

## Золотое сечение-разбиение целого на множество составных частей

*Предложена общая форма деления целого на несколько аддитивных частей согласно пропорции с золотой константой Фидия. Получены простые аналитические соотношения для вычисления составных частей целого. Дано новое толкование классического золотого сечения. Фрагментарно затронуты вопросы философской интерпретации полученных результатов.*

Разделяй и властвуй ...  
Divide et impera ...

### Введение.

Если отбросить политическую подоплёку-составляющую, то приведенный эпиграф – формула древнеримского сената – довольно точно отображает феномен золотого сечения.

Бесхитростный и во многом очевидный математический объект разбиения вот уже несколько тысячелетий властвует настроениями сотен исследователей, будоража их умы.

Не обошлось и без разделения: от негласного замалчивания золотого сечения в большинстве официальных естественных наук до восторженных восхищений, преимущественно в культурных кругах-срезах общества.

Если следовать универсальной теологической концепции, согласно которой бог – всемирный и великий архитектор-строитель, то вполне допустима гипотеза о божественной сущности золотой пропорции. Что отвечает ранней идее математика-монаха средневековья Луки Пачоли. Конечно, опуская его личностное благолепие перед религиозно-тринитарным структурированием в соответствии с тождеством «три сосны  $\equiv$  одна сосна».

Равно как и нередкие экспериментально-дутые формулировки, когда под золотое отношение искусственно подгоняется «всё, что ползает и летает».

В осмыслении устройства мира, в частности, нашел отражение золотиносный подход, как игровая алгоритмическая модель формирования Вселенной, основанная на уникальных математических свойствах числа золотого сечения [1, 2].

Речь идет, прежде всего, о сечении-делении мироздания на живую и неживую природу. Раскрутке "космического маховика" сродни модели большого взрыва. И, конечно, значительной, а возможно и ключевой роли золотого сечения с его симметрией пятого порядка в синтезе живых объектов.

Этим самым золотая пропорция пронизывает всё пространство.

Скорее завуалировано-неявно, чем отчетливо явственно.

Безусловно, не всё пока известно на приемлемом уровне достоверности. Скорее всего, гораздо меньше видимой части айсберга. Тем более ценными и значимыми становятся новые микро-открытия в области проявления необыкновенной диковинки – золотой пропорции.

### Постановка задачи.

В работе [3] рассмотрены модельные структуры в виде алгебраических уравнений, в основе которых лежит пропорциональное деление целого на три аддитивно-составные части. Некоторые из таких структур зиждутся на константе золотого сечения  $\Phi$ .

В целом модели расширяют идею построения математических "золотых" зависимостей, как наипростейших пропорциональных отношений, на троичные образования.

Данная тема получила продолжение [4] в части исследования отдельных моделей пропорционального деления целого на четыре аддитивно-составные части с их представлением в виде алгебраических уравнений.

В основе ряда структур также лежит константа  $\Phi$ .

Одновременно показана надуманность и абсурдность терминологического "клонирования" в лженаучном проявлении так называемых «обобщенных золотых сечений».

В то же время, как показывает проведенный анализ, допустимо вести речь об обобщении задачи золотого сечения в рамках деления целого на пропорциональные элементы-части, которые соотносятся между собой в целых степенях  $\Phi^k$  (рис. 1).

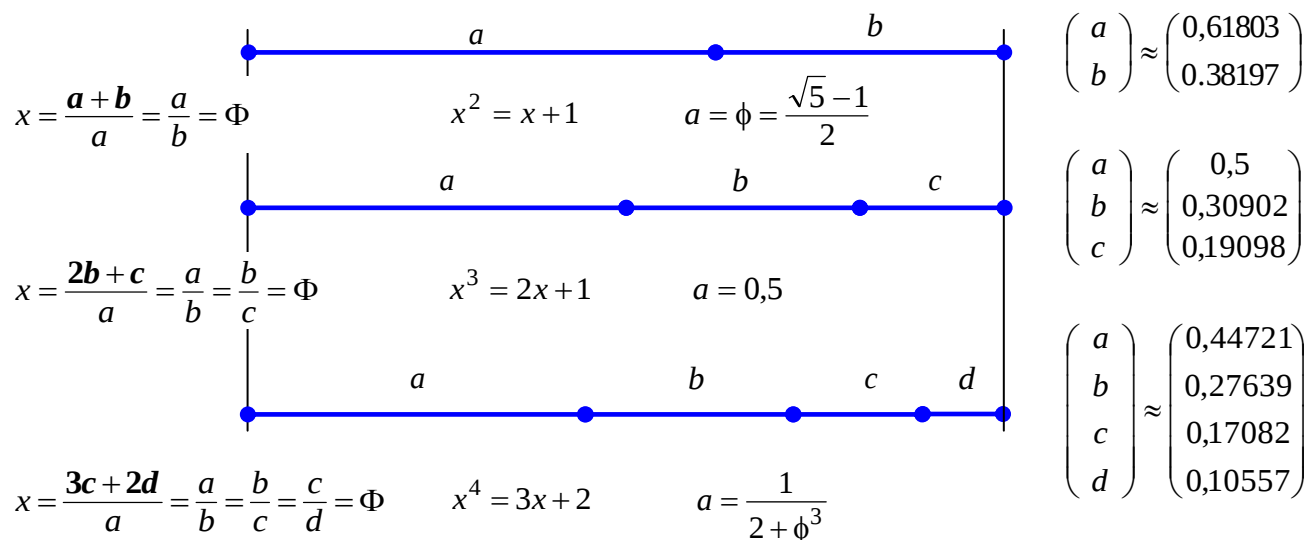


Рис. 1. Примеры  $k$ -золотого сечения (деления Фибоначчи) единичного отрезка на  $k = 2, 3$  и  $4$  части

Анализ данных разбиений позволяет выйти на общие закономерности деления целого на упорядоченное конечное множество частей так, что отношение соседних частей равно золотой константе.

Последнее недостающее равенство, позволяющее "замкнуть" систему отношений, образуется фиксацией величины целого. Например, принятием единицы.

Целью настоящей работы является построение универсальной формы разбиения целого на несколько аддитивных частей согласно золотой пропорции и получение аналитических соотношений для вычисления составных элементов.

### Понятие о $k$ -золотом сечении.

Рассматривается целое, равное единице и составленное из  $k$  аддитивных частей  $v_1 + v_2 + \dots + v_k = 1$ .

По аналогии с вышеприведенными примерами (см. рис. 1), все части целого взаимно пропорциональны в соотношении, равном константе золотого сечения  $\Phi = \phi^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,

$$x = \frac{F_k v_{k-1} + F_{k-1} v_k}{v_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_2}{v_3} = \dots = \frac{v_{k-1}}{v_k} = \Phi,$$

согласно алгебраическому уравнению  $x^k = F_k x + F_{k-1}$  или  $\Phi^k = F_k \Phi + F_{k-1}$ , где  $F_k$  – числа Фибоначчи.

В общем случае первое отношение может иметь самые разнообразные варианты, задавая «тон разбиения» и определяя ту или иную константу пропорции.

Если коэффициент пропорциональности фиксируется заранее в качестве исходного условия, то надобность в первом отношении отпадает, а система разрешается и без него.

На основании данной формы исходное единичное условие приобретает вид

$$v_1 + v_1\phi + \dots + v_1\phi^{k-1} = 1.$$

Отсюда наибольшая часть целого при  $k$ -золотом сечении равна

$$v_1 = \frac{1}{1 + \phi + \dots + \phi^{k-1}}.$$

Остальные части определяются умножением первой части на соответствующую степень малой константы золотого сечения  $v_n = v_1\phi^{n-1}$ .

Или в общем виде, для  $n$ -й части  $k$ -золотого сечения получаем формулу

$$v_n = \frac{\phi^{n-1}}{1 + \phi + \dots + \phi^{k-1}}.$$

### **Аналитика пропорционального деления целого на $k$ частей.**

Важно не только построить золотonosный ряд на "просторах" целостного объекта, но и показать особенности этого ряда в сравнении с другими пропорциональными структурами, основанными на иных числах-константах.

Поэтому проанализируем общий случай. Тем более, как показывает практика обобщений, часто общая задача легче разрешается, нежели частная.

Обозначим сумму степеней геометрической пропорции со знаменателем  $0 < q < 1$

$$z = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1}.$$

Определим разность  $z - zq = 1 - q^k$ , откуда находим наибольшую часть пропорционального  $k$ -сечения  $a_k = z^{-1}$

$$a_k = \frac{1 - q}{1 - q^k}. \quad (1)$$

Данный результат аналогичен частному от деления полиномов.

"Крайние" случаи деления единичного целого на минимальное  $k = 2$  и бесконечное  $k \rightarrow \infty$  число частей дают значения:  $a_2 = (1 + q)^{-1}$ ,  $a_\infty = 1 - q$ .

Примечательно, что сумма данных значений равна единице  $a_2 + a_\infty = 1$  исключительно для константы золотого сечения (рис. 2):

$$(1 + q)^{-1} + 1 - q = 1 \quad \rightarrow \quad q^2 + q - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad q = \phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2};$$

$$\begin{cases} q < \phi & \rightarrow & a_2 > q, & a_2 + a_\infty > 1; \\ q = \phi & \rightarrow & a_2 = q, & a_2 + a_\infty = 1; \\ q > \phi & \rightarrow & a_2 < q, & a_2 + a_\infty < 1. \end{cases}$$

Меньшая часть классического золотого сечения на две пропорциональные части становится наибольшей частью в аналогичной задаче деления на бесконечное  $k \rightarrow \infty$  число частей.

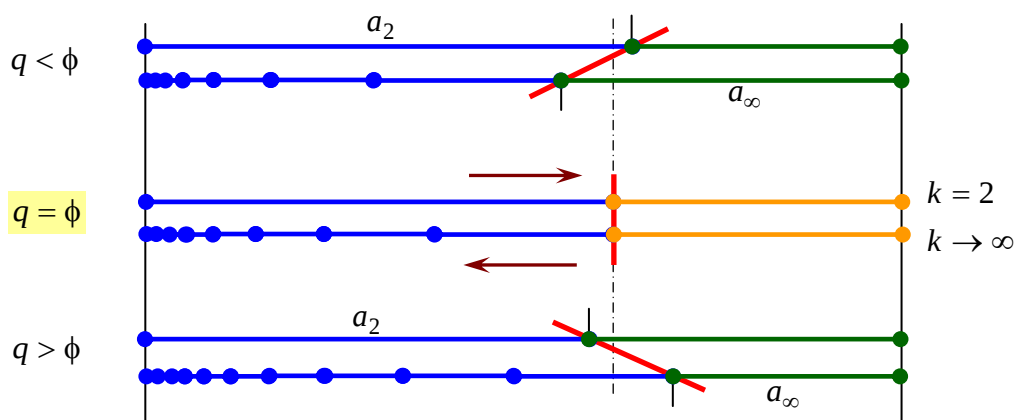


Рис. 2. Иллюстрация исключительной точности золотой модели в задаче деления целого на две и бесконечное множество частей

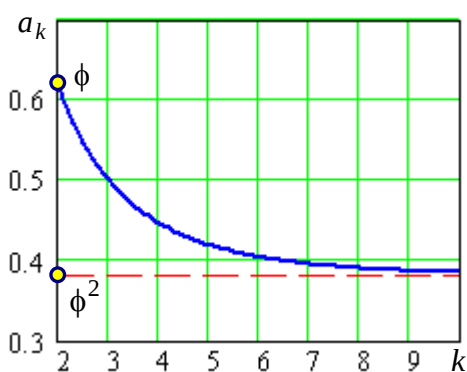


Рис. 3. Изменение величины наибольшей части при золотом делении целого = 1 на  $k$  частей

Формула (1) позволяет построить непрерывную функцию  $a_k = \frac{\phi^2}{1 - \phi^k}$  (рис. 3)  $k$ -золотого сечения  $q = \phi$ , сгладив дискретный счёт-характер частей целого.

Как видно, наибольшая часть целого изменяется от  $a_2 = \phi$  до  $a_\infty = \phi^2$  при соответствующем золотом делении единичного целого на две части и бесконечное (в пределе) количество частей.

Так, мы приходим к новой интерпретации классического золотого сечения:

$$\phi + \phi^2 = 1 = a_2 + a_\infty.$$

То есть, две части классического золотого сечения отрезка единичной длины равны большим частям при его  $k$ -золотом делении соответственно на  $k = 2$  и  $k \rightarrow \infty$  части (рис. 4).

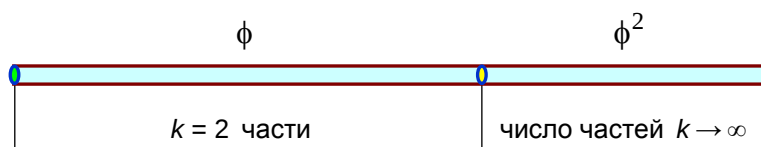


Рис. 4. Максимальные отрезки в золотом сечении единичного отрезка

Во многом это обусловлено симметричностью предельного значения знаменателя, что характерно именно для золотой константы  $\phi^2 + \phi^3 + \dots = 1$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \phi + \phi^2 + \dots + \phi^k} = \frac{1}{1 + \phi + 1}.$$

Исходя из известных свойств чисел Фибоначчи  $F_k$  и Люка  $L_k$ , в формуле (1) можно выделить квадратный корень из пяти:

$$a_k = \frac{2}{[(-1)^k F_{k-2} + 1]\sqrt{5} - (-1)^k L_{k-2} + 3} = \frac{2}{2\Phi^2 + (-1)^k (F_{k-2}\sqrt{5} - L_{k-2})},$$

где  $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ ,  $(F_0, F_1) = (0, 1)$ ,  $L_k = L_{k-1} + L_{k-2}$ ,  $(L_0, L_1) = (2, 1)$ .

Например,  $a_{10} = \frac{2}{-44\sqrt{5} + 22}$ ,  $a_{14} = \frac{2}{145\sqrt{5} - 319}$ .

Для небольших значений количества частей  $k$  максимальные отрезки имеют простые выражения:

$$a_2 = \phi, \quad a_3 = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \cos(\arctg 2), \quad a_5 = \frac{1}{2 + \phi^2}, \quad a_6 = \frac{\Phi}{4}.$$

### **Вместо заключения.**

Не считая вырожденного случая – отсутствия деления так такового, разбиение целого предполагает минимум две составные части и более.

Традиционное золотое сечение единичного отрезка приводит к разбиению на две составляющие  $\phi$  и  $\phi^2$ .

Одновременно данные величины замыкают систему отношений в  $k$ -золотом сечении так, что численно:

$\phi = a_2$  – большая часть при делении целого на  $k = 2$  сопряженные части;

$\phi^2 = a_\infty$  – наибольшая часть при разбиении целого на  $k \rightarrow \infty$  пропорциональные непересекающиеся части.

Золотое сечение даёт нам сумму двух наибольших фрагментов при делении целого на две части и бесконечное  $k \rightarrow \infty$  число пропорциональных частей с коэффициентом пропорциональности, равным константе золотого сечения  $\phi = \Phi^{-1}$ .

Данное свойство уникально и обусловлено математической исключительностью именно золотиносной величины – знаменателя геометрической прогрессии для пропорционального деления целого на части.

Этим самым золотое отношение отображает глобальные грани-стороны пространственно-временного континуума, а именно: базовую тональность, геном и ритмику в строении мироздания.

Здесь особенно отчетливо проявляется роль малого.

Буквально по принципу «мал золотник, да дорог».

Меньшая часть на деле не такая уже и маленькая. Она выступает в роли генератора или исходного прообраза для бесконечного процесса пропорционального структурирования, задавая своеобразный хронометраж безграничному течению бытия.

Меньшая часть исходного целого становится сродни коду генетической программы, вмещающей в себе весь мир.

От целого – к большему, путем пропорционального деления надвое. От оставшейся меньшей части – к вечности, через пропорциональное приумножение составных частей.

Так и в обществе... Меньшинство генерирует будущее и за него отвечает. Чтобы отдать его затем новому большинству. Чтобы снова, оставшись в меньшинстве, готовить подоснову для новых эволюционных, а порой и революционных трансформаций.

Отяжелевшее, неповоротливое и обремененное собственной выживаемостью большинство не способно формировать действительно прогрессивные изменения.

Сытое и раскормленное, – оно боится их. Всячески тормозит.

Интуитивно чувствует, что меньшинство  $\phi^2$  – это де-факто квадрат большинства  $\phi$ .

Наоборот меньшая "золотая" часть целого, проигрывая в количестве, могущественна в своем неиссякаемом потенциале. Задавая в будущем спектр-палитру прогрессивных и справедливых социально-экономических институций и программ.

Словно молодые ростки всходов.

Кажущееся незначительным по размерам малое значимо по существу.

Достаточно взглянуть на отношения больших и малых "осколков" бывшего СССР.

Согласно золотой модели пропорционально-сбалансированное будущее за меньшими, более мобильными поворотливыми образованиями. А не за консервативными заскорузлыми структурами.

Ибо расширение-развитие пространства влечет отставание во времени.

Причем указанное отставание времени от пространства имеет характер ускорения.

Выводы очевидны.

Но об этом в другой раз, в рамках новой темы...

### **Литература:**

1. Василенко С.Л. Золотая пропорция как ядро генома мироздания // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.07.2011. – [artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2](http://artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2) / Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 13.07.2011. – [sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11214.html](http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11214.html).
2. Василенко С.Л., Никитин А.В. О расшифровке генома Вселенной // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 06.10.2011. – [sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11402.html](http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11402.html).
3. Василенко С.Л. Модель золотого сечения в проекции трех частей // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 02.07.2014. – [sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13907.html](http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/13907.html).
4. Василенко С.Л. Проецирование золотой пропорции в четырехмерной системе координат // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – [sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html](http://sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html).

© Василенко, 2014   
Харьков, Украина 



Авторские страницы:

<http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3>

<http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html>

<http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm>