С.Л. Василенко

Расширение золотого сечения на структуры обобщенных средних и их аттракторы

Бди в оба

Феномен чисел Фибоначчи, структурированных относительно золотого сечения, действительно впечатляет.

Пожалуй, после натурального ряда или чётных (нечётных) чисел это наиболее известная и востребованная рекуррентная последовательность в различных практических и теоретических исследованиях с многообразными интерпретациями и обобщениями.

А вот с физико-математическим толкованием, скажем, не так уж и густо.

Разве что повсеместно транслируемая известная "кроличья сага" самого Фибоначчи, да множественное расширение "домино-ассоциации" [1] такое, что «отношение вариантов аддитивной сборки двух соседних натуральных чисел в виде последовательности единиц и двоек стремится к числу золотого сечения».

Что же на самом деле представляют либо скрывают числа Фибоначчи?

Или что за ними может стоять ещё? – Возможно, сразу неприметное, но достаточно ясное, понятное и доходчиво объяснимое.

С другой стороны, числа Фибоначчи группируются вокруг уникальной и удивительной константы – золотого сечения (ЗС). В связи с этим напрашивается мысль, что рядом с ЗС могут находиться похожие аттракторы, структурно связанные с общей методологией формирования ЗС. А она может вытекать не только из математической пропорции.

Глобальные константы (наравне с числами π или e) потому и носят всеобщий характер, поскольку обычно затрагивают самые неожиданные сферы человеческих знаний.

Модернизированное прочтение. Обратимся к понятию среднего. И его самой простой разновидности – среднеарифметической величине.

Не составляет особого труда провести аналогию, что дискретная рекуррентная последовательность чисел Фибоначчи на каждом шаге – это удвоенное среднее арифметическое двух предшествующих элементов ряда. То есть отдельный элемент (терм) последовательности Фибоначчи второго порядка с единичными коэффициентами равнозначен удвоенному арифметическому среднему двух предыдущих термов.

В виртуальном отражении получается так, что сначала мы как бы находим среднеарифметическое значение последней пары, и затем его удваиваем.

Понятно, что реальное удвоение половинки ничего не меняет. Это своего рода сопровождение частушек танцевальными движениями на месте: «шаг вперёд и шаг назад».

Но не будем забывать, что понятие среднего довольно широкое. И то, что самоочевидно как "масло масляное" для схемы-процедуры Фибоначчи, вовсе не тривиально для других форм определения среднего.

Достаточно вспомнить из математической статистики вечное несовпадение выборочных вероятностных характеристик–показателей центра распределения: оценки математического ожидания, моды, медианы и т.п.

Так или иначе, но есть определенный резон посмотреть на привычную и почти очевидную задачу с позиций меры среднего.

Удвоение среднеарифметического (числа Фибоначчи):

$$a_{t+1} = 2\frac{a_t + a_{t-1}}{2}, \quad (a_1, a_2) = (1, 1):$$

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55...$$

Отношение соседних членов ряда с большим номером к меньшему (t = 2, 3, 4…) стремится к своему аттрактору – золотому сечению (переменная A отражает общее отношение к удвоению средних арифметических и последовательностям Фибоначчи, Ф – конкретное число ЗС; в случае усреднения двух чисел они совпадают):

$$A = \frac{a_{t+1}}{a_t} = \frac{a_t + a_{t-1}}{a_t} = 1 + \frac{a_{t-1}}{a_t} = 1 + \frac{1}{A};$$

$$A^2 - A - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618\,.$$

Именно такая схема вывода, на наш взгляд, становится принципиальной в интерпретации-взаимосвязи ЗС и чисел Фибоначчи.

Собственно поэтому аттрактор (золотое сечение) не зависит от начальных условий, когда все двучленно-аддитивные рекуррентные последовательности независимо от исходных затравочных чисел, в конце концов, группируются вокруг ЗС.

Оперируя со стандартной аддитивной моделью – "суммой двух", мы не видим среднего арифметического. Нам не представлено удвоение, как отдельное действие.

Мы наблюдаем сразу результат удвоения среднего арифметического.

В частности, по такой схеме выстраиваются семечки-плоды на корзинке подсолнуха, образуются листья многих растений и др. Очередной цветок или лист размещается на спирали как бы посредине предыдущих, но с удвоением шага относительно центра.

В результате достигается оптимальное расположение фотосинтезирующих объектов.

Развитие задачи удвоения средних. Среднеарифметическое нескольких чисел относится к Пифагоровым средним[1] наравне со средним геометрическим и средним гармоническим. Эти средние изучались пифагорейцами и более поздними греческими математиками в связи с важностью использования в геометрии и музыке.

Дальнейшее их обобщение привело к понятию среднеквадратического значения и вообще средне степенного, которое в свою очередь является частным случаем средних Колмогорова[2], обычно используемых в статистике и эконометрике [2, гл. 5].

По аналогии с моделью удвоения среднеарифметического можно синтезировать подобные модели для других видов средних.

Удвоение среднего гