ТАИНСТВО ЧИСЕЛ ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ

2. Удивительная числовая последовательность

© апрель 2011 г. **Белянин В.С.**

Первая часть этой работы была посвященная новым иррациональным числам, полученным в результате естественного расщепления чисел золотой пропорции [1]. Вторая часть работы посвящена рождению от этих чисел новой числовой последовательности и ее связи с известными последовательностями Фибоначчи и Люка.

«Мы всё время ищем Дом и не находим его. Вот я и думаю, что если мы будем искать эту Яму, то мы её обязательно не найдем, и тогда мы, может быть, найдем то, чего мы как будто не ищем, а оно-то и есть то, что мы на самом деле ищем»

А.А. Милн «Винни Пух и все-все-все» [1]

8. В природе часто после начала какого-либо процесса, его дальнейшее развитие происходит согласно своим собственным законам. Так бывает, например, после зарождения смерча, цунами или после пробуждения вулкана.

Законы со своими внутренними обусловленностями встречаются и в мире растений. В знаменитом романе Жюля Верна «Таинственный остров» один из героев обнаруживает за подкладкой своей куртки зернышко пшеницы. Обрадовавшись этой находке, инженер Сайрес Смит восклицает [2, с.194]: *«И вот, если мы посадим это зерно, то при первом урожае соберем восемьсот зерен, а они дадут нам при втором урожае шестьсот сорок тысяч зерен, а при третьем – пятьсот двенадцать миллионов, а при четвертом – более четырехсот миллиардов зерен. Вот такова пропорция!»*

И далее он продолжает: *«Волею природы потомство хлебного зернышка возрастает в геометрической прогрессии. Впрочем, размножение пшеницы, зерно которой дает при первом урожае восемьсот зерен, – ничто по сравнению с маком, у которого в одной коробочке тридцать две тысячи зерен, и с табаком, у которого один корень дает триста шестьдесят тысяч семечек. Если б не многочисленные причины, мешающие их размножению, два этих растения заполонили бы в несколько лет весь шар земной».*

Подобные процессы с непрерывным возрастанием какого-либо параметра математики часто связывают с понятием *геометрической прогрессии*, то есть с последовательностью чисел a_1, a_2, …, a_n, …, каждый последующий член которой получается из предыдущего путем умножения на одно и то же число, на *знаменатель прогрессии* $q \neq 0$, – так что $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Задачи с геометрическими прогрессиями имеют очень древнюю историю. Они встречаются как в древневавилонских и в древнеегипетских источниках, так и в более поздних математических трактатах других народов.

Не менее яркий пример последовательного возрастания можно привести и из мира живой природы. Это процесс роста популяции кроликов, которые способны удивительно быстро размножаться. Во многих странах это хорошо знают, так как размножение кроликов приводит порой к серьезным проблемам. Кролики – бич сельского хозяйства, они выедают растительность на пастбищах, повреждают посевы и портят угодья норами. Пример Австралии достаточно хорошо всем известен. Завезенные туда европейские кролики так быстро размножались, что с ними вели настоящую войну с использованием авиации, отравляющих и бактериологических веществ и замысловатых длиной до нескольких десятков километров кроличьих «китайских стен». Не могли их истребить завезенные и акклиматизированные хищники, – хорьки, горностаи, лисицы и ласки.

Быстрое размножение кроликов обусловлено не в последнюю очередь длящейся всего один месяц беременностью самки. При хороших условиях она плодится пять-шесть раз в году и в каждом выводке дает от трех до девяти крольчат. За год получается в среднем 15-20 потомков. Эта низкая цифра объясняется тем, что на фоне высокого темпа размножения у крольчих случаются выкидыши, резорбции эмбрионов, а многие новорожденные гибнут от болезней и хищников.

---

[1] Милн А.А. Винни Пух и все-все-все. – М.: Правда, 1985. с. 619.

9. Математическое описание процесса размножения кроликов впервые попытался провести итальянец Леонардо Пизанский (около 1170 – после 1228), более известный как Фибоначчи. Он рассматривал в «Книге абака» (1202 г.) ставшую впоследствии знаменитой задачу о числе пар кроликов после *n* периодов размножения. Приведу формулировку придуманной им задачи:

«Сколько пар кроликов в один год от одной пары рождается?»

