурсия	Наименование
$y^2 + y = 1$	$x^2 = x + 1$	$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}$	Золотое сечение
$y^k + y^{k-1} = 1$	$x^k = x + 1$	$g_n = g_{n-k+1} + g_{n-k}$	Трином с запаздыванием
$y^k + y = 1$	$x^k = x^{k-1} + 1$	$g_n = g_{n-1} + g_{n-k}$	Трином старших степеней

Производящая матрица.

Чтобы показать всю абсурдность терминологического золочения алгебраических структур по формальному признаку, достаточно рассмотреть алгебраическое уравнение общего вида – прообраз разнообразных рекуррентных последовательностей.

Весьма любопытен подход к определению элементов числовых рядов с использованием специально построенной матрицы.

Структурно производящая матрица A (рис. 2) включает единичную матрицу размером $k \times k$, которая слева дополнена нулевым столбцом, а снизу строкой, состоящей из коэффициентов a_i характеристического алгебраического уравнения

$$x^k = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k .$$

$$\begin{array}{|c|cccc|}
\hline
0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
a_k & a_{k-1} & \ldots & \ldots & a_1 \\
\hline
\end{array}$$

Рис. 2. Структура производящей матрицы A

Или в его эквивалентной форме разностного (возвратного) уравнения-аналога [5]

$$f_n = a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \ldots + a_k f_{n-k} .$$

Данная схема позволяет генерировать рекуррентные последовательности – линейные рекурсии с постоянными коэффициентами и дискретным "временем" n.

Все диагонали матрицы A, включая "ломанные", содержат нулевые элементы, кроме главной диагонали единичной матрицы, дополненной элементом a_k. Произведение элементов этой "ломаной" диагонали численно равно коэффициенту a_k.

Поэтому определитель производящей матрицы равен $(-1)^k a_k$.

Например, матрица для генерации чисел Фибоначчи имеет вид $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Здесь единичная матрица в виде 1 в правом верхнем углу дополнена слева нулевым вектором, состоящим из одного элемента, а внизу пристроена пара единичных коэффициентов.

В общем случае для вектора произвольных начальных условий $\delta=\left(f_1 \dots f_k\right)^{\text{т}}$ как первых членов рекурсии, которые одновременно не равны нулю, имеет место простое матричное соотношение для вычисления кортежа элементов числового ряда

$$\boxed{A^n\delta=\left(f_n \;\; f_{n+1} \; \dots \; f_{n+k} \right)^{\text{т}}}, \tag{1}$$

где т – символ транспонирования матрицы или вектора.

Например, для модели k-боначчи $x^k = x^{k-1}+x^{k-2}+\ldots+1$ все величины $a_j=1$, для тринома старших степеней – от нуля отличны только два коэффициента a_1, a_k; для тринома с запаздыванием – пара коэффициентов a_{k-1}, a_k.

Модель запаздывания.

Триномиально-характеристическое уравнение и соответствующая ему рекурсия (разностное уравнение) имеют вид

$$x^k = x+1, \qquad f_n = f_{n-k+1}+f_{n-k}.$$

Названная нами модель с запаздыванием иногда именуется также последовательностью с пропусками (*skiponacci* = *skip* пропуск + *nacci* от Фибоначчи).

Элемент числовой последовательности f_n характеризует множество композиций (разложений) числа n в виде частей $k-1$ и k.

Для единичных начальных условий $\delta=(\,1\;1\;\dots\;1\,)$ и единичных значений коэффициентов $a_j=1$ справедлива аддитивно-комбинаторная формула

$$f_n=\sum_{j=0}^{\lceil n/2\rceil} C^{\,j}_{\left\lceil \frac{n-j}{k-1}\right\rceil},$$

где $\lceil\xi\rceil$ – целая часть от ξ или наибольшее целое, не превосходящее ξ;

$C_n^k=\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n по k, равное биномиальному коэффициенту.

Например, для модели $x^5=x+1$, $f_n=f_{n-4}+f_{n-5}$ имеем матричные формы

$\delta=(\,1\;0\;0\;0\;1\,)^{\text{т}}$: A017827 [6]
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}^{50}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}529\\550\\661\\860\\1013\end{pmatrix};$$

$\delta=(\,1\;1\;1\;1\;1\,)^{\text{т}}$: A103372
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}^{50}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1674\\1939\\2224\\2600\\3084\end{pmatrix}.$$

Модель четвертой степени $x^4=x+1$, $f_n=f_{n-3}+f_{n-4}$:

$\delta=(\,1\;0\;0\;1\,)$ – A017817; $\delta=(\,1\;1\;1\;1\,)$ – A079398.

Кубический трином $x^3 = x+1$, $f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$ формирует последовательность Падована – A000931: 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21 …

Величина f_n – количество композиций n на части, сравнимых с 2(mod 3);

– количество композиций n на части, которые нечетны и не менее трех (≥ 3, D.Callan, 2006), например, $f_{11} = 4$: 11=3 +3+5=3+5+3=5+3+3;

– число строк длиной $(n-8)$ из алфавита $\{a, b\}$, которые не содержат более одной буквы a или двух последовательных букв b (T.Gottfried, 2010), например, n = 4: {*abab, abba, baba, babb, bbab*} и $f_{4+8} = 5$;

– допускает множество комбинаторных форм, в том числе наиболее простая из них

$$f_n = \sum_{j=0}^{\lceil n/2 \rceil} C_j^{\,n-2j} .$$

Любая тройка подряд идущих чисел ряда может служить начальными условиями, образуя всё тот же ряд, только со смещением нумерации, (1 0 0), (0 0 1), (1 0 1), (1 1 1) и т.д.

Особый случай начальных условий в линейной рекуррентной последовательности $f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$, $\delta = (3\ \ 0\ \ 2)^{\mathrm{T}}$ в теории чисел называют числами Перрина – A001608:

3, 0, 2, 3, 2, 5, 5, 7, 10, 12, 17, 22, 29, 39, 51, 68, 90, 119, 158, 209, 277, 367, 486, 644 …

Характеризует число максимальных независимых множеств в цикле порядка n.

Матричные формы $A^n\delta$, в частности, дают такие результаты:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 22 \\ 29 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 277 \\ 367 \\ 486 \end{pmatrix}$$

Комбинаторная формула для чисел Перрина (en.wikipedia.org/wiki/Perrin_number) имеет вид:

$$f_n = \sum_{j=1}^{n/2} k^{-1} C_j^{\,n-2k} .$$

Наибольший положительный корень кубического уравнения $x^3 = x+1$ равен

$$\rho = \frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{69}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{69}}}{\sqrt[3]{18}} = 1{,}3247 .$$

В математической литературе данную величину часто называют серебряной или пластиковой константой ρ – A060006 (en.wikipedia.org/wiki/Plastic_number).

Число ρ – наименьшее число Писота – положительное алгебраическое целое число, большее 1, такое, что все его сопряженные элементы по абсолютной величине меньше 1 (mathworld.wolfram.com/PisotNumber.html).

Это единственное положительное число, удовлетворяющее тождеству $(\rho-1)\cdot\rho\cdot(\rho+1) = 1$.

После самонастройки системы элементы последовательности можно вычислять по формуле $f_n = \mathrm{round}(\rho^n)$, $n \ge 10$ – как округление до ближайшего целого.

Любопытно бесконечное вложение корней, получаемое непосредственно из формулы:

$$\rho = \sqrt[3]{1+\rho} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\ldots}}} .$$

Красиво выглядит также единение бесконечного встроенного радикала и цепной дроби:

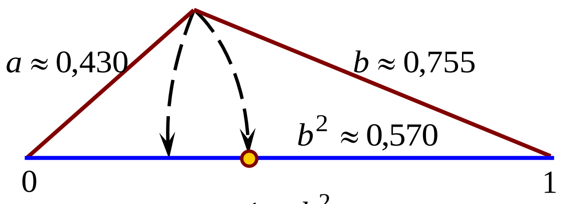
$$x^3 = x+1, \quad x^2 = 1+\frac{1}{x}, \quad \rho = \sqrt{1+\frac{1}{\rho}} = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\rho}}}} = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+\ldots}}}}} \approx 1{,}3247..$$

Примечательно, что введение в данную форму величины-*двойки* приводит к константе золотого сечения:

$$x^2 = x+1, \quad x^3 = x^2+x, \quad x^3 = 2x+1, \quad x^2 = 2+\frac{1}{x}, \quad x = \Phi = \sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{2+\frac{1}{\sqrt{2+\ldots}}}}} \approx 1{,}618.$$

С коэффициентами трином выглядит так:

$$x^3 = px+q, \quad x^2 = p+\frac{q}{x}, \quad x = \sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p+\frac{q}{\sqrt{p+\ldots}}}}}.$$



$$1 = a+b^2, \quad \frac{1}{b} = \frac{b^2}{a} = \lambda \approx 1{,}325$$

Рис. 3. Геометрическое представление триномиальной модели с запаздыванием $x^3 = x+1, \quad x = 1/b$

В определенной мере допустимо рассматривать как модификацию или расширение модели Фибоначчи с дополнительным запаздыванием на один шаг. Можно сказать, кролики перед свадьбой любили хорошо отдохнуть и набраться сил.

Геометрически триномиальная модель представима как деление целого на две пересекающиеся части: целое относится к одной части, как её квадрат – к другой (рис. 3), $a+b>1, \ a+b^2=1$.

Если в модели ЗС $a=b^2$, то здесь $a=b^3$.

В золотом сечении единица раскладывается на сумму числа и его квадрата $1=b+b^2$. Здесь единица представлена суммой квадрата и куба числа $1=b^2+b^3$.

В общем случае модель запаздывания с целочисленным коэффициентом допускает сравнение мантисс:

$$x^k = mx+1 \quad \Rightarrow \quad x^{k-1} - \frac{1}{x} = m.$$

Степень числа и обратная ему величина имеют одинаковые мантиссы.

Для каждого k имеем множество моделей в зависимости от параметра m (табл. 2).

Запись тринома с запаздыванием через параметр части целого $y^k + y^{k-1} = 1$ позволяет перейти к другому расширению посредством коэффициента $y^k + y^{k-1} = q$.

Здесь имеет место другой отличительный момент: сумма двух соседних степеней числа – целое. Подобно тому, как сумма первой и второй степени золотого сечения равна целому – единице.

Дополнительное введение коэффициентов существенно расширяет палитру триномиальных моделей с запаздыванием.

