С.Л. Василенко

Золотоносный феномен в композиции натуральных чисел

Показано, что количество композиций или упорядоченных разбиений натуральных чисел на нечетные части и одно последующее четное слагаемое $\{1, 3, 5, \ldots, 2m-1, 2m\}$ имеет аттрактор-асимптоту, как предельное отношение соседних элементов числовой последовательности, в виде константы золотого сечения $\Phi \approx 1{,}618$. Первый последовательный ряд $m=1$ воссоздают композиции, которые составлены из нечетной единицы, дополненной двойкой $\{1, 2\}$, и образуют числа Фибоначчи. Примечательно, что бесконечно удаленная величина m также приводит к числам Фибоначчи, как количеству композиций натуральных чисел из нечетных частей-слагаемых. Всё это наводит на определенные размышления в части гипотетической химической эволюции по схеме разделения-взаимодействия "чёт-нечет" и развития живого вещества путем деления клеток пополам.

Композиция – предтеча
разбиению

Введение

Композиция (лат. *compositio*) – составление, соединение, сочетание различных частей в единое целое в соответствии с какой-либо идеей.

Например, золотое сечение в геометрии – типичная композиция отрезка из двух неравных составных частей согласно замыслу пропорционального соотнесения целого и его частей. В общем случае допустимы любые единицы измерения. Но независимо от исходных величин в материальных или математических объектах (метрических расстояний, временных интервалов, весовых долей и т.п.), речь идет всегда о трех объектах $c = a + b$ и отношениях между ними.

Композиционное начало, подобно стволу дерева, органически связывает корни и ветви синтезируемой формы, соподчиняя составные элементы друг другу и целому. Устанавливает отношения между частями. Связывает их в единое целое, обобщает.

Так, художники веками искали наиболее выразительные композиционные схемы.

В итоге наиболее важные по сюжету элементы изображения размещались осмысленно и не хаотично. Чаще всего они объединяются в простые геометрические фигуры: треугольник, квадрат, прямоугольник, пирамиду, круг и т.п.

Основные правила и средства композиции основаны на использовании определенных пропорций, в том числе золотой, принципов симметрии и асимметрии, равновесия и взаимопроникновения частей.

Аналогично в архитектуре композиция выражает способ организации архитектурных элементов с целью достижения общего единства и гармоничности.

Числовые композиции

В теории чисел *композицией* или разложением натурального числа n называют его представление в виде упорядоченной суммы натуральных слагаемых. Последние называются *частями*, а их количество – *длиной* композиции.

В отличие от композиции, разбиение числа не учитывает порядок суммирования. Поэтому количество разбиений числа всегда (кроме чисел 1 и 2) меньше числа композиций.

То есть композиция – это упорядоченное разбиение или разбиение с учетом порядка расстановки слагаемых.

Для числа n количество композиций с k частями (слагаемыми) равно числу сочетаний из $n-1$ по $k-1$.

Общее количество композиций равно 2^{n-1} как сумма всех сочетаний для $k = 1, 2, \ldots n$.

А если ограничить множество частей-слагаемых?

Например, множество композиций целых чисел из единиц и двоек в точности соответствуют числам Фибоначчи [1].

Важные закономерности

Разнообразие числовых композиций натуральных чисел тесно связано со свойствами алгебраических полиномов.

Поэтому есть смысл проанализировать их несколько подробнее.

$$\begin{array}{|c|cccc|}
\hline
0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
a_k & a_{k-1} & \dots & \dots & a_1 \\
\hline
\end{array}$$

Рис. 1. Структура производящей матрицы A

1. Рассмотрим алгебраическое уравнение общего вида – прообраз разнообразных рекуррентных последовательностей.

Элементы числовых рядов можно определять с использованием производящей матрицы A [2].

Структурно она включает (рис. 1) единичную матрицу размером $k \times k$, которая слева дополнена нулевым столбцом, а снизу строкой, состоящей из коэффициентов a_i характеристического алгебраического уравнения

$$x^k = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \ldots + a_k . \tag{1}$$

Или в его эквивалентной форме линейного однородного разностного (возвратного) уравнения-аналога [3]

$$f_n = a_1 f_{n-1} + a_2 f_{n-2} + \ldots + a_k f_{n-k} \tag{2}$$

Данная схема позволяет генерировать рекуррентные последовательности – линейные рекурсии с постоянными коэффициентами и дискретным "временем" n.