Решение задачи, приведенное Леонардо, состоит из довольно пространного словесного описания. Вот его начало:

«Некто поместил пару кроликов в некотором месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течение года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а потомство кролики приносят со второго месяца после своего рождения. Так как первая пара в первом месяце дает потомство, удвой, и в этом месяце окажутся две пары…».

Фибоначчи постулировал в высшей степени упрощенную модель процесса продолжения кроличьего рода, полагая, что из каждого помёта вместе с родителями для дальнейшего размножения оставляется только одна пара крольчат, а умершие, бесплодные или несовместимые крольчата заменяются. Фибоначчи подменил способность крольчат достигать зрелости через 4–5 месяцев одним месяцем и принял допущение, что после второго месяца они обязательно приносят потомство. Для сформулированной таким образом идеализированной задачи он дал ее правильное решение, которое показало, что размножение кроликов происходит по более сложному закону, чем геометрическая прогрессия $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

Результат подсчёта пар кроликов в задаче Фибоначчи можно представить в общем виде следующим образом. Пусть F_{n+2} – число пар кроликов на (n+2)–м месяце. Тогда F_{n+2} равно числу пар половозрелых кроликов на предшествующем месяце F_{n+1} плюс число вновь родившихся пар, которое совпадает с числом пар крольчат F_n, существовавшем на n-м месяце (лишь эти пары кроликов дают потомство). Такое свойство размножения кроликов позволяет определять любое их число по *рекуррентной (возвратной) формуле*

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \qquad (1)$$

где n – номер (параметр), принимающий значения из области **N** целых чисел от 0 до ∞, F_n – n-й член последовательности. Из этой формулы видно, что результативные данные каждого предыдущего шага возвращаются в виде исходных данных для последующего шага, вследствие чего формулы такого типа и получили название рекуррентных (лат. *recurro* – «возвращаюсь, бегу назад»). Пользуясь бесхитростной формулой (1), можно всегда вычислить один за другим любое количество членов последовательности $F_0, F_1, \ldots, F_n, \ldots$, если известны ее первые два члена.

При F_0 = 0 и F_1 = 1 эта рекуррентная формула порождает хорошо известную последовательность замечательных чисел

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 …
$\{F_n\}$	0,	1,	1,	2,	3,	5,	8,	13,	21,	34,	55,	89,	144, …

(2)

Такая последовательность чисел имеет «собственное имя» и называется в честь автора задачи о кроликах **последовательностью Фибоначчи**, а её члены – **числами Фибоначчи**.

Существует простой способ вычисления F_n при $n \geq 0$, – округление значения иррационального числа $\Phi^n/\sqrt{5}$ до ближайшего целого числа. При больших n целые числа F_n чрезвычайно близки к этим иррациональным числам. Отсюда следует, что отношение двух последовательных чисел Фибоначчи стремится при увеличении n к одному из золотых чисел Φ или φ, в зависимости от того берется ли отношение большего числа к меньшему числу или наоборот.

Во многих работах утверждается, что в истории математики задача Фибоначчи является первым примером, приводящем к рекуррентной последовательности. Однако имеется более ранняя задача, которая издавна вызывала интерес у математиков и которая имеет явные черты рекуррентной последовательности. Это античная задача, носящая имя известного иудейского писателя-историка Иосифа Флавия (37 – ок. 100), прославившегося дошедшими до нас на греческом языке двумя основными трудами «Иудейская война» и «Иудейские древности». Его жизнь довольно обстоятельно освещена в романе Л. Фейхтвангера «Иудейская война».

Легенда утверждает, что Иосиф однажды спас свою жизнь благодаря математической одаренности. В ходе иудейской войны он как-то раз был с сорока иудейскими воинами загнан римлянами в пещеру. Воины предпочли самоубийство плену. Было решено встать в круг и убивать каждого третьего из живых до тех пор, пока не останутся двое, которые убьют друг друга. Однако Иосиф счел такой конец лишенным смысла и встал в порочном круге на быстро вычисленное спасительное место (16-е или 31-е).

«По счастливой случайности, а может быть, по Божественному предопределению, остался последним именно Иосиф еще с одним. А так как он не хотел ни самому быть убитым по жребию, ни запятнать свои руки кровью соотечественника, то он убедил и последнего сдаться римлянам и сохранить себе жизнь» [3, с.247].

Задача остаться живым в круге, в котором, начиная с некоторого конкретного места, последовательно каждый m-й человек кем-то убивается, может быть легко решена эмпирически. Однако общий анализ подобной комбинаторной задачи приводит к идее рекуррентности (возвратности), согласно которой решение всей задачи может быть осуществлено с помощью решений той же самой задачи меньших размеров. В последующие века, то есть с I по XIII век, математиками рассматривались несколько модификаций исходной задачи Иосифа [4].

Так что задачи с рекуррентными (возвратными) последовательностями берут свое начало с первых веков нашей эры. Что впервые возникает в кроличьей задаче Леонардо Пизанского, так это такая простейшая рекуррентная формула, в которой каждый следующий член выражается через сумму двух предыдущих. Эта элементарная формула породила одну из самых известных в математике последовательностей натуральных чисел. Она оказалась настолько богата свойствами и обобщениями, что исследования по этой последовательности и по темам, связанным с ней, публикуются до сего дня.

10. Рекуррентная формула (1) может быть переписана в общем виде

$$U_0 = a, \quad U_1 = b,$$
$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \qquad (3)$$

В этом случае каждая произвольная последовательность $\{U_n\}$ будет определяться своими первыми членами a и b. Последовательности $\{U_n\}$ называются *обобщенными последовательностями Фибоначчи*. При U_0 = 0, U_1 = 1 получается последовательность Фибоначчи. При $U_0 = U_1$ = 1 и при U_0 = 1, U_1 = 2 также получается последовательность Фибоначчи. Эти три последовательности отличаются только начальными (стартовыми) членами. При U_0 = 2, U_1 = 1 получается **последовательность Люка**

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12 …
$\{L_n\}$	2,	1,	3,	4,	7,	11,	18,	29,	47,	76,	123,	199,	322, …

, (4)

которая получила свое название в честь французского математика Франсуа Люка (1842 – 1891), внесшего значительный вклад в изучение обобщенных последовательностей Фибоначчи. Именно с его легкой руки замечательные числа (2) стали называться числами Фибоначчи. **Числа Люка** подчиняются тому же рекуррентному соотношению, что и числа Фибоначчи и поэтому они связаны с большим золотым числом: $\lim\limits_{n\to\infty} L_{n+1}/L_n = \Phi$. При $n \geq 2$ любое число Люка L_n определяется величиной Φ^n, округленной до ближайшего целого числа.

Между числами последовательностей Фибоначчи и Люка существуют замечательные *внешние* связи; вот некоторые из них

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}\,, \qquad F_{2n} = F_n L_n\,, \qquad 2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m, \qquad 5F_n = L_{n-1} + L_{n+1},$$

Еще одна примечательная связь была приведена в предыдущей статье. Ниже будет раскрыта *внутренняя* связь между числами этих двух последовательностей. Определенную «родственность» обсуждаемых последовательностей иллюстрирует схема, в которой движение от первых членов 1 и 2 происходит в противоположных направлениях

Последовательность Фибоначчи

1, **2**, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, … →

← …, 123, 76, 47, 29, 18, 11, 7, 4, 3, **1**, **2**

Последовательность Люка

11. В предыдущей статье было показано, что большое и малое золотые числа Φ и φ «расщепляются» на другие иррациональные числа, связанные между собой геометрическими пропорциями

$$\Phi_1 / \Phi_0 = \Phi_2 / \Phi_1 \quad и \quad \varphi_1 / \varphi_0 = \varphi_2 / \varphi_1. \tag{5}$$

Геометрические пропорции (5) легко продолжить, перейдя к непрерывным пропорциям

$$\Phi_1 / \Phi_0 = \Phi_2 / \Phi_1 = \Phi_3 / \Phi_2 = \ldots = \Phi, \qquad \varphi_1 / \varphi_0 = \varphi_2 / \varphi_1 = \varphi_3 / \varphi_2 = \ldots = \varphi,$$

в которых *средними пропорциональными величинами* являются золотые числа Φ и φ.

Числа Φ_n (n = 0, 1, 2, …), «наследуя» закономерность пропорций (5), образуют возрастающую геометрическую прогрессию Φ_0, Φ_1, Φ_2 …, каждый последующий член которой получается из предыдущего умножением на *знаменатель прогрессии* Φ. Числа φ_n (n = 0, 1, 2, …) также образуют геометрическую прогрессию $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$,…, но убывающую, каждый последующий член которой получается из предыдущего умножением на *знаменатель прогрессии* φ. Ввиду того, что $\Phi \cdot \varphi = 1$ и $\Phi_0 = \varphi_0$, обе эти прогрессии можно объединить в одну, простирающуюся в обе стороны от основного первоначального ядра $\Phi_0 = \varphi_0 = 1/\sqrt{5}$. В этом случае повторяется схема, иллюстрировавшая «родственность» последовательностей Фибоначчи и Люка,

$$\overrightarrow{\Phi_0,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \Phi_3,\ \Phi_4,\ \ldots}$$
$$\overleftarrow{\ldots,\ \varphi_4,\ \varphi_3,\ \varphi_2,\ \varphi_1,\ \varphi_0}$$

Вводя отрицательные номера и обозначая $\varphi_n = \Phi_{-n}$ (n = 1,2,…), запишем объединенную геометрическую прогрессию в виде

$$\Phi G = (\ldots, \Phi_{-4}, \ \Phi_{-3}, \ \Phi_{-2}, \ \Phi_{-1}, \ \Phi_0, \ \Phi_1, \ \Phi_2, \ \Phi_3, \ \Phi_4, \ldots), \tag{6}$$

которая удовлетворяет, естественно, рекуррентной формуле (3): $\Phi_{n+2} = \Phi_n + \Phi_{n+1}$, ($n$ = 0, ±1, ±2,…). В дальнейшем эту последовательность чисел будем называть *золотой последовательностью ΦG.*

Несколько первых членов этой бесконечной в обе стороны золотой последовательности (геометрической прогрессии) представлены в таблице.

Таблица

Начальные члены золотой последовательности ΦG

n	-3	-2	-1	0	1	2	3
Φ_n φ_n | Φ_n	Φ_{-3} φ_3	Φ_{-2} φ_2	Φ_{-1} φ_1	Φ_0 φ_0	Φ_1 Φ_1	Φ_2 Φ_2	Φ_3 Φ_3
Выражение через золотые числа	$\varphi^3/\sqrt{5}$ $\Phi^{-3}/\sqrt{5}$	$\varphi^2/\sqrt{5}$ $\Phi^{-2}/\sqrt{5}$	$\varphi^1/\sqrt{5}$ $\Phi^{-1}/\sqrt{5}$	$1/\sqrt{5}$ $\Phi^0/\sqrt{5}$	$\varphi^{-1}/\sqrt{5}$ $\Phi^1/\sqrt{5}$	$\varphi^{-2}/\sqrt{5}$ $\Phi^2/\sqrt{5}$	$\varphi^{-3}/\sqrt{5}$ $\Phi^3/\sqrt{5}$
Выражение через радикалы	$\frac{2\cdot 5 - 4\sqrt{5}}{10}$	$\frac{-1\cdot 5 + 3\sqrt{5}}{10}$	$\frac{1\cdot 5 - 1\sqrt{5}}{10}$	$\frac{0\cdot 5+2\sqrt{5}}{10}$	$\frac{1\cdot 5 + 1\sqrt{5}}{10}$	$\frac{1\cdot 5 + 3\sqrt{5}}{10}$	$\frac{2\cdot 5 + 4\sqrt{5}}{10}$
Выражение через десятичную дробь	0,105572…	0,170820…	0,276393…	0,447213…	0,723606…	1,170820…	1,894427…

Методика получения выражений через радикалы для членов золотой последовательности достаточно проста. Легко видеть, что любой член последовательности при движении от

Φ_0 вправо может быть представлен в общем виде $\Phi_n = \dfrac{F_n \cdot 5 + L_n \cdot \sqrt{5}}{10}$, n = 0, 1, 2, …. При движении влево от ядра Φ_0 слагаемые в числителе дроби знакопеременны и поэтому общее выражение для левых членов последовательности имеет вид

$$\Phi_{-n} = (-1)^n \frac{-F_n \cdot 5 + L_n \cdot \sqrt{5}}{10}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

В этих двух выражениях для членов золотой бесконечной последовательности удивительным образом соединились числа Фибоначчи и числа Люка. Можно сказать и иначе: формулы для Φ_n и Φ_{-n} содержат одновременно числа Фибоначчи и Люка и поэтому выражают их *внутреннюю* родственную связь.

Если найти F_n из разницы равенств для Φ_n и Φ_{-n}, то получим замечательную формулу

$$F_n = \Phi_n - (-1)^n \Phi_{-n} \qquad \text{или} \qquad F_n \sqrt{5} = \Phi^n - (-\varphi)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (7)$$

Вторая запись есть не что иное, как известная формула, которую опубликовал в 1732 году Даниил I Бернулли (1700–1782) [5, с. 90], один из гениальных представителей великих швейцарских математиков Бернулли [2]. Формула (7) была забыта более чем на столетие до 1843 года, когда она вновь была выведена французским математиком Жаком Бине (1786–1856). В литературе ее обычно связывают только с его именем, хотя справедливости ради, вторую формулу (7) следует называть, по меньшей мере, формулой Бернулли–Бине.

Применив для L_n преобразования, аналогичные тем, которые выше были сделаны для F_n, получим из Φ_n и Φ_{-n} формулу для вычисления чисел Люка по их номерам n:

$$L_n = \sqrt{5}\,[\Phi_n + (-1)^n \Phi_{-n}] \qquad \text{или} \qquad L_n = \Phi^n + (-\varphi)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (8)$$

К настоящему времени имеется множество способов вывода формул (7) и (8). Представленный в этой статье метод их получения отличен от всех известных выводов. Его необычность заключена, прежде всего, в том, что получаемые формулы для вычисления чисел Фибоначчи и Люка по их номерам являются следствием внутренней структуры золотых чисел Φ и φ. Эти формулы органично присущи золотой последовательности (6).

12. Золотая последовательность ΦG (6), кроме порождения изумительных формул (7) и (8), обнаруживает еще ряд удивительных свойств, связанных с геометрическими объектами. Рассмотрим два примера необычного проявления чисел этой последовательности.

Первый геометрический пример возьмем из предыдущей статьи (1.Тонкая структура) о разделении квадрата с единичной стороной на пять равновеликих частей. В том построении внутри единичного квадрата по его периметру были расположены четыре прямоугольника со сторонами Φ_{-1} и Φ_1, а в центре располагался маленький квадрат со стороной $\Phi_0 = 1/\sqrt{5}$. Площадь каждой из пяти фигур равна 1/5. Теперь же к исходному единичному квадрату добавим снаружи по его периметру четыре прямоугольника со сторонами Φ_{-2} и Φ_2, то есть со сторонами, соответствующими следующим членам золотой последовательности ΦG (6), если двигаться в разные стороны от её ядра Φ_0 (**рис. 1**). Площадь каждого прямоугольника по-прежнему равна 1/5. В результате построения получился новый квадрат с равными по площади вписанными геометрическими фигурами, в размерах которых попарно присутствуют начальные члены золотой последовательности ΦG (6), а именно Φ_{-2}, Φ_{-1}, Φ_0, Φ_1 и Φ_2 .