Таблица 2

Части целого $y=1/x$ для тринома с запаздыванием $x^k=mx+1$
(аналогичные мантиссы имеют степени x^{k-1})

k–1	Значения коэффициента m				
	1	2	3	4	5
1	0,618034	0,414214	0,302776	0,236068	0,192582
2	0,754878	0,618034	0,532089	0,472834	0,429174
3	0,819172	0,716673	0,649514	0,601232	0,564325
4	0,856675	0,774804	0,720050	0,679894	0,648655
5	0,881271	0,813134	0,767009	0,732785	0,705887
6	0,898654	0,840309	0,800497	0,770730	0,747178
7	0,911592	0,860582	0,825577	0,799262	0,778343
8	0,921599	0,876286	0,845059	0,821490	0,802687
9	0,929570	0,888810	0,860629	0,839292	0,822224

Модель $x^3=2x+1$, $f_n=2f_{n-2}+f_{n-3}$ с единичными начальными условиями $\delta=(\ 1\ \ 1\ \ 1\ )$ эквивалента модели $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}+(-1)^n=2F_{n-2}+(-1)^n$, а также $f_{n+1}=\lceil\Phi^n\rceil-\lceil\Phi^n/\sqrt{5}\rceil$, – A066983: 1, 1, 1, 3, 3, 7, 9, 17, 25, 43, 67, 111, 177, 289, …

Элементы ряда дают длину строки, формируемой путем последовательного замещения "модифицированной" последовательности Kolakoski-(3,1), A111091.

Используется правило: «строка начинается с 1 или 3, если предыдущая строка заканчивается соответственно 3 или 1» плюс классическая замена 3→111 и 1→3(1) так, чтобы не было подряд идущих троек:

$$1\to3\to111\to313\to1113111\to\underline{3}1\underline{3}111\underline{3}1\underline{3}\to\underline{111}3\underline{111}313\underline{111}3\underline{111}\ \dots$$

Начальные условия $\delta=(\ 0\ \ 0\ \ 1\ )$ образуют числа Фибоначчи $f_n=F_n+(-1)^n$ с отклонениями ±1 и комбинаторной формулой $f_n=\sum_{j=0}^{\lceil n/2\rceil}2^{3j-n}C_j^{\,n-2j}$, – A008346: 1, 0, 2, 1, 4, 4, 9, 12, 22, 33, 56, 88, …

Элемент ряда f_n – есть число композиций (упорядоченных разбиений) n на два вида двоек и один вид троек {2, 2', 3} (B.Selcoe, 2013), например: $f_5=4$, композициями 5 являются 2+3, 2'+3, 3+2, 3+2'.

Модель $x^3=x+2$, $f_n=f_{n-2}+2f_{n-3}$ с начальными условиями $\delta=(\ 0\ \ 0\ \ 1\ )$ адекватна сумме $f_n=\sum_{j=0}^{\lceil n/2\rceil}2^{n-2j}C_j^{\,n-2j}$, – A052947.

Модель $x^3=3x+1$, $f_n=3f_{n-2}+f_{n-3}$ с начальными условиями $\delta=(\ 0\ \ 0\ \ 1\ )$ эквивалентна суммированию $f_n=\sum_{j=0}^{\lceil n/2\rceil}3^{3j-n}C_j^{\,n-2j}$, – A052931.

Модель $x^3=x-3$, $f_n=f_{n-2}-3f_{n-3}$ с начальными условиями $\delta=(\ 0\ \ 0\ \ 1\ )$ эквивалентна суммированию $f_n=\sum_{j=0}^{\lceil n/2\rceil}(-1)^n3^{n-2j}C_j^{\,n-2j}$, – A106855.

Трином старших степеней.

Триномиально-характеристическое уравнение и эквивалентная ему разностная схема имеют вид

$$x^k = x^{k-1} + 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-k}.$$

Отдельные описания модели можно найти в целочисленной энциклопедии:

$x^3 = x^2 + 1$, A000930; $x^4 = x^3 + 1$, A003269; $x^5 = x^4 + 1$, A003520; $x^6 = x^5 + 1$, A005708 …

Элемент ряда f_n соответствует количеству композиций (упорядоченных разбиений) числа $n+k-1$ на части, которые не меньше величины k. В теории чисел разбиение числа – его представление в виде суммы положительных целых чисел, называемых частями. При этом в отличие от композиций порядок следования частей не учитывается.

Например, для модели $x^5 = x^4 + 1$ рекуррентный ряд имеет вид $f_n = f_{n-1} + f_{n-5}$: 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 15, 20, 26, 34, 45, 60, 80, 106, 140, 185, 245, 325, 431, 571, 756, 1001, 1326, 1757, 2328, 3084, 4085,… – A003520.

Для $n = 12$ имеем $f_{12} = 11$ композиций числа 16 на части, не меньшие пяти:

$$16 = 11+5 = 10+6 = 9+7 = 8+8 = 7+9 = 6+10 = 5+11 = 5+5+6 = 5+6+5 = 6+5+5.$$

Элемент ряда $f_n = f_{n-1} + f_{n-k}$ также равен количеству композиций числа n–1 на части 1 и k.

Так, для $n = 12$ имеем $f_{12} = 11$ композиций числа 11 на части 1 и 5:

(1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1),
(1 1 1 1 1 1 5), (1 1 1 1 1 5 1), (1 1 1 1 5 1 1), (1 1 1 5 1 1 1), (1 1 5 1 1 1 1), (1 5 1 1 1 1 1), (5 1 1 1 1 1 1),
(1 5 5), (5 1 5), (5 5 1).

Для единичных начальных условий $f_j = 1, \ j = \overline{1, k}$ имеет место формула

$$f_n = \sum_{j=0}^{n/k} C_{n-j(k-1)}^{\,j}.$$

Несколько первых d начальных значений могут быть нулевыми. Соответственно на эту величину сдвигается индекс элемента f_{n+d}.