В общем случае для вектора произвольных начальных условий $\delta = \left(f_1 \dots f_k \right)^{\mathrm{T}}$ как первых членов рекурсии, которые одновременно не равны нулю, имеет место простое матричное соотношение для вычисления кортежа элементов числового ряда

$$A^n \delta = \left(f_n \quad f_{n+1} \quad \dots \quad f_{n+k} \right)^{\mathrm{T}}, \tag{3}$$

где T – символ транспонирования матрицы или вектора.

Например, для модели k-боначчи $x^k = x^{k-1} + x^{k-2} + \ldots + 1$ все величины $a_j = 1$, для тринома старших степеней $x^k = a_1 x^{k-1} + a_k$ – от нуля отличны только два коэффициента a_1, a_k; для тринома с запаздыванием $x^k = a_{k-1} x + a_k$ – пара коэффициентов a_{k-1}, a_k.

2. При заданных k начальных условиях (затравочных числах) $\delta = \left(f_1 \dots f_k \right)$ уравнение (2) определяет *линейную рекуррентную* (*возвратную*) *последовательность*: каждый её элемент f_n вычисляется через k предшествующих.

Конкретные реализации рекуррентных последовательностей в немалой степени обусловлены начальными условиями.

Но есть одно замечательное свойство, которое от них не зависит.

Согласно теореме Бернулли [4, 5] отношение двух соседних членов возвратной последовательности стремится к максимальному по модулю корню-аттрактору λ характеристического алгебраического уравнения (1), – практически для любого набора начальных условий: $\lim\limits_{n \to \infty} f_{n+1} / f_n = \lambda$.

Так, числа Фибоначчи в пределе имеют асимптотический аттрактор, равный константе золотого сечения $\Phi \approx 1{,}618$.

А теперь об одном свойстве, которое напрямую зависит от начальных условий.

В частности, представляет интерес один распространенный вариант $\delta = (\ 0 \ldots 0\ \ 1\ )$, когда все элементы равны нулю, кроме последнего.

Ограничимся случаем равенства коэффициентов нулю или единице $a_j = \{0, 1\},\ \ j = \overline{1, k}$.

Рекуррентная последовательность $f_n = f_{n-\Delta_1} + f_{n-\Delta_2} + \ldots + f_{n-\Delta_k}$ с начальными условиями $\delta = (\ 0 \ldots 0\ \ 1\ )$ и точкой отсчета (n = 0) от первой единицы определяет количество композиций – упорядоченных разбиений натурального числа n на части $\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_k\}$.

Другими словами, f_n – число способов наклейки марок в один ряд на конверте с помощью номиналов $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_k\}$ так, чтобы в итоге составить сумму n.

Например, модель $x^6 = x^5 + x^4 + x + 1$ и $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-5} + f_{n-6}$ с начальными условиями $\delta = (\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ )$ устанавливает количество разбиений натуральных чисел на части $\Delta = \{1, 2, 5, 6\}$ – согласно нижним индексам:

(0, 0, 0, 0, 0), 1, 1, 2, 3, 5, 9, 16, 28, 49, 85, 148, 258, 450, 785, 1369, 2387…

Так, $f_5 = 9$, поскольку для заданных слагаемых можно составить ровно девять композиций пятерки: 5, 11111, 1112, 1121, 1211, 2111, 122, 212, 221.

Кроме того имеет место альтернативная интерпретация модели [6], как количество сильно ограниченных перестановок Лемера, удовлетворяющих условиям для произвольных натуральных чисел s, r:

$$-s \le p(i) - i \le r, \quad p(i) - i \notin I, \quad i = \overline{1, n},$$

где p – перестановка множества $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$; I – некоторое исключаемое подмножество.

Для нашего примера: $s = 1,\ r = 5,\ I = \{2, 3\}$ – [7, *A079960*].

Или другие варианты:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} + f_{n-6}, \ \ \Delta = \{1, 2, 3, 6\},\ \ s = 1,\ r = 5,\ I = \{3, 4\} \text{ – [7, } A079958\text{];}$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-4} + f_{n-6}, \ \ \Delta = \{1, 2, 4, 6\},\ \ s = 1,\ r = 5,\ I = \{2, 4\} \text{ – [7, } A079959\text{].}$$

На наш взгляд, композиционное представление всё-таки более наглядно и основательно укрепилось в математических исследованиях.

Понятно, чем меньше номиналы частей и шире их ассортимент, тем больше способов в формировании композиций.

По мере расширения возможностей составления целого из частей значение предельного аттрактора числовых последовательностей увеличивается (табл. 1).

Одновременно возрастает количество вариантов композиций.

3. Наконец, наступил черед собственной золотой модели.

Как уникальная константа, соответствующая особому частному случаю математической пропорции, золотое сечение не обобщается в принципе [8].

Это не означает, что механизм её образования и проявления как константы также единственен.

Вполне допустимо выходить за пределы стандартного "золотоносного" квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$ на другие модели, которые своими решениями способны по-прежнему воспроизводить золотое сечение.

Таблица 1

**Варианты расширения модели Фибоначчи
с привлечением третьего элемента в аддитивной рекурсии**

Модели	Части	Аттрактор	Кол-во композиций $n = 10$
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3}$	1, 2, 3	1,839	274
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$	1, 2	1,618	89
$f_n = f_{n-1} + f_{n-3}$	1, 3	1,466	28
$f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$	2, 3	1,325	7

Двигаясь по такому пути, в работе [9] введено *обобщенное уравнение* (алгебраическое с произвольной целочисленной степенью) *золотой пропорции*, которое имеет вид:

$$y(x, m) = x^{2m} - \sum_{j=1}^{m} x^{2j-1} - 1 = 0. \qquad (4)$$

или в развернутой записи, $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$x^{2m} = x^{2m-1} + x^{2m-3} + \ldots + x + 1.$$

Данная модель получается достаточно просто, путем многократного умножения на величину x^2 исходного квадратного "золотоносного" уравнения и повторных подстановок:

$$x^2 = x + 1;$$
$$x^4 = x^3 + x^2 = x^3 + x + 1;$$
$$x^6 = x^5 + x^3 + x^2 = x^5 + x^3 + x + 1;$$
$$x^8 = x^7 + x^5 + x^3 + x^2 = x^7 + x^5 + x^3 + x + 1.$$

Обобщенное уравнение (4) золотого сечения порождает бесчисленное множество аддитивно-рекуррентных последовательностей в виде *возвратного уравнения суммирующей v-рекурсии*, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$v_n = \sum_{j=1}^{m} v_{n+1-2j} + v_{n-2m}, \qquad (5)$$

или в развернутом представлении

$$v_n = (v_{n-1} + v_{n-3} + \ldots + v_{n+1-2m}) + v_{n-2m}.$$

К главным особенностям модели и отличиям от известных уравнений или их модификаций можно отнести целый ряд несомненных достоинств [8]:

– наличие пары действительных корней $(-\phi, \Phi)$ "золотого" сечения (ЗС) для любого порядка обобщенного уравнения, $\phi = \Phi^{-1}$;
– сохранение фундаментального признака ЗС – единства аддитивных и мультипликативных свойств;
– возможность простого оперирования со сколь угодно большой степенью уравнения;
– равенство единице всех коэффициентов характеристического многочлена;

– получение аналитического решения в общем виде, основанного на знании всех корней в виде простых формул;
– порождение уравнением бесчисленного множества аддитивно-рекуррентных последовательностей в виде целочисленной *суммирующей v-рекурсии*, которые при любом сколь угодно большом количестве произвольных начальных условий, не равных одновременно нулю, всегда асимптотически сходятся к числу Φ.

Воплощение замысла

Анализируя изложенный материал, мы приходим к следующим закономерностям.

Рекуррентная последовательность *суммирующей v-рекурсии* (5) с начальными условиями $\delta = (\ 0 \ldots 0\ \ 1\ )$ определяет количество композиций – упорядоченных разбиений натурального числа n на части $\Delta = \{1, 3, 5, \ldots, 2m-1, 2m\ \}$.

То есть множество последовательных нечетных чисел и следующим за ними одним четным числом.

Точкой отсчета $n = 0$ для исчисления количества композиций считается первая единица в числовой последовательности.

Например, в модели

<u>*m* =2</u>: $x^4 = x^3 + x^1 + 1, \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-3} + v_{n-4}$

последовательность v_n выражает количество композиций натурального числа n на составные части Δ = {1, 3, 4}, *A006498*:

(0, 0, 0), 1, 1, 1, 2, 4, 6, 9, <u>15</u>, 25, 40, 64, 104, 169, 273, 441, 714, 1156, 1870, 3025, 4895, 7921…

Так, $f_7 = 15$, композиции семерки 1111111, 11113, 11131, 11311, 13111, 31111, 133, 313, 331, 1114, 1141, 1411, 4111, 34, 43.

Другие случаи:

<u>*m* = 3</u>: $x^6 = x^5 + x^3 + x^1 + 1, \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-3} + v_{n-5} + v_{n-6}$,

последовательность v_n выражает количество композиций натурального числа n на составные части Δ = {1, 3, 5, 6}, *A079962*:

(0, 0, 0, 0, 0), 1, 1, 1, 2, 3, 5, <u>9</u>, 14, 22, 36, 58, 94, 153, 247, 399, 646, 1045, 1691, 2737, 4428 …

Так, $f_6 = 9$, композиции шестерки: 6, 111111, 1113, 1131, 1311, 3111, 33, 15, 51.

<u>*m* = 4</u>: $x^8 = x^7 + x^5 + x^3 + x^1 + 1, \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-3} + v_{n-5} + v_{n-7} + v_{n-8}$,

(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), 1, 1, 1, 2, 3, 5, 8, <u>13</u>, 22, 35, 56, 91, 147, 238, 385, 623, 1009, 1632, 2640 …

композиции на части Δ = {1, 3, 5, 7, 8}:

$f_7 = 13$: 1111111, 11113, 11131, 11311, 13111, 31111, 133, 313, 331, 115, 151, 511, 7.

<u>*m* = 5</u>: $x^{10} = x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x^1 + 1, \quad v_n = v_{n-1} + v_{n-3} + v_{n-5} + v_{n-7} + v_{n-9} + v_{n-10}$,

(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), 1, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 56, 90, 145, 235, 380, 615, 995, 1610, 2605…

композиции на части Δ = {1, 3, 5, 7, 9, 10} и т.д.

С учетом системы формообразования обобщенной модели имеет место общая связь элементов суммирующей *v*-рекурсии с числами Фибоначчи:

$$v_n - v_{n-2m} = F_n \,.$$

Именно поэтому первые $2m-1$ элементов последовательностей суммирующей v-рекурсии, не считая начальных условий, воспроизводят числа Фибоначчи.

Если m устремить к бесконечности, то числа Фибоначчи получают дополнительную содержательную интерпретацию, а именно: количество композиций натуральных чисел на нечетные части-слагаемые (табл. 2).

Таблица 2

Композиции натуральных чисел n на нечетные части-слагаемые, как числа Фибоначчи F_n

n	F_n	Композиции натурального числа n
1	1	1
2	1	11
3	2	111, 3
4	3	1111, 13, 31
5	5	11111, 113, 131, 311, 5
6	8	111111, 1113, 1131, 1311, 3111, 33, 15, 51
7	13	1111111, 11113, 11131, 11311, 13111, 31111, 133, 313, 331, 115, 151, 511, 7
8	21	11111111, 111113, 111131, 111311, 113111, 131111, 311111, 1133, 1313, 1331, 3113, 3131, 3311, 1115, 1151, 1511, 5111, 35, 53, 17, 71
9	44	…

В замечательной работе Д. Кнута [10] показано, что для подсчета числа n-узловых упорядоченных деревьев, в которых каждый лист находится на одном и том же расстоянии d от корня, также определяется обобщенными числами Фибоначчи. Ограничившись классом деревьев для $d = 2$, можно показать, что количество композиций числа n на слагаемые ≥ 2 равно "подвинутым" числам Фибоначчи F_{n-1} (табл. 3).

Таблица 3

Композиции натуральных чисел n на части-слагаемые, не меньшие двух, как числа Фибоначчи F_{n-1}

n	F_{n-1}	Композиции натурального числа n
2	1	2
3	1	3
4	2	22, 4
5	3	23, 32, 5
6	5	222, 33, 24, 42, 6
7	8	223, 232, 322, 34, 43, 25, 52, 7
8	13	2222, 224, 242, 422, 26, 62, 233, 323, 332, 35, 53, 44, 8
9	21	…

Напомним,

дерево – это связный ациклический граф, причем связность означает наличие путей между любой парой вершин, ацикличность – отсутствие циклов и то, что между парами вершин имеется лишь один путь;

корень дерева – вершина с нулевой степенью з а х о д а ;

листья (концевые вершины) – вершины с нулевой степенью и с х о д а , то есть из них не исходит ни одна дуга.

Определение количества композиций согласно обобщенной модели золотого сечения с помощью матричного представления (3) для m = 2, 3 представлено на рис. 2.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1870 \\ 3025 \\ 4895 \\ 7921 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{20} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 646 \\ 1045 \\ 1691 \\ 2737 \\ 4428 \\ 7164 \end{pmatrix}$$

Рис. 2. Примеры матричного формирования обобщенной золотой модели
для выбранных начальных условий

Размышлизмы…

Золотое сечение, описываемое обобщенным уравнением (4) не столько что-то рассекает или гармонизирует, сколько в виде аттрактора объединяет и группирует своим "кодом" различные элементы в одно целое, что ближе к понятию синтеза.

Уже потом при анализе готовых структур мы можем наблюдать отельные срезы как частное "зашумленное" проявление.

Поэтому нет особого смысла гнаться за точностью демонстрирования свойств золотого сечения, особенно там, где его просто нет или оно подавлено шумами.

Уравнение (4) выводит на важное, многостороннее и действительно полезное обобщение (не только в общей концепции ЗС) об интегрирующем начале ЗС в развитии природных процессов и явлений.

Робкие предположения, часто основанные на интуиции, а порой просто бездоказательные голословные утверждения о значимой роли ЗС в мироздании теперь приобретают реальные очертания и выводят теорию ЗС из сферы догадок и гипотез в область построения более четкой и обоснованной теории [9].

Например, можно задать миллиарды–триллионы совершенно произвольных соразмерных начальных условий (целых, действительных, мнимых, иррациональных и др. чисел), и через считанное количество итерационных шагов рекурсия (5) выводит нас на аттрактор золотого сечения с той или иной точностью.

В безликих числовых последовательностях, возможно, заложен механизм-прообраз конструирования и структурирования сложных природных образований.

Рассмотренные нами композиционные интерпретации обобщенной модели ЗС – тому подтверждение.

Выводы.

Композиции натуральных чисел на последовательные нечетные части плюс следующее четное слагаемое образуют числовой ряд, аттрактор которого равен константе золотого сечения $\Phi \approx 1{,}618$.

Первый последовательный ряд составляют композиции числа из нечетной единицы, дополненной двойкой $\{1, 2\}$, в результате чего образуются числа Фибоначчи.

Далее идут композиции-разложения натуральных чисел на части-слагаемые $\{1, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5, 6\}$, $\{1, 3, 5, 7, 6\}$ и т.д.

В пределе $\{1, 3, 5, 7 \ldots \infty\}$ мы также приходим к числам Фибоначчи, которые определяют количество композиций натуральных чисел, составленных из нечетных частей-слагаемых. То есть золотоносная модель адекватна для сильно различимых наборов-ассортиментов составных частей: $\Delta = \{1, 2\}$ и $\Delta = \{1, 3, 5, 7 \ldots \infty\}$.

Таким образом, с точки зрения композиционной трактовки чисел Фибоначчи, равно как и золотоносного аттрактора Ф, двойка становится эквивалентным "проводником"-провайдером для всех нечетным чисел, начиная с трёх.

Есть о чем задуматься. Например, о вероятностном образовании аминокислот в первичном "бульоне" в процессе химической эволюции по типу разделения на «чёт-нечет», а также о развитии живого вещества путем деления клеток пополам.

Но об этом в следующий раз …

Литература:

1. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи: 5-е изд. – М.: Наука, 1984. – 144 с.
2. Василенко С.Л. Триномиальные аналогии с золотым сечением // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html.
3. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.
4. Утешев А.Ю. Полиномы и алгебраические уравнения от одной переменной. – http://pmpu.ru/vf4/polynomial.
5. Василенко С.Л. Гармоническая пропорция в линейных разностных уравнениях // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15330, 09.06.2009. – trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321111.htm.
6. Baltic V. On the number of certain types of strongly restricted permutations // Applicable Analysis and Discrete Mathematics. – Vol. 4, No 1 (2010), 119–135.
7. The On-Line Encyclopedia of Integer equences (OEIS). – http://oeis.org/.
8. Василенко С.Л. Онтология обобщенной модели золотой пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16212, 11.12.2010. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161739.htm.
9. Василенко С.Л. Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.
10. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Том 3. Сортировка и Поиск. – М.: Вильямс, 2007. – 832 с.

Харьков, Украина

Авторские страницы:
http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html