Второй геометрический пример состоит в следующем. Возьмем квадрат с единичной стороной и впишем в него слева золотой прямоугольник со сторонами 1xφ. Затем последовательно будем вписывать по направлению против часовой стрелки уменьшаемые на каждом этапе в φ раз прямоугольники, как это показано на **рис. 2**. Уменьшающиеся прямоугольники со сторонами φ^m x φ^{m+1} (m = 0,1,2,…) будут, не меняя своего вертикального положения, как бы двигаться внутри квадрата вокруг некоторой особой точки G и одновременно стремиться к ней. Точка G является точкой пересечения диагонали единичного квадрата OA и диагонали прямоугольника CB. Чтобы определить положение этой исключительной точки примем за начало координат левый нижний угол квадрата. Несложные вычисления показывают, что координаты особой точки $G(x_0, y_0)$ имеют следующие значения:

[2] Даниил I Бернулли уроженец города Гронингена (север Нидерландов). В 1725–1733 гг. работал на кафедрах физиологии и механики в Петербургской академии наук. Публикацию отмеченной формулы в литературе ошибочно относят к 1728 году (см. Приложение).

$$x_0 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \Phi_1 = 0{,}723606..., \qquad y_0 = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \Phi_1 = 0{,}723606...$$

Диагональ квадрата OA и диагональ прямоугольника BC делятся особой точкой $G(x_0, y_0)$ в отношении OG/GA = BG/GC = Φ^2.

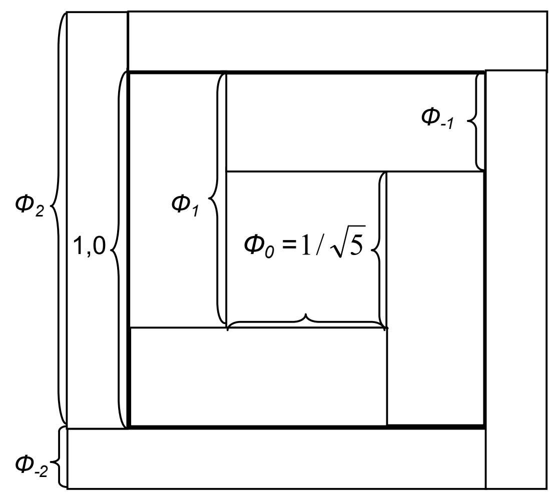

Рис.1. Центрально-симметричное разбиение единичного квадрата на пять равновеликих частей и присоединение еще четырех частей.

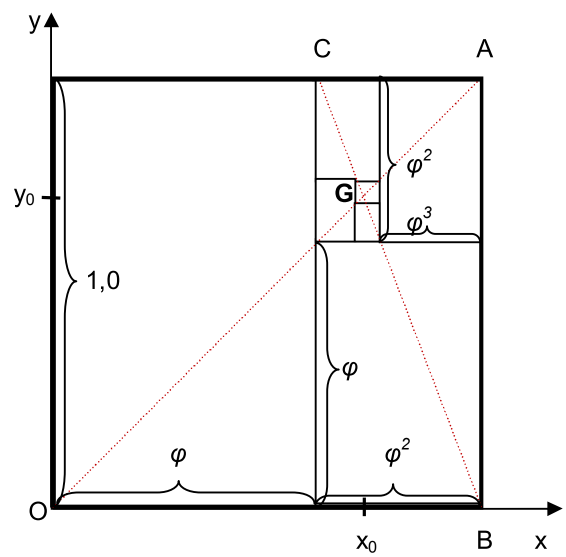

Рис. 2. Нахождение особой точки $G(x_0, y_0)$ квадрата.

Если провести через особую точку $G(x_0, y_0)$ горизонтальную и вертикальную линии (**рис. 3**), то они разобьют исходный единичный квадрат на два квадрата со сторонами Φ_1 и Φ_{-1}, и два прямоугольника со сторонами Φ_1 x Φ_{-1}. Все эти величины соответствуют начальным членам золотой последовательности *ФG* (6).

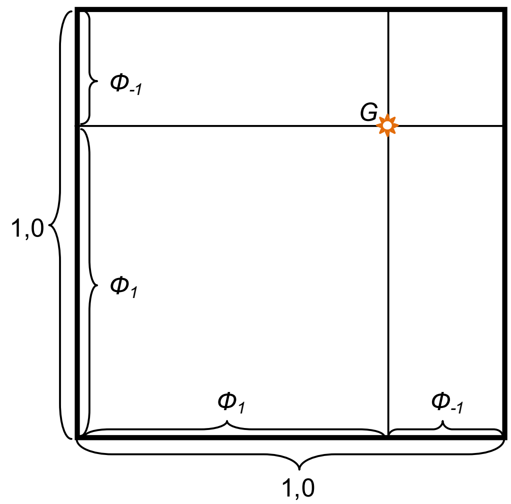

Рис. 3. Разбиение квадрата особой точкой $G(x_0, y_0)$ на четыре фигуры с параметрами из числовой золотой последовательности ΦG.

13. Приведенные примеры наглядно показывают, сколь неожиданным может быть обнаружение в геометрических фигурах начальных чисел золотой последовательности ΦG (6). В следующей статье покажем, что эти два случая не исчерпывают всего многообразия проявлений чисел Φ_n (n = 0, ±1, ±2,…) в геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белянин В.С. Таинство чисел золотой пропорции. 1.Тонкая структура // http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=18&sm=2
2. Жюль Верн Собр. соч. в 12 т. Т. 5. «Таинственный остров». – М.: Худ. лит., 1956.
3. Иосиф Флавий Иудейская война. – Мн.: Беларусь, 1991.
4. Болл У., Коксетер Г. Математические эссе и развлечения. – М.: Мир, 1986.
5. Bernoulli, D. Observationes de seiebus, quae formantur ex additione vel subtraction quacunque terminorum se mutuo consequentium, ubi praesertim earundem insignis usus pro inveniendis radicum omnium aequationum algebraicarum ostenditur. – Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae ad annum MDCCXXVIII, 1732, t. III, p. 85–100.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ниже воспроизводятся копии оригинальных страниц журнала «Комментарии» Петербургской академии наук, в котором Даниил I Бернулли опубликовал формулу для вычисления любого члена последовательности чисел 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … по его номеру. В XVIII веке был разработан общий метод получения таких формул для любых возвратных (рекуррентных) последовательностей и математики на них особо не останавливались. В ту далекую эпоху приведенная последовательность ещё не была столь популярна, как сейчас и не называлась последовательностью Фибоначчи, что хорошо видно из текста статьи. Эта последовательность встречалась в трудах и других математиков того времени, но никак не привлекала к себе внимания.

Воспроизводятся заглавная страница журнала, страница 85 начала статьи Бернулли и две страницы, на которых в пункте 7 описывается получение формулы, ставшей впоследствии популярной.

Я решил привести данные страницы в статье, чтобы подтвердить документально приоритет Бернулли в получении известной формулы. Помимо этого хотелось остановить многочисленных авторов, которые переписывают друг у друга неверный год публикации этой формулы.

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS PETROPOLITANAE

TOMVS III.

AD ANNVM CIↃ IↃCC XXVIII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE
CIↃ IↃCC XXXII.

DANIELIS BERNOVLLI, IO. Fil.

OBSERVATIONES DE SERIEBVS

QVAE FORMANTVR EX ADDITIONE VEL SVBTRACTIONE QVACVNQVE TERMINORVM SE MVTVO CONSEQVENTIVM,

Vbi praeſertim earundem inſignis vſus pro inueniendis radicum omnium Aequationum Algebraicarum oſtenditur.

1.

Anni ſunt fere quinque, quod Venetiis agens tumultuarias quasdam circa ſeries obſeruationes cum Nobili Veneto communicaueram, quas paulo poſt idem Nobilis, meo tamen nomine, imprimi curauit vna cum aliis theorematibus geometricis ſub titulo *Exercitationum Geometricarum*. Mentionem ibi feceram ſerierum quarum quilibet terminus duorum praecedentium ſummae aequatur, neſcius illas primo a Keplero poſtea a Domino Caſſini fuiſſe adhibitas, et denique a Cel. Geometris Dominis Montmort, Moivre, Goldbach, Nicolao Bernoulli Patrueli meo aliiſque omni ſucceſſu exploratas et quidem ſub facie multo generaliori: imo praeſtitiſſe doctiſſimos viros, quod fieri poſſe tunc nondum putabam, nimirum terminum generalem inueniſſe pro omnibus iſtius modi ſeriebus, quarum exemplum allatum a M. Sept. 1728.

L 3 me

natur $=A$, erit $B=\alpha^{x-1}$, $C=\alpha^{x-2}$, $D=\alpha^{x-3}$ … $E=\alpha^{x-N+1}$, hinc aequatione facta ad legem propoſitionis eademque diuiſa per α^{x-N+1}, habebitur $\alpha^{N-1}=m.\alpha^{N-2}+n.\alpha^{N-3}+p.\alpha^{N-4}\ldots\ldots+q$, ope cuius aequationis quam *primariam* voco eruetur valor ipſius α, et cum aequatio habeat $N-1$ radices totidem progreſſiones geometricae deſiderato ſatisfacientes inuenientur, quarum quaelibet per numerum conſtantem multiplicari poteſt.

6. Sint iam radices praecedentis aequationis P, Q, R….. S, haud difficulter apparet, omnes ſeries poſſibiles conditioni praecedentis lemmatis ſatisfacientes comprehendi ſub hoc termino generali $\beta.\ P^x+\gamma.\ P^x+\ \delta.\ R^x\ldots+\epsilon S^x$, et cum eaedem ſeries tot habeant ab initio terminos arbitrarios, quot ſunt vnitates in $N-1$. id eſt, quot ſunt radices P, Q, R, ….. S, inſeruient coefficientes β, γ, δ.. ϵ ad terminos arbitrarios definiendos, hinc igitur patet modus vniuerſalis inueniendi terminum generalem omnium ſerierum noſtrarum §. 2. definitarum.

7. E re potius erit regulam expoſitam exemplo quodam illuſtrari, quam vlterioribus verbis explicare. Sit inueniendus terminus generalis huius ſeriei.

1. 1. 2. 3. 5. 8. 13. 21. 34. 55. &c.

in qua quilibet terminus duorum praecedentium ſumma eſt, quaeque incipit a duobus terminis arbitrariis 1. 1. Erit aequatio *primaria* §. 5. $\alpha\alpha=\alpha+1$. cuius radices ſunt $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, indicandae

 lit-

litteris P et Q. vnde terminus generalis pro omnibus ſeriebus, quarum termini vbique duorum praecedentium ſummae aequales ſunt, fit $\beta(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^x+\gamma(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^x$, qui inſeruiet pro exemplo particulari modo allato, ſi poſito ſucceſſiue $x=0, x=1$, quantitates reſultantes ponantur aequales nihilo et vnitati (qui ſunt termini quorum exponentes ſunt 0 et 1); ergo $\beta+\gamma=0$, et $\beta(\frac{1+\sqrt{5}}{2})+\gamma(\frac{1-\sqrt{5}}{2})=1$; ſeu $\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\gamma=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, ita vt tandem terminus generalis allatae ſeriei ſit $[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^x-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^x]:\sqrt{5}$.

8. Hinc manifeſtum eſt, haud futurum fuiſſe vt terminus generalis exhiberi poſſet, niſi tot eſſent aequationis *primariae* radices, quot termini concurrunt ad formandum ſequentem. Quid ergo ſi in eadem aequatione duae pluresue radices eaedem ſint? huic autem incommodo remedium afferetur, ſi radix in termino generali multiplicata intelligatur per $b+cx+dxx\ldots.+ex^{m-1}$, vbi m indicat, quoties radix comprehenditur in aequatione hocque de ſingulis radicibus obſeruandum eſt. Sit v. gr. terminus generalis indagandus huius ſeriei

0. 0. 0. 0. 1. 0. 15. -10. 165. -228. &c.

incipientis a quinque terminis arbitrariis, et cuius lex requirit, vt ſit vbique $A=0B+15C-10D-60E+72F$. hic aequatio *primaria* lemmatis dat $\alpha^5-15\alpha^3+10\alpha\alpha+60\alpha-72=0$, cuius quinque radices ſunt $\alpha=2$, $\alpha=2$, $\alpha=2$, $\alpha=-3$ et $\alpha=-3$. Dico itaque terminum generalem propoſitae ſeriei fore $(b+cx+dxx).\ 2^x+(e+fx).\ (-3)^x$ et poſſe ex comparationibus quinquies inſtitutis termini generalis cum ter-