С.Л. Василенко

Золотое сечение
в задачах сжатия-растяжения и деления целого пополам

Определено место золотого сечения (ЗС) в равномерном сжатии-растяжении однородного линейного объекта. При переводе крайней точки в местонахождение ЗС сама точка золотого сечения занимает симметричное положение. Совместное рассмотрение равномерного растяжения объекта в обе стороны приводит к модели удвоения целого согласно золотой пропорции, как прототипу роста и последующего деления биологической клетки пополам. Высказывается гипотеза, что главное предначертание золотого сечения – быть геномом-кирпичиком в строении, формировании и развитии живых объектов, внося только ему свойственный динамизм в ассиметричную симметрию живого.

Что есть – вместе, чего нет – пополам (пословица)

Введение.

Применение распространенных математических методов в золотоносной тематике неожиданно привело к использованию невразумительных оборотов речи для надуманных терминов-определений типа: математика гармонии [1], математика золотого сечения [2].

Как ни крути, но у этих предметов нет собственной математики. Да и быть не может.

Ибо в общем случае изучение их свойств опирается на уже разработанные и общепринятые математические понятия, направления и разделы.

Иногда похожие обороты речи «математика чего-либо» встречаются в современных американизмах [3, 4], как броские художественные заголовки.

Однако буквальный перевод приводит к словосочетаниям, которые лишены внутренней логики, лингвистической строгости и научной корректности [5–9].

Все эти «математики чего-то» – контрпродуктивные в научном плане словесные конструкции, которые порождают нигилизм не только к математике, но и отвергает нормы-ценности великого русского языка. По сомнительным словообразующим правилам англоязычного толка.

Соотносительно русской грамматике, пожалуй, лучше говорить о золотом сечении (ЗС) в математике, математических началах [10, 11] (свойствах) ЗС, и т.п.

Что касается особых формализованных свойств ЗС, то они действительно есть. Сомневаться не приходится. Неслучайно 40-томный «Мир математики» начинается именно с золотого сечения [12], которое, нужно сказать, нередко и довольно неожиданным способом возникает в самых разных задачах.

Двум из них посвящена данная работа.

Задача на растяжение-сжатие.

При всей своей необычности золотое сечение – один из наипростейших объектов математики. Его формализация сводится к составлению пропорции между отношениями целого и составных элементов, например, частей линейного отрезка. Числовая константа золотого сечения Ф – есть величина такого пропорционального отношения.

Исходя из этого, вполне естественно попробовать исследовать золотоносные проявления в задаче на равномерное сжатие-растяжение линейного однородного объекта: пружины, однородного стержня, эластичного жгута и т.п.

Один из постановочных вариантов определяется так (рис. 1):

в равномерном сжатии (масштабировании) отрезка AB с закреплённым краем A найти точку I, при движении в которую края B она переместится в собственное зеркальное отражение I'.

Сжатие: итак, следует определить точку I такую, что при переводе в неё крайней точки $B \equiv I$ сама точка I займёт симметричное положение I'.

Сжатие

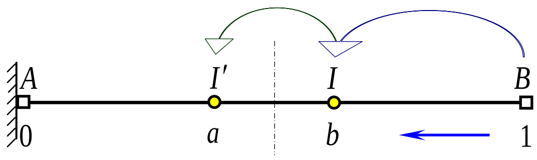


Рис. 1. Золотое сечение в задаче на равномерное сжатие

Из условия равномерного сжатия составим пропорцию $\dfrac{AB}{AI} = \dfrac{AI}{AI'}$ или $\dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{AI'}$

Зеркальная симметрия пары точек $I,\ I'$ даёт равенство частей $AI' = IB = a = 1 - b$.

Окончательно получаем $\dfrac{1}{b} = \dfrac{b}{1-b}$ или $b^2 + b - 1 = 0$ – уравнение ЗС для большей части единичного целого, откуда $b = \phi = \Phi^{-1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618$ – малая золотая константа.

Тогда $a = \phi^2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Отрезок $I'I = \phi^3 = \sqrt{5} - 2$.

В качестве исходного объекта нагляднее всего выбрать предварительно натянутую однородную резинку (обычную бытовую).

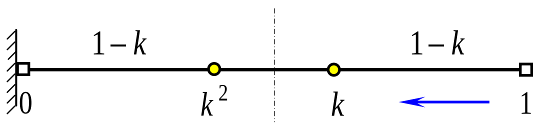
Тогда вместо сжатия, сопряженного с механическими усилиями, будет иметь место восстановление её нормального ненапряженного состояния.

В задаче на сжатие каждая из двух точек золотого сечения одновременно является ЗС для большего отрезка. Таким образом, сжатие отрезка или перевод крайних точек в точки ЗС приводит к тому, что точки ЗС передвигаются, занимая свои симметричные отражения.

Данную задачу ЗС можно также переформатировать, как определение коэффициента сжатия или обычного масштабирования.

Пусть единичная линия укорачивается в k раз.

Отрезок длиной k также уменьшается в k раз и принимает длину k^2 или $1-k$.



Так, мы приходим к уравнению золотого сечения $k^2 = 1 - k$.

Отсюда коэффициент сжатия равен малой константе ЗС: $k = \phi \approx 0{,}618$.

Итак, исходный отрезок 1 становится равным k, искомая точка занимает положение $k \cdot k = k^2$ или из условия симметрии $1-k$.

Отсюда вытекает смысл квадрата или квадратичного характера модели ЗС: точка с положением k подвергается сжатию с коэффициентом k.

Рассмотренное сжатие даёт безусловную симметрию точек $I,\ I'$ относительно середины исходного объекта.

Таким образом, имеем абсолютную проективную симметрию неравных отрезков (частей) с их идеальной пропорциональностью.

Далее рассмотрим обратную задачу.

Растяжение: найти точку I такую, что при её перемещении в крайнюю точку $B \equiv I$ её место будет занято собственным симметричным отражением I' (рис. 2).

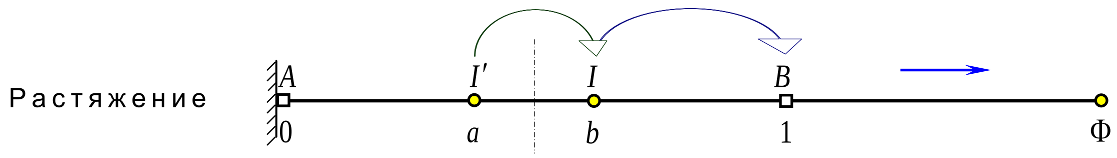


Рис. 2. Золотое сечение в задаче на равномерное растяжение

Задачу решим через определение коэффициента растяжения (масштабирования).

Точка I с координатой $x = b$ перемещается в единицу: $x \cdot k = 1$.

Её зеркальное отражение с координатой $1 - x$ переходит в x, то есть $(1-x) \cdot k = x$.

Разделив данные соотношения, получаем $x^2 + x - 1 = 0 \;\to\; x = \phi$.

Следовательно, коэффициент растяжения равен большой золотой константе $k = x^{-1} = \Phi$. При этом единичный отрезок увеличивается в $\Phi = 1 + \phi$ раз.

Иначе говоря, при растяжении линейного целого на величину ϕ найдется точка I', которая займет свое симметрично зеркальное отражение I', и этой точкой будет золотое сечение.

Ассиметричная симметрия золотого сечения.

Итак, золотое сечение получило новое дыхание-толкование, как решение задачи равномерного растяжения-сжатия пружины (однородного линейного стержня) с поиском особых точек симметрии.

В этой связи весьма уместным является высказывание В. Лавруса, которое в виде исключения к собственным правилам приведем полностью:

«Золотое сечение нельзя рассматривать само по себе, отдельно, без связи с симметрией. Великий русский кристаллограф Г.В. Вульф (1863...1925) считал золотое сечение одним из проявлений симметрии. Золотое деление не есть проявление асимметрии, чего-то противоположного симметрии Согласно современным представлениям золотое деление – это асимметричная симметрия. В науку о симметрии вошли такие понятия, как статическая и динамическая симметрия.

Статическая симметрия характеризует покой, равновесие, а динамическая – движение, рост. Так, в природе статическая симметрия представлена строением кристаллов, а в искусстве характеризует покой, равновесие и неподвижность.

Динамическая симметрия выражает активность, характеризует движение, развитие, ритм, она – свидетельство жизни. Статической симметрии свойственны равные отрезки, равные величины. Динамической симметрии свойственно увеличение отрезков или их уменьшение, и оно выражается в величинах золотого сечения возрастающего или убывающего ряда» [13].

ЗС – единственная пропорциональная скрепа целого и его двух частей [14], не считая элементарного деления пополам.

ЗС – наилучшая и единственная пропорция, уравнивающая отношения целого и его двух частей. То есть частей между собой и с целым. В определённом смысле речь идёт об идеальном соотношении величин.

Одновременно ЗС – это точка самоидентификации. Интегратор. Положение, которое обеспечивает лёгкое восприятие отношений.

Если деление пополам связано с закономерностями симметрии, то золотое сечение – с признаками асимметрии. Членение на неравные части отвечает принципу разнообразия и вызывает ощущение подвижности и динамики.

Если говорить в целом об ассиметричной симметрии золотого сечения, то обязательно нужно иметь в виду, что речь идет о пропорциональной асимметрии.

Асимметрия уравновешивает неравные элементы за счет соответствующего пропорционального изменения расстояния до центральной точки (оси) целого.

Остается добавить:

ЗС – универсальная модель динамической симметрии;

ЗС – модель пропорциональной зеркальности;

ЗС – гипотетическая модель роста живого.

Симбиоз золотого сечения и деления целого пополам.

Два деления целого – на две равные доли и золотое сечение – связаны буквально на "генетическом" уровне.

Наиболее отчетливо здесь проявляются два характерных момента.

1. Деление пополам и золотое сечение – единственные и очевидные пропорциональные разбиения целого на две части $1 = a + b$ [14]:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} \quad \to \quad a = b = \frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{a} \quad \to \quad b = \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Других вариантов пропорции из совокупности трех объектов – целого и его двух составных частей $\{1, a, b\}$ – попросту нет. Не считая, конечно, различные манипулирования с частями типа умножения на коэффициенты, возведения в степени и т.п.

В этом смысле золотое сечение, что называется, "на виду". Именно поэтому оно стало предметом изучения древних математиков – больших мастеров по оперированию с разнообразными пропорциями.

2. Само золотое сечение численно определяется через квадратный корень из пяти. Число "пять" в свою очередь образуется как сумма двух квадратов $1^2 + 2^2 = 5$.

Например, геометрически это соответствует гипотенузе прямоугольного треугольника со сторонами 1 и 2 или диагонали прямоугольника с аналогичными сторонами.

То есть геометрические фигуры имеют соотношение сторон 1:2. Одна сторона является половинкой другой стороны (рис. 3). Диагональ равна $\sqrt{5} = 1 + 2\phi = \Phi + \phi$.

Если целое мы разделим пополам, то несложными построениями получим и золотое сечение.

Механизм удвоения целого через золотое сечение.

Часто считают, что золотая пропорция характеризует соразмерность и гармоничность строения. Одновременно в биологических исследованиях последних десятилетий можно встретить много примеров проявления возможного золотого сечения, начиная с вирусов, растений и кончая человека.

На основании этого высказывается предположение, что ЗС является универсальным законом живых систем.

Мы тоже склонны думать в правоту подобной гипотезы.

Только вот доказательной базы, к сожалению, не хватает.

Большей частью в таких случаях имеет место обычное действо, при котором желаемое принимается за действительное.

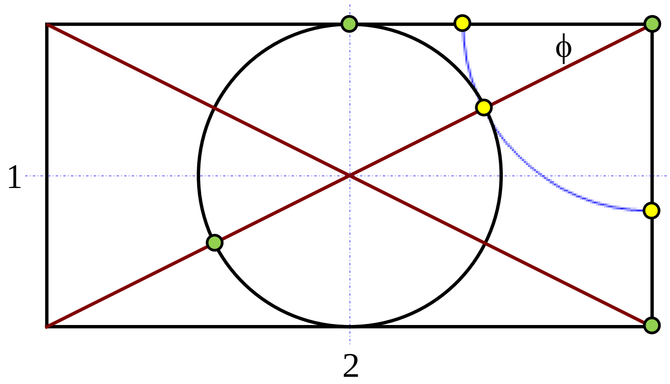


Рис. 3. Золотые сечения, образуемые с помощью прямоугольника 1×2
и симметрично вписанного круга с единичным диаметром

Конечно, даже на уровне принятия гипотез необходимы более весомые аргументы, нежели простая констатация мыслимого золотого сечения.

Видимо, здесь все-таки нужно исходить из главных биологических закономерностей в живой природе, таких как пропорциональный рост и развитие за счет процессов деления клеток пополам.

Выше на уровне рассмотрения математической пропорции была продемонстрирована устойчивая взаимосвязь золотого сечения и деления целого пополам.

Другими словами, половинка целого, так или иначе, порождает золотое сечение.

Наоборот: золотое сечение должно реанимировать половину. Как минимум, обратным ходом.

Более того, оно способно к развитию-растяжению с делением пополам, как в задаче растяжения (рис. 4), в два условных этапа:

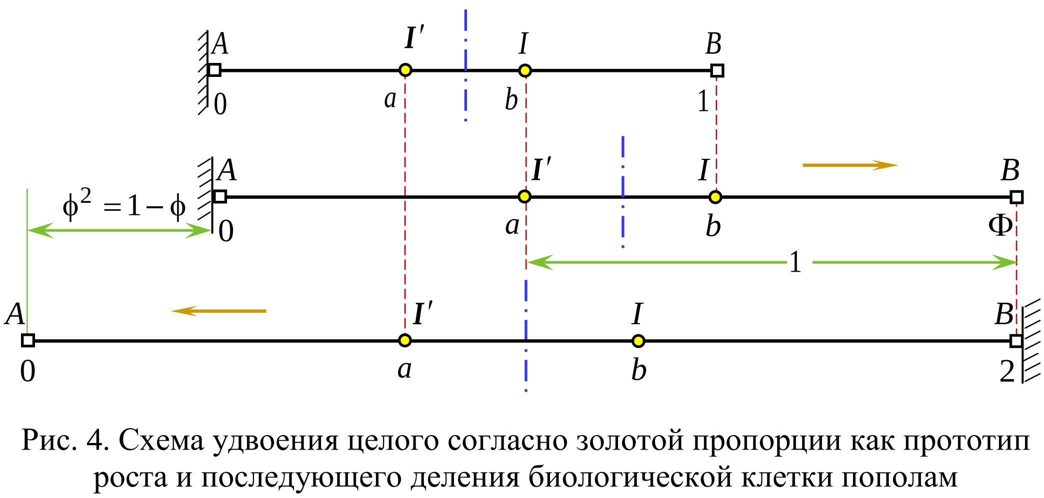


Рис. 4. Схема удвоения целого согласно золотой пропорции как прототип
роста и последующего деления биологической клетки пополам

$$\Phi + \phi^2 = 1 + \phi + \phi^2 = 2$$

– фиксирование левого края и развитие-растяжение целого в золотой пропорции

$$I' \to I, \quad I \to B, \quad 1 \to \Phi .$$

– фиксирование правого края и растяжение целого в золотой пропорции с возвратом "зеркальной" точки золотого сечения I' на своё исходное место.

На самом деле оба процесса происходят одновременно, как единый процесс.

При этом середина начального отрезка занимает место точки I исходного золотого сечения.

Действительно, при растяжении влево отрезок $BI' = 1$ удлиняется на величину $\phi - \phi^2$, то есть $1 \cdot k = 1 + \phi - \phi^2 = \Phi - \phi^2$.

Отрезок $AB = \Phi$ становится равным x или $\Phi \cdot k = x$.

После почленного деления равенств находим окончательную длину растягиваемого отрезка $x = \Phi(\Phi - \phi^2) = \Phi^2 - \phi = 2$.

В результате, исходное целое удваивается согласно тождеству $1 \cdot (\Phi + \phi^2) = 2$.

Таким образом, золотоносный рост целого в обе стороны относительно точки золотого сечения I' приводит к его фактическому удвоению.

Далее нетрудно себе представить последующее деление «выращенного объекта» на две части, каждая из которых равна исходному единичному целому.

Налицо модель золотого роста и деления пополам биологической клетки.

Как бы там ни было в реальной жизни, но алгоритм развития живого вполне вписывается в золотоносную модель.

Заключение или размышлизмы.

Начав с обычной задачи в части определения места золотого сечения в равномерном сжатии-растяжении однородного линейного объекта, мы вышли на любопытную модель удвоения целого. В этом легко просматривается некий механизм развития биологических образований.

Надо полагать, именно здесь кроется секрет присутствия ЗС в живых структурах. Наравне с симметрией пятого порядка, которая практически не свойственна материальным объектам неживой природы. Но зато позволяет живому не закостенеть, сохраняя гибкость-эластичность и подвижность.

Плюс к этому практическая идентичность в истоках формирования математической пропорции для деления целого пополам и в золотом отношении.

Гармония, красота, стандарт прекрасного, что якобы свойственны золотому сечению, на наш взгляд, скорее напоминают вольные фантазии адептов на заданную тему.

Эстетические идеалы больше свойственны миру фракталов с их невообразимым разнообразием форм.

Золотушные выдумки о красоте сродни «пупковой философии», согласно которой человек строен благодаря фактору золотого сечения.

Всё относительно. Да и многовековые привычки берут своё.

Даже, если бы пупки у человека были на лбу, люди всё одно казались бы друг другу симпатичными. И к единственному глазу притерпелись бы, без всякого там ЗС между бровями (?).

Поэтому основное предназначение золотого сечения отнюдь не красота.

Но рациональность и "генетическая" близость к феномену двойки, что особенно отчетливо высвечивается в пропорциональном отношении целого и его двух частей.

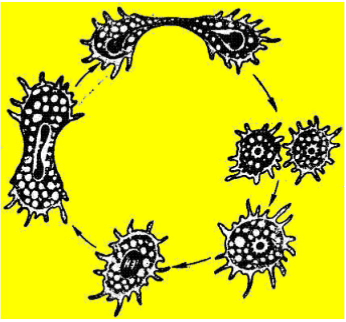
Главное предначертание золотого сечения – быть геномом или кирпичиком в строении, формировании и развитии живых объектов, внося только ему свойственный динамизм в ассиметричную симметрию живого.

Если кому-то это представляется одновременно красивым и гармоничным, то стоит ли отговаривать? – Вопрос риторический…

Литература:

1. Стахов А.П. Математика гармонии как "золотая" парадигма современной науки // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15599, 15.10.2009. – trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321168.htm.
2. Аракелян Г. Математика и история золотого сечения / Г. Аракелян. – М.: Логос, 2014. – 404 с.
3. Stakhov A. Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. – N.Y.: World Scientific, 2009. – 694 p.
4. Davis T. The Mathematics of Sudoku. – 2008. – geometer.org/mathcircles/sudoku.pdf.
5. Василенко С.Л. Геометрические образы и закономерности гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15445, 01.08.2009. – trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321141.htm.
6. Василенко С.Л. Математизация гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15492, 27.08.2009. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161533.htm.
7. Василенко С.Л. Симбиоз математики и гармонии // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16227, 16.12.2010. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161742.htm.
8. Василенко С.Л. "Математика гармонии": на распутье // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17151, 28.12.2011. – trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322104.htm.
9. Василенко С.Л. Бифуркация в математизации гармонии // АТ. – М., Эл № 77-6567, публ.17265, 28.01.2012. – trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322139.htm.
10. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: русская матрешка в геометрических образах гармонической пропорции // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15978, 04.07.2010. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161668.htm.
11. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: гармонические треугольники // АТ. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16007, 22.07.2010. – trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.
12. Мир математики: в 40 т. Т. 1: Фернандо Корбалан. Золотое сечение. Математический язык красоты: пер. с англ. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с. – klex.ru/f46.
13. Лаврус В.С. Золотое сечение // Электронная б-ка «Наука и техника». – 1997. – n-t.ru/tp/iz/zs.htm.
14. Василенко С.Л. Пропорциональное деление целого // Математ. и историч. исслед. гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.10.2013. – artmatlab.ru/articles.php?id=108&sm=2.

Украина, Харьков



Авторские страницы:
http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html