Выполним суммирование:

$$+\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-k}, \\ f_{n-1} = f_{n-2} + f_{n-k-1}, \\ \ldots \\ f_{n-k+1} = f_{n-k} + f_{n-k+1}, \end{cases}$$
$$f_n = f_{n-k} + f_{n-k-1} + \ldots + f_{n-2k+1}.$$

Последняя запись похожа на модель k-боначчи, но только с k-запаздыванием.

Примеры вычислений через производящую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}140\\185\\245\\325\\431\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&1\\ 1&0&0&0&1 \end{pmatrix}^{27} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1001\\1326\\1757\\2328\\3084\end{pmatrix}$$

Для модели $x^4 = x^3 + 1$ и произвольных начальных условий $\delta = (4\ 3\ 2\ 1)^{\text{т}}$:

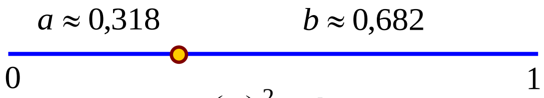
4, 3, 2, 1, 5, 8, 10, 11, 16, 24, 34, 45, 61, 85, 119, 164, 225, 310, 429, 593 …

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 45 \\ 61 \\ 85 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{15} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 164 \\ 225 \\ 310 \\ 429 \end{pmatrix}$$

Кубический вариант $x^3 = x^2 + 1$ (A000930) имеет положительный корень:

$$\lambda = \frac{2}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{29}{2}\right) + \frac{1}{3} \approx 1{,}46557.. – \text{A09252}.$$

В геометрической интерпретации триномиальная модель старших степеней представима как деление целого на две составные части $a + b = 1$: целое относится к квадрату одной части, как она – к другой (рис. 4).



$$1 = a + b, \quad \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{b}{a} = \lambda \approx 1{,}466$$

Рис. 4. Геометрическое представление триномиальной модели старших степеней $x^3 = x^2 + 1, \quad x = 1/b$

Если в модели золотого сечения $a = b^2$, то здесь $a = b^3$.

В общем случае, перейдя от переменной-отношения целого и его части $x = 1/b$ к самой части b, получаем тождественные преобразования

$$b^{k+1} + b = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{b}\right)^k = \frac{b}{1-b}.$$

Возможная интерпретация пропорции определяется так:

часть так относится к своему отклонению,
как квадрат (гиперкуб) на целом – к квадрату-гиперкубу на этой части.

Введение дополнительного целочисленного коэффициента p

$$x^{k+1} = px^k + 1 \quad \Rightarrow \quad x - x^{-k} = p$$

позволяет делать сравнение: число и k-я степень обратного числа имеют равные мантиссы.

Или в другой записи с целочисленным коэффициентом q

$$x^{k+1} = x^k + q \quad \Rightarrow \quad x^{k+1} - x^k = q,$$

где две "соседние" степени числа имеют равные мантиссы.

В зависимости от значений коэффициентов p, q получаем два бесконечных множества чисел x, удовлетворяющих разным вариациям в сравнении мантисс.

Модель *k*-боначчи.

Модель k-боначчи является наиболее естественным продолжением двучленно-суммирующей структуры Фибоначчи в контексте добавления аддитивных элементов полинома

$$x^k = x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + x + 1, \qquad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \ldots + f_{n-k}.$$

Умножим исходный полином на величину x и выполним вычитание, в результате получаем <u>трином старших степеней</u>

$$x^{k+1} = 2x^k - 1.$$

После деления на x^k модель приобретает вид $x^k + x^{-k} = 2$.

Например, для уравнения тетраначчи $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$ имеем аналог $x^5 = 2x^4 - 1$.

При этом начальные условия $(\delta_0 \ \ \delta_1 \dots \delta_k)$ модели *k*-боначчи заменяются в триноме на $(\delta_0 \ \ \delta_1 \dots \delta_k \ \ \Sigma\delta_j)$, то есть с добавлением элемента, равного сумме исходных чисел (рис. 5).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 408 \\ 787 \\ 1518 \\ 2925 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 408 \\ 787 \\ 1518 \\ 2925 \\ 5638 \end{pmatrix}$$

Рис. 5. Пример адекватной замены модели тетраначчи
триномом старших степеней для произвольных начальных условий

Представляет интерес распространенный случай начальных условий $\delta = (\ 0 \ \ 0 \dots 0 \ \ 1\ )$.

Элемент такого ряда f_n – количество композиций числа $n - k + 1$ на части, не превышающие *k*.

Например, $k = 4$: 0, 0, 0, 1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, 208, …

$$1{+}1{+}1{+}1 = 2{+}1{+}1 = 1{+}2{+}1 = 3{+}1 = 1{+}1{+}2 = 2{+}2 = 1{+}3 = 4 \Rightarrow f_7 = 8.$$

В другой интерпретации f_{n+k} – количество 0-1-последовательностей длиной *n*, которые не содержат кортеж из k единиц $1\dots1$.

Для модели *k*-боначчи, $k' = k + 1$ с начальными условиями $\delta = (\ 0 \ \ 0 \dots 0 \ \ 1\ )$ справедлива комбинаторная формула

$$f_{n+k} = \sum_{j=0}^{\lceil n/k' \rceil} (-1)^j C_{n-kj}^{\,j} 2^{n-k'j} - \sum_{j=0}^{\lceil n/k' \rceil} (-1)^j C_{n-1-kj}^{\,j} 2^{n-1-k'j}$$

согласно решениям Р.Чоулета (2010) в энциклопедии целочисленных последовательностей (OEIS) A000073, A000078, A001591, A001592 и др.

Любопытна интерпретация начальных условий $\delta = (\ 0 \dots 0 \ \ 1 \ \ 0\ )$: каждый последующий член ряда f_n определяет количество композиций числа n с использованием целых чисел, которые не кратны *k*.

Например, для последовательности трибоначчи A001590: (0, 1, 0), 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, 68, 125, 230, … имеем $4 = 1{+}1{+}1{+}1 = 2{+}1{+}1 = 1{+}2{+}1 = 1{+}1{+}2 = 2{+}2$, $f_4 = 6$.

Аналогично для модели 4-боначчии – A001631.

Модель трибоначчи с начальными условиями $\delta = (0 \ \ 0 \ \ 2)$ дает f_n – число способов бросить монетку n раз, но не получить одинаковую четырехвариантную серию, A135491.

Золотоносные триномы.

1. В уравнении золотого сечения $x^2 = x + 1$ произведем ряд последовательных умножений на x и выполним несложные замены x^2. В итоге получаем трехчленное уравнение высокой степени k с коэффициентами – числами Фибоначчи:

$$
\begin{aligned}
x^2 &= x+1,\\
x^3 &= x^2+x = \quad 2x+1,\\
x^4 &= 2x^2+x = 3x+2,\\
x^6 &= 5x^2+3x = 8x+5, \ldots\\
x^k &= F_k x + F_{k-1}.
\end{aligned}
$$

Действительно, убедившись в правильности последнего соотношения для некоторых $k \geq 2,$ по индукции устанавливаем его справедливость и при $k+1$:

$$x^{k+1} = F_k x^2 + F_{k-1}x = F_k(x+1) + F_{k-1}x = (F_k + F_{k-1})x + F_k = F_{k+1}x + F_k\,.$$

По сути это модель запаздывания с коэффициентами – числами Фибоначчи.

Эквивалентная рекурсия $f_n = F_{k+1} f_{n-k+1} + F_k f_{n-k}$ имеет аттрактор (предельное отношение соседних членов), равный положительному действительному корню тринома – константе золотого сечения Φ.

Аналогично можно показать "золотоносность" модели $x^k = F_k x^2 - F_{k-2}$.

Для этого уравнение $x^{k-2} = F_{k-2}x + F_{k-3}$ умножим на x^2 и преобразуем:

$$x^k = F_{k-2}x^3 + F_{k-3}x^2 = F_{k-2}\left(2x^2-1\right) + F_{k-3}x^2 = (2F_{k-2}+F_{k-3})x^2 - F_{k-2} = F_{k-2}x^2 - F_{k-2}\,.$$

Допустим симбиоз бесконечного встроенного радикала и цепной дроби:

$$x^{k+1} = F_{k+1}x + F_k \quad \to \quad x^k = F_{k+1} + \frac{F_k}{x} \quad \to \quad x = \Phi = \sqrt[k]{F_{k+1} + \cfrac{F_k}{\sqrt[k]{F_{k+1} + \cfrac{F_k}{\sqrt[k]{F_{k+1}+\ldots}}}}} \approx 1{,}618\,.$$

Числа Фибоначчи допустимо рассматривать и для отрицательных значений индекса, как двусторонне-бесконечный ряд, удовлетворяющий тому же рекуррентному соотношению.

При этом члены с отрицательными индексами легко получить путем обратного вычисления "назад" или $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$.

$$
\begin{aligned}
x^k &= F_k x + F_{k-1} \quad \to \quad -\phi,\ \Phi\,;\\
x^{-k} &= F_k x \pm F_{k+1} \quad \to \quad \begin{cases} -\Phi,\ \phi\,;\\ -\phi,\ \Phi\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Например,

$$
\begin{aligned}
x^{-5} &= 5x+8 \quad \to \quad -\Phi,\ \phi\ ;\\
x^{-5} &= 5x-8 \quad \to \quad -\phi,\ \Phi\ ;\\
x^{6} &= 8x+5 \quad \to \quad -\phi,\ \Phi\ .
\end{aligned}
$$

2. В своё время Эйзенштейн предложил [7] и Лорд [8] решил (1985) элегантную проблему эффективного представления *n*-й степени константы золотого сечения в виде непрерывной цепи, содержащей числа Люка L_n:

$$\Phi^n = L_n - \frac{(-1)^n}{L_n -}\ \frac{(-1)^n}{L_n -}\ \ldots$$

как решение квадратного уравнения для степени числа Φ

$$x^2 - L_n x + (-1)^n = 0 \quad \rightarrow \quad x = L_n + \frac{(-1)^n}{x} \quad \rightarrow \quad x = \Phi^n = L_n - \cfrac{(-1)^n}{L_n - \cfrac{(-1)^n}{L_n - \ldots}} \approx 1{,}618^n .$$

К этой форме можно легко прийти [4], если вспомнить красивую аналитическую формулу Бернулли–Бине для чисел Люка $L_n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n}$ и теорему Виета о сумме и произведении корней квадратного уравнения.

Допустимо также ввести дополнительный коэффициент пропорциональности p. – Кстати, не обязательно положительный.

Задавшись, например, парой корней $\lambda_{1,2} = p\{\Phi^n,\ (-\Phi)^{-n}\}$, приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$\boxed{x^2 - pL_n x + (-1)^n p^2 = 0},$$

где L_n – числа Люка (n = 0, 1, 2 ...): 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 ... – двучленно-аддитивная последовательность Фибоначчи $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ с начальными условиями (L_0, L_1) = (2, 1).

Итак, получаем бесконечное множество квадратных уравнений общего вида, дающих не только степени золотой константы $\Phi^{\pm n}$, но также их пропорциональное изменение, включая обычное масштабирование (усиление – ослабление), за счёт параметра p.

Отсюда становится понятным происхождение в уравнении квадрата p^2, – в результате произведения корней, имеющих один и тот же коэффициент пропорциональности.

Если p – целое число, то квадратное уравнение имеет целочисленные коэффициенты.

Полученное соотношение вполне подходит под категорию обобщённого квадратичного уравнения (модели) золотого сечения <второго порядка>.

Именно уравнения! Никакого обобщения самого ЗС здесь, конечно, нет и в помине.

При желании степени образуемых корней $\Phi^{\pm n}$ можно назвать «семейством степеней золотой константы».

Это по-настоящему *обобщенная модель золотого сечения*. Она имеет множество вариаций. Но все они – суть золотой константы Φ.

Терминологически ничего не нарушено. Никаких своеволий и абстракционизма.

Числа Люка можно также определить для отрицательных индексов по формуле

$$L_{-n} = (-1)^n L_n: \quad \ldots\ 18, -11, 7, -4, 3, -1, 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18\ \ldots$$

В общем случае с учетом знака при коэффициенте имеем две пары корней

$$x^2 \pm L_n x + (-1)^n = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -\Phi^n, & (-1)^{n+1}\phi^n, \\ (-1)^n \phi^n, & \Phi^n \end{cases}, \qquad \phi = \Phi^{-1} \approx 0{,}618 .$$

Приведем примеры решений с наибольшими корнями (с учетом знака):

$x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \Phi^2 \approx 2{,}618;$ $\qquad x^2 - 4x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \Phi^3 \approx 4{,}235;$

$x^2 - 7x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \Phi^4 \approx 6{,}854;$ $\qquad x^2 - 11x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \Phi^5 \approx 11{,}090;$

$x^2 + 7x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\phi^4 \approx -0{,}146;$ $\qquad x^2 + 11x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \phi^5 \approx 0{,}090.$

Рассмотренная форма квадратного уравнения с числами Люка позже была обобщена [9] для последовательности $w(a_1, a_2; p, q)$ согласно квадратному уравнению общего вида и произвольным начальным условиям (a_1, a_2).

3. Рассмотренные золотоносные модели-триномы являются частными случаями более общей триномиальной структуры с целыми коэффициентами, которые равны отношениям чисел Фибоначчи:

$$\boxed{x^k - \frac{F_{kn}}{F_n}x + (-1)^n \frac{F_{(k-1)n}}{F_n} = 0},$$

$$n = 1: \quad x^k - F_k x - F_{k-1} = 0, \quad x = \Phi,$$

$$k = 2: \quad x^2 - L_n x + (-1)^n = 0, \quad x = \Phi^n,$$

с учетом начального значения $F_1 = 1$ и формулы удвоения $F_{2n} = F_n L_n$.

Величины $\dfrac{F_{kn}}{F_n}$, $\dfrac{F_{(k-1)n}}{F_n}$ – целые (табл. 3).

Таблица 3

Алгебраические триномы – носители золотой константы

n		Степень тринома k				
		2	3	4	5	6
1	Φ	$x^2–x–1$	$x^3–2x–1$	$x^4–3x–2$	$x^5–5x–3$	$x^6–8x–5$
2	Φ^2	$x^2–3x+1$	$x^3–8x+3$	$x^4–21x+8$	$x^5–55x+21$	$x^6–144x+55$
3	Φ^3	$x^2–4x–1$	$x^3–17x–4$	$x^4–72x–17$	$x^5–305x–72$	$x^6–1292x–305$
4	Φ^4	$x^2–7x+1$	$x^3–48x+7$	$x^4–329x+48$	$x^5–2255x+329$	$x^6–15456x+2255$
5	Φ^5	$x^2–11x–1$	$x^3–122x–11$	$x^4–1353x–122$	$x^5–15005x–1353$	$x^6–166408x–15005$
6	Φ^6	$x^2–18x+1$	$x^3–323x+18$	$x^4–5796x+323$	$x^5–104005x+5796$	$x^6–1866294x+104005$

В частности, справедливы следующие соотношения:

$F_{2n}/F_n = L_n$ – числа Люка, A000032;

$F_{3n}/F_n = a_n = L_{2n} + (-1)^n = 5F_n^2 + 3(-1)^n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} - a_{n-3}$, A047946;

$F_{4n}/F_n = a_n = L_n L_{2n} = L_{3n} + (-1)^n L_n = 3a_{n-1} + 6a_{n-2} - 3a_{n-3} - a_{n-4}$, A083564;

$F_{5n}/F_n = L_n L_{3n} + 1 = L_{4n} + (-1)^n L_{2n} + 1 = 25\left[F_n^4 + (-1)^n F_n^2\right] + 5$, A103326;

$F_{6n}/F_n = L_n L_{4n} + L_n = L_{5n} + (-1)^n L_{3n} + L_n$;

$F_{7n}/F_n = L_n L_{5n} + L_{2n} + (-1)^n = L_{6n} + (-1)^n L_{4n} + L_{2n} + (-1)^n$;

$F_{8n}/F_n = L_n L_{6n} + L_{3n} + (-1)^n L_n = L_{7n} + (-1)^n L_{5n} + L_{3n} + (-1)^n L_n$.

Квадратное уравнение общего вида $x^2 = px + q$ в его взаимосвязи с золотым сечением достаточно подробно исследовано в работах [10–13].

Представляют интерес дополнительные наблюдения.

а) Золотая пропорция определяется отношением частей аддитивного целого:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{или} \quad \frac{b}{a} - \frac{a}{b} = 1.$$

Без потери общности можно принять целое равным единице: $a + b = 1$.

Зададим теперь произвольное целое $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} = m$.

Равенство, по сути, означает равенство мантисс у двух численных отношений.

При этом произведение отношений тождественно равно 1. Равно как и сумма чисел – числителя и знаменателя.

Кроме того, m-кратное произведение частей целого равно их разности $mab = b - a$.

В итоге перед нами достойный триномиальный продолжатель золотоносной схемы.

Пропорция сводится к квадратному уравнению с его положительным решением:

$$b^2 + \frac{2-m}{m} b - \frac{1}{m} = 0 \;, \qquad b = \frac{1}{2} - \frac{1}{m} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{m^2}}\,.$$

Наиболее интересные частные случаи:

$m = 1$: $b = \Phi^{-1} \approx 0{,}618$ – золотое сечение;

$m = 2$: $b = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$ – модель «корня квадратного из двух»;

$m = 4$: $b = \Phi/2 \approx 0{,}809$ – подобие правила Парето с его отношением $80/20$.

Перманентное продолжение свойств ЗС в новой конструкции произошло за счет потери целых значений коэффициентов. Ну и что? – Целочисленные коэффициенты – это не догма.

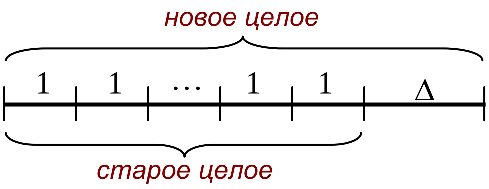
б) Рассмотрим квадратное уравнение общего вида относительно части целого b

$$b^2 + pb - q = 0 \;\text{ или }\; p = q/b - b,$$

то есть число b и увеличенное в q раз его обратное значение имеют равные мантиссы.

Квадратное уравнение общего вида можно представить также в виде модели пропорционального роста с заранее неизвестным приращением Δ:

$$\frac{p+\Delta}{1} = \frac{q}{\Delta}.$$



Представим условно в качестве единицы одну часть или долю целого.

Тогда приходим к такой интерпретации: новое целое, состоящее из p равных частей и приращения, так относится к одной части 1, как q таких частей – к приращению.

Распространена модель $x^2 = 2x + 1$, $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2}$, $\delta = (0\;\;1)$ как числа Пелли, A000129: 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, … (mathworld.wolfram.com/PellNumber.html) стремящиеся к аттрактору (отношению элементов ряда) – корню уравнения $\lambda = 1 + \sqrt{2}$.

f_n – такое число, что $2n^2 \pm 1$ является квадратом: $2 \cdot 5^2 - 1 = 7^2$, $2 \cdot 12^2 + 1 = 17^2$ …;

– количество путей-маршрутов из начала координат (0, 0) до прямой $x = n - 1$ в виде последовательных шагов $u = (1, 1)$, $d = (1, -1)$, $h = (2, 0)$ вдоль координатной сетки; например $f_3 = 5$, считая пути *h, ud, uu, du* и *dd* (E.Deutsch, 2002);

– число композиций (упорядоченных разбиений) $n-1$ на единицы двух сортов (цветов) и обычные двойки {1, 1', 2} (B.Selcoe, 2013), например: $f_3=5$, композициями числа 3–1=2 являются 1+1, 1+1', 1'+1, 1'+1' и 2.

Либо иные начальные условия для модели $x^2=2x+1$:

$\delta=(1\ \ 4)$, A048654; $\delta=(2\ \ 2)$, A002203, $f_n=2f_{n-1}+f_{n-2}=\lambda^n+(-\lambda)^{-n}$ – подобие аналитической формы для чисел Люка в модели золотого сечения;

Другой трином $x^2=x+2$, $\delta=(0\ \ 1)$ известен как последовательность Якобстала [14] с огромным количеством интерпретаций и формульных соотношений, в том числе (A001045):

$$f_n=f_{n-1}+2f_{n-2}\ =\ 2^{n-1}-f_{n-1}\ =\ 2f_{n-1}-(-1)^n\ =\ \frac{2^n-(-1)^n}{3}\cong\frac{2^n}{3};$$

– количество путей-вариантов укладки прямоугольника 3×(n–1) квадратами 1×1 и 2×2;
– количество путей замощения прямоугольника 2×(n–1) квадратами 2×2 и домино 1×2;
– число способов завязать галстук, используя $n+2$ поворота;
– число слов длины $n+1$ из двух букв s и t, принимаемых за единицу 1, используя соотношения $sss=1$, $tt=1$ и $stst=1$;
– количество композиций числа n, заканчивающихся нечетными частями. Например, $f_4=5$, поскольку четверка представляется как 1+1+1+1=2+1+1=1+2+1=3+1=1+3 с окончанием в виде нечетных частей 1 и 3…

Рекуррентный ряд стремится к своему аттрактору – корню уравнения $x^2=x+2$

$$\lambda\ =\ \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}\ =\ 1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\ldots}}\ =\ 2.$$

Достойный преемник (mathworld.wolfram.com/JacobsthalNumber.html) модели золотого сечения.
В то же время совершенно самостоятельный продолжатель. По-своему уникальный объект, не имеющий и намеков на золотоносные гены.
Чего стоит только целый корень 2 в отличие от иррационального числа Φ.

В целом модель $x^2=x+q$, $\delta=(0\ \ 1)$ с произвольным свободным членом q, включая комплексные числа, обладает признаками периодичности в форме представления через косинус-функцию:

$$f_{n+1}=\prod_{j=1}^{\lceil n/2\rceil}\left(1+4q\cdot\cos^2\frac{j\pi}{n+1}\right).$$

Модели $x^2=x+q$, $\delta=(1\ \ 1)$ присуща любопытная цветная особенность, в том числе с возможным желтым оттенком среди прочих.

Композиции n, в которых каждое натуральное число окрашено одним из c различных цветов, называются c-цветными композициями числа n.

При $n\geq 2$ величина $(q+1)f_{n-2}$ равна числу $(q+1)$-цветных композиций n со всеми частями ≥ 2 такими, что никакие соседние части не имеют одинаковый цвет (M.Janjic, 2011).

Кроме того, элементы ряда f_n определяют количество строк длиной n с буквами {0, 1, … q}, в которых нет двух последовательных ненулевых букв (J.Arndt, 2011).
$q=3$ – A006130, $q=4$ – A006131, $q=5$ – A015440 и др.

Фетишизация золотоносной тематики. В золотоносной среду неуклонно внедрялось суждение о необычном ритме и гармонии производящей матрицы (рис. 2) и её n-й степени для частного случая тринома $x^k=x^{k-1}+1$ с единичными коэффициентами [15].

Причем результат голословно представлялся таковым, будто «имеет фундаментальное значение (?) … в различных областях математики, физики и других науках».

На поверку производящая матрица *A* одинаково хорошо работает практически для любого алгебраического уравнения общего вида. Более того, в эквивалентной форме разностного (возвратного) уравнения-аналога матрица позволяет вычислять кортеж элементов числового ряда (1) для произвольных начальных условий.

Заметим, что вертикальное расположение коэффициентов, принятое в работе [15], требует адекватной перезаписи уравнения (1) с обратной перестановкой элементов векторов.

Например, для модели $x^4 = x^3 + 1$ и начальных условий $\delta = (4\ 3\ 2\ 1)^{\mathrm{T}}$:

(4, 3, 2, 1), 5, 8, 10, 11, 16, 24, <u>34</u>, <u>45</u>, <u>61</u>, <u>85</u>, 119, 164, 225, 310, 429, 593 …

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 45 \\ 61 \\ 85 \end{pmatrix} \qquad (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{10} = (85\ \ 61\ \ 45\ \ 34)$$

Как бы там ни было, но среди множества иных моделей никакого особого ритма или неповторимой гармонии в отдельно взятом триноме старших степеней не наблюдается.

Всё это больше из серии "научной балды", как «непомерной и сознательной гиперболизации несущественных научных результатов» [16].

В этом смысле гармоническая визуализация модели (1) и результатов её использования в равной мере воспринимаются вполне эстетично для всех полиномов.

Что касается терминологических вольностей типа «*p*-золотых сечений» для тринома старших степеней в его записи $x^{p+1} = x^p + 1$, то они даже не подпадают под научную стерилизацию ЗС [17], как процесса освобождения теоретических положений золотой пропорции от всякого рода домыслов и фальсификаций. Опять же по причине того, что алогично и бессмысленно называть решения всевозможных алгебраических уравнений обобщенными или иными золотыми сечениями во множественном числе.

Тем более что к ним даже не применимо наименование "квазиЗС" – модель, в основе которой лежит вполне конкретное число, близкое к золотой пропорции.

Короче говоря, надуманная фетишизация золотоносной тематики.

Подобно тому, как искать черную кошку в темной комнате, особенно если её там нет …

Литература:

1. Василенко С.Л. Незадачливые *p*-сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – artmatlab.ru/articles.php?id=50&sm=2.
2. Аракелян Г. О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011. – trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322065.htm.
3. Василенко С.Л. Позолоченные балахоны // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17121, 19.12.2011. – trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322093.htm.
4. Василенко С.Л. Реструктуризация золотого сечения: от частного к общему // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17556, 03.07.2012. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161975.htm.
5. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.
6. The On-Line Encyclopedia of Integer equences (OEIS). – http://oeis.org/.
7. Eisenstein M. B-530, 531. Problems Proposed // The Fibonacci Quarterly, **22.3** (1984), 274.
8. Lord G. B-530, 531. Problems Solved // The Fibonacci Quarterly, **23.3** (1985), 280–281.

9. Shannon A.G., Horadam A.F. Generalized Fibonacci Continued Fractions // The Fibonacci Quarterly, **26.3** (1988), 219–223.

10. Василенко С.Л. Аналитика "золотых" пропорций // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

11. Василенко С.Л. Квадратичные закономерности // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15664, 21.11.2009. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161579.htm.

12. Василенко С.Л. Новый взгляд на геометрию взаимосвязи золотой пропорции с квадратным уравнением общего вида // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16046, 18.08.2010. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161690.htm.

13. Василенко С.Л. Эквивалентные формы квадратичных последовательностей // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17134, 21.12.2011. – trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322097.htm.

14. Koken F., Bozkurt D. On the Jacobsthal numbers by matrix method // Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 3, 2008, no. 13, 605–614.

15. Стахов А.П. Под знаком «Золотого Сечения»: Исповедь сына студбатовца. Глава 7. Математика Гармонии. 7.9. Новый класс матриц Фибоначчи // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.18856, 29.04.2014. – trinitas.ru/rus/doc/0232/100a/02320073.htm.

16. Василенко С.Л. Научная балда // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 04.09.2011. – sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11333.html // Математич. и историч. исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2011. – artmatlab.ru/articles.php?id=48&sm=2.

17. Василенко С.Л. Квазизолотая пропорция в структурированных системах // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16054, 30.08.2010. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161694.htm.

Харьков, Украина

Авторские страницы:
http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm