ТАИНСТВО ЧИСЕЛ ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ
1. Тонкая структура

© март 2011 г. **Белянин В.С.**

«Когда открытие уже сделано, оно обычно кажется таким очевидным, что остается лишь удивляться, как никто не додумался до этого раньше»

П. Дирак [1]

Деление отрезка на две неравные части в золотой пропорции настолько удивительно, что постоянно будоражит человеческие умы. Время меняет восприятие этой знаменитой задачи, но всегда остается одно, – её решение неизменно удивляет людей своей неисчерпаемостью. Подтверждением тому служат не прекращающиеся публикации об этом изумительном объекте математики. В предлагаемой работе развивается своеобразный подход в исследовании золотой пропорции, в котором она раскрывает свои новые грани.

Золотая пропорция достаточно ярко отражает многие элементы изящества и гармонии окружающего мира и поэтому является одной из долгоживущих и увлекательных задач. До последнего времени казалось, что прошли времена, когда в золотой пропорции можно обнаружить что-либо новое или обнаружить ее в какой-либо геометрической фигуре. За века всё обследовано самым тщательным образом. И всё же, как выясняется, вопрос оказывается не исчерпанным. Очередная попытка проникнуть в секреты золотой пропорции привела к неожиданному результату, связанному не со сложными фигурами и кривыми, а с формулировкой самой золотой пропорции. Обнаружилось, что иррациональные числа, характеризующие золотую пропорцию, расщепляются естественным образом на другие иррациональные числа, которые находят свое отражение в различных геометрических объектах. Однако, обо всём по порядку.

1. Классическая запись золотой пропорции имеет вид

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a},$$

где *a* и *b* некоторые величины, – числа или отрезки. Решение пропорции относительно отношения величины *a* к *b* приводит к следующему положительному значению корня

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi = 1{,}6180339...$$

Смысл отрицательного значения отношения *a/b*, обычно отбрасываемого после решении пропорции, рассмотрен в работе [1].

Решение пропорции относительно отношения величины *b* к *a* дает другое положительное значение

$$\frac{b}{a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \varphi = 0{,}6180339...$$

Иррациональные числа Φ и φ являются основными характеристиками золотой пропорции и их можно назвать *большим* и *малым золотыми числами*. Между ними существуют очевидные, скажем, «внешние» связи

$$\Phi \cdot \varphi = 1, \qquad \Phi - \varphi = 1, \qquad \Phi + \varphi = \sqrt{5}.$$

Кроме этих, давно известных математикам связей, золотые числа обладают «внутренними» связями. Для этого покажем, что каждое из них естественным образом расщепляется на две пары других иррациональных чисел.

2. Приведенная выше запись золотой пропорции может быть продолжена вправо в виде цепочки отношений, которые образуются по алгоритму, задаваемому правой частью исходного равенства.

---

[1] Дирак П.А.М. Собрание научных трудов. Т. 1. Квантовая теория (монографии, лекции). – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – С. 576.

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \frac{2a+b}{a+b} = \frac{3a+2b}{2a+b} = \frac{5a+3b}{3a+2b} = \frac{8a+5b}{5a+3b} = \cdots$$

Легко узнаваемые числовые коэффициенты у величин *a* и *b*, возникающие при продолжении равенств вправо, представляют собой последовательность чисел Фибоначчи[2], образующихся по рекуррентной формуле $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ с начальными членами $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Параметр *n* принимает значения из области целых чисел от 0 до ∞, F_n – *n*-й член последовательности Фибоначчи: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … Без затруднений просматривается общий закон образования числителей и знаменателей в представленной цепочке исходных равенств. Согласно этому закону любую дробь, стоящую правее исходного отношения *a/b*, можно записать в общем виде следующим образом:

$$\Phi = \frac{a}{b} = \frac{F_{n+2}a + F_{n+1}b}{F_{n+1}a + F_n b} = \frac{F_{n+2}a}{F_{n+1}a + F_n b} + \frac{F_{n+1}b}{F_{n+1}a + F_n b}.$$

Известно, что отношение бесконечно больших чисел Фибоначчи к меньшим соседним числам стремится к величине *Φ*, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n+1}/F_n = \Phi$. Используя это свойство, нетрудно показать, что при неограниченном увеличении параметра *n*, то есть при *n* → ∞, приведенные выше отношения переходят в пределе в следующие равенства

$$\Phi = \frac{\Phi^2}{\Phi+\varphi} + \frac{1}{\Phi+\varphi} = \frac{\Phi^2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} + \frac{2\sqrt{5}}{10} = \Phi_2 + \Phi_0 = 1{,}1708203... + 0{,}4472136...$$

Здесь использованы два из следующих трех принятых далее обозначений

$$\Phi_2 = \Phi^2/\sqrt{5}, \qquad \Phi_1 = \Phi/\sqrt{5}, \qquad \Phi_0 = 1/\sqrt{5}.$$

Величина Φ_2 может быть в свою очередь разложена на два слагаемых. Если учесть уравнение золотой пропорции $\Phi^2 = \Phi + 1$, то получим

$$\Phi_2 = \Phi/\sqrt{5} + 1/\sqrt{5} = \Phi_1 + \Phi_0 = 0{,}723606… + 0{,}447213…$$

Следовательно, большое золотое число *Φ* распадается на суммы двух чисел по альтернативным вариантам

$$\Phi = \Phi_2 + \Phi_0 = \Phi_1 + 2\Phi_0.$$

Причем между тремя обнаруженными новыми иррациональными числами Φ_0, Φ_1 и Φ_2 существует помимо равенства $\Phi_2 = \Phi_1 + \Phi_0$ очевидная связь в виде геометрической пропорции

$$\Phi_2 / \Phi_1 = \Phi_1 / \Phi_0 \qquad \text{или} \qquad \Phi_1^2 = \Phi_0 \Phi_2.$$

Таким образом, величина Φ_1 является средним геометрическим (средним пропорциональным) величин Φ_0 и Φ_2. Ведение в анализ среднего геометрического восходит к древним грекам, математика которых была по преимуществу геометрической, и средний отрезок находился построением по двум заданным отрезкам. На **рис. 1** показано одно из возможных геометрических построений Φ_1 по заданным[3] отрезкам Φ_2 и Φ_0.

3. Метод раскрытия аддитивного свойства большого золотого числа *Φ* может быть использован для получения аналогичного результата для малого золотого числа *φ*. В результате придем к следующим равенствам

$$\varphi = \frac{\varphi^2}{\Phi+\varphi} + \frac{1}{\Phi+\varphi} = \frac{\varphi^2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-5+3\sqrt{5}}{10} + \frac{2\sqrt{5}}{10} = \varphi_2 + \varphi_0 = 0{,}1708203... + 0{,}4472136...$$

[2] О числах Фибоначчи подробно будет рассказано в последующей публикации.

[3] Элементарное построение исходных отрезков Φ_2 и Φ_0 в данной статье не рассматривается.

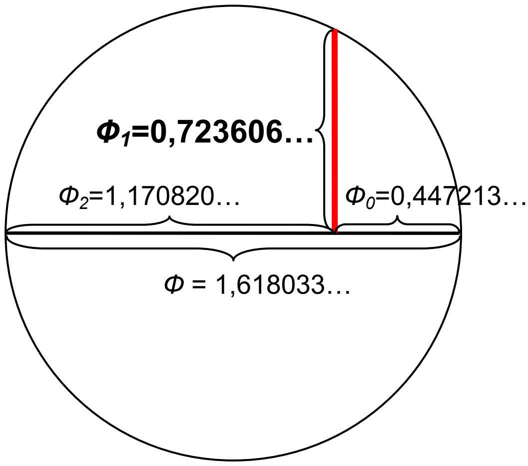

Рис. 1. Геометрическое построение средней геометрической величины Φ_1 при заданных значениях величин Φ_2 и Φ_0.

Используя обозначения

$$\varphi_2 = \varphi^2/\surd 5, \qquad \varphi_1 = \varphi/\surd 5, \qquad \varphi_0 = 1/\surd 5,$$

получаем

$$\varphi = \varphi_2 + \varphi_0 = \varphi_1 + 2\varphi_2, \qquad \varphi_1^2 = \varphi_0\, \varphi_2$$

Для среднего геометрического φ_1 справедливо тоже геометрическое нахождение этой величины, что и показано на рис. 1.

Попутно замечу, что связь в виде геометрической пропорции существует не только между числами Φ_n или между числами φ_n (n = 0,1,2), но она может соединять и оба вида этих чисел, например, $\varphi_0^2 = \varphi_1\, \Phi_1$.

4. Полученные результаты легко объединяются с исходной золотой пропорцией в наглядные цепочки равенств

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = \Phi = \frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \Phi_2 + \Phi_0 = \Phi_1 + 2\Phi_0$$

и

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b} = \varphi = \frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \varphi_2 + \varphi_0 = \varphi_1 + 2\varphi_2\,,$$

которые влекут за собой достаточно интересные выводы.

Во-первых, «расщепления» большого и малого чисел золотой пропорции Φ и φ на другие иррациональные числа в соответствии с равенствами

1,6180339… = 1,1708203… + 0,4472136… = 0,7236067… + 0,8944271…

и

0,6180339… = 0,1708203… + 0,4472136… = 0,2763932… + 0,3416407…

обнажают до сих пор ещё никем не раскрытое и не исследованное закодированное аддитивное свойство чисел Φ и φ. Оказывается, золотые числа Φ и φ не являются «элементарными», а имеют определенную структуру, состоящую из двух частей.

Во-вторых, двойственность золотых чисел Φ и φ говорит об их «живой» подвижности. Это не монолитные или, лучше сказать, не статичные и не застывшие числа, а числа, имеющие гармоничную внутреннюю структуру.

В-третьих, если золотые числа в геометрическом плане характеризуют деление отрезка на две неравные части («золотое сечение»), то их «расщепление» показывает, что деление отрезка может быть *естественным* образом продолжено. В качестве примера на **рис. 2** представлена для единичного отрезка геометрическая интерпретация расщепления малого золотого числа φ.

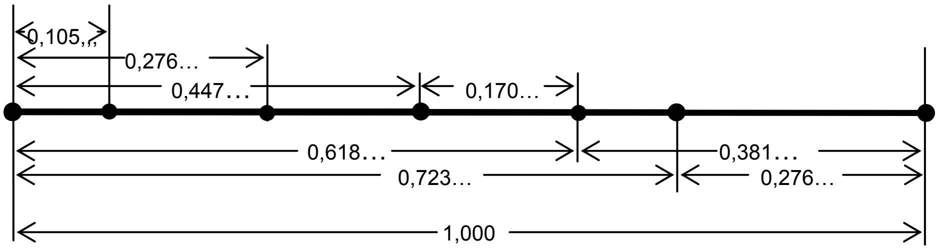

Рис. 2. Аддитивные свойства малого золотого числа *φ.*

В четвертых, на структурные части золотых чисел Φ_n и φ_n (n = 0, 1, 2) распространяется закономерность золотой пропорции, так как их отношения записываются как $\Phi_2/\Phi_1 = \Phi_1/\Phi_0 = \Phi = 1{,}6180339\ldots$ и соответственно $\varphi_2/\varphi_1 = \varphi_1/\varphi_0 = \varphi = 0{,}618033\ldots$. Это свойство структурных частей, а также аддитивные свойства золотых чисел позволяют с полным основанием назвать числа Φ_0 ,Φ_1 и Φ_2 «ядром» большого золотого числа Φ, а числа φ_0, φ_1 и φ_2 – «ядром» малого золотого числа φ.

И, наконец, в структурных частях золотых чисел обращает на себя внимание общая величина $\Phi_0 = \varphi_0 = 1/\sqrt{5}$. Именно она является скрытым праобразом золотой пропорции, её первородным основанием. Такой вывод основан на том, что при любом варианте расщепления золотых чисел Φ и φ, число $1/\sqrt{5}$ обязательно присутствует, так как является составным элементом чисел Φ_n и φ_n (n = 1,2). Например, $\Phi_1 = \dfrac{1+1/\sqrt{5}}{2}$, $\varphi_1 = \dfrac{1-1/\sqrt{5}}{2}$.

5. Соотношения между числами Φ_1 и φ_1 и ключевая роль числа $1/\sqrt{5}$ могут быть наглядно выражены в геометрической форме. Для этого рассмотрим достаточно простую задачу комбинаторной геометрии, которая понадобится нам в дальнейшем. Разобьем квадрат с единичной стороной на пять равновеликих частей, соблюдая при этом условие центральной симметрии. Одно из таких разбиений представлено на **рис. 3**. Сторона центрального квадратика будет равна $\Phi_0 = \varphi_0 = 1/\sqrt{5}$. Стороны оставшихся четырех прямоугольников достаточно неожиданно оказываются равными значениям

$$\Phi_1 = \frac{\Phi}{\sqrt{5}} = \frac{1+1/\sqrt{5}}{2} = 0{,}723606... \qquad \text{и} \qquad \varphi_1 = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} = \frac{1-1/\sqrt{5}}{2} = 0{,}276393....$$

Итак, рассмотрение одного из способов центрально-симметричного «разбиения» квадрата на другие равновеликие фигуры показало изящную геометрическую связь трех чисел $\Phi_0 = \varphi_0$, Φ_1 и φ_1 и наглядно продемонстрировало центральную роль числа $1/\sqrt{5}$.

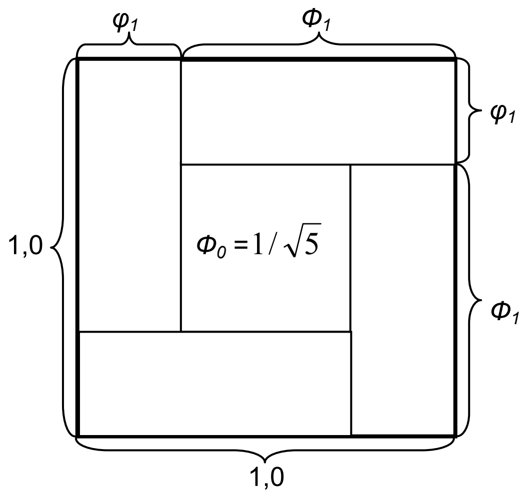

Рис. 3. Центрально-симметричное разбиение единичного квадрата на пять равновеликих частей.

Помимо рассмотренной задачи приведу еще один геометрический пример, в котором встречаются числа φ_1 и Φ_0. Этот пример связан с хорошо всем знакомым предметом. Представим раскрытый ручной зонтик с пятью спицами, концы которых образуют правильный пятиугольник (**рис. 4.**). Пусть две не соседние спицы единичной длины образуют при вершине прямой плоский угол. Тогда расстояние между их концами, соответствующее диагонали пятиугольника, равно $\sqrt{2}$. Легко определяется квадрат радиуса R^2, описанной около пятиугольника окружности; он равен $R^2 = 1 - 1/\sqrt{5} = 2\varphi_1$. Квадрат высоты купола зонтика в этом случае равен $h^2 = 1 - R^2 = 1/\sqrt{5} = \Phi_0$. Вот такой интересный пример получился с зонтиком, в геометрии которого дважды встречается величина $1/\sqrt{5}$.

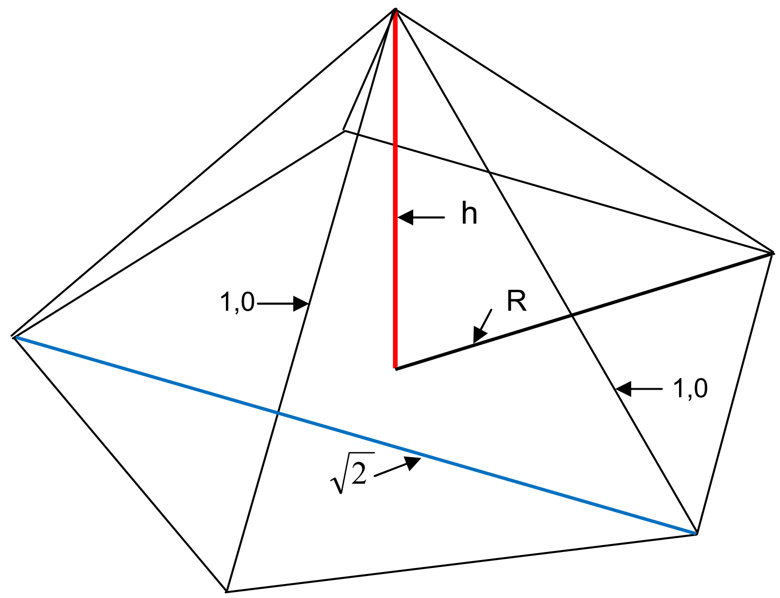

Рис . 4. Необычные геометрические свойства раскрытого зонтика с пятью спицами.

Величина $1/\sqrt{5}$ встречается и среди параметров правильных многогранников (платоновых тел). Так, значение косинуса угла, под которым ребро икосаэдра видно из центра описанной сферы, равно $1/\sqrt{5}$. Этой же величине равен и отрицательный косинус двугранного угла додекаэдра.

6. Обратим теперь свой взор к другим разделам математики. Величина $1/\sqrt{5}$ встречается в формуле Бине, позволяющей определять в последовательности Фибоначчи любое число по его номеру. Она же сохраняется при переходе от формулы Бине к методу определения любого числа Фибоначчи с номером *n*, как ближайшего целого числа к величине $\Phi^n/\sqrt{5}$. Эти вопросы подробно освещены в известной книге Н. Воробьева, посвященной числам Фибоначчи [2].

Величина $1/\sqrt{5}$ встречается и в теории чисел. Если *x* – иррациональное число, то его как в теоретических, так и в практических задачах часто приходится приближенно заменять рациональной дробью p/q, где p и q – целые числа, q > 0. В теории алгебраических чисел известна теорема, согласно которой можно найти бесконечное число несократимых дробей p/q с тем свойством, что выполняется неравенство

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \langle \frac{1}{\sqrt{5} q^2}.$$

Постоянный множитель, стоящий в правой части неравенства, вообще говоря, невозможно улучшить, то есть сделать меньше $1/\sqrt{5}$. Другими словами, если число $1/\sqrt{5}$, стоящее в правой части неравенства заменить каким-либо меньшим числом, то утверждение теоремы станет неверным.

Приведу еще два примера, о которых более подробно будет сказано в последующих публикациях. Между числами последовательностей Фибоначчи и Люка существует порядка десяти соотношений. В контексте настоящей статьи примечательна следующая связь: $F_{2n+1} = (L_n/\sqrt{5})^2 + (L_{n+1}/\sqrt{5})^2$. Встречается величина $1/\sqrt{5}$ и в уравнении логарифмической спирали, когда она связана с золотой пропорцией и описывается в полярных координатах.

Величина $1/\sqrt{5}$ может служить в некоторых случаях *нормирующим множителем*. Так, в начале статьи было отмечено равенство, иллюстрирующее одну из «внешних» связей между золотыми числами: $\Phi + \varphi = \sqrt{5}$. Однако, оно «недостаточно смотрится» среди двух других элегантных единичных связей. Если обе части этого равенства умножить на нормирующий множитель $1/\sqrt{5}$, то есть использовать линейное преобразование к стандартному виду (нормирование), то равенство приведется к единичной норме:

$$\Phi/\sqrt{5} + \varphi/\sqrt{5} = \Phi_1 + \varphi_1 = 1.$$

Таким образом, к изящным единичным «внешним» связям золотых чисел добавляется единичная связь их «внутренних» чисел

$$\Phi\varphi = 1, \qquad \Phi - \varphi = 1, \qquad \Phi_1 + \varphi_1 = 1.$$

Представляют интерес и еще две удивительные связи

$$\Phi\Phi_1 - \varphi\varphi_1 = 1, \qquad \Phi\varphi_1 - \varphi\Phi_1 = 0.$$

О величине $1/\sqrt{5}$ и её связи с архитектурой в античности и в средние века достаточно много написано в книге Э. Мёсселя [3]. Геометрически величину $1/\sqrt{5}$ можно трактовать как отношение стороны единичного квадрата к диагонали прямоугольника, составленного из двух таких квадратов (**рис. 5**). Эта соразмерность обнаруживается в первом приближении в пропорциях великой пирамиды Хеопса, – её высота (приблизительно 146,6 м) относится к диагонали основания (приблизительно 329,8 м), почти как $1:\sqrt{5}$.

В архитектуре издавна используют соразмерности между целыми числами 1, 2, 3 и 5. Об этом говорят как древние книги, так и современные обмеры древних сооружений. В контексте данной работы нас интересуют числа 1 и 5, средним геометрическим которых является иррациональное число $\sqrt{5}$.

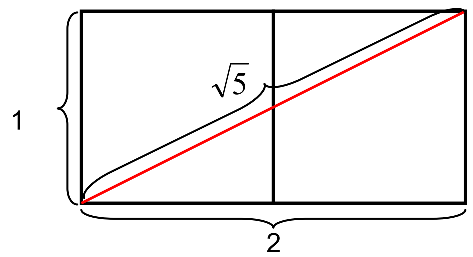

Рис. 5. Иллюстрация соотношения между стороной единичного квадрата и диагональю прямоугольника, составленного из двух квадратов.

Среднее геометрическое определяется по формуле $c = \sqrt{ab}$, где *a* и *b* – исходные величины. Оно обладает той особенностью, что отношение меньшей величины, например *a*, к средней величине *c* равно отношению средней величины к большей величине *b*: $a/c = c/b = \sqrt{a}/\sqrt{b}$. Для чисел 1 и 5 среднее геометрическое $\sqrt{5}$ является наилучшей связью, обуславливающей внутреннюю гармонию триады: 1, $\sqrt{5}$ и 5.

Среднее геометрическое, как и другие классические средние величины, – среднее арифметическое и среднее гармоническое – часто используют в архитектуре. Например, великий итальянский архитектор эпохи позднего Возрождения А.Палладио (1508–1580) рекомендовал использовать эти три средние величины для нахождения пропорциональных высот внутренних помещений.

Думается, что «следы» числа $1/\sqrt{5}$ могут быть обнаружены еще во многих других областях знаний. Вполне возможно, это число наделено определенным скрытым содержанием, спрятанным пока от нас и ждущим своих исследователей.

7. Проведенное исследование «расщеплений» золотых чисел Φ и φ еще далеко от завершения. В статье представлены только начальные сведения о свойствах новых иррациональных чисел, составляющих основу золотых чисел. В последующей публикации будет показана связь составных частей золотых чисел с последовательностями Фибоначчи и Люка и будет получена новая удивительная числовая последовательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белянин В.С., Романова Е.Н. Золотая пропорция. Новый взгляд //Наука и жизнь, 2003, № 6. // http://www.nkj.ru/archive/articles/3070/

2. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – М.: Наука, 1992.

3. Мёссель Э. Пропорции в античности и в средние века. – М.: Изд-во всесоюзной академии архитектуры, 1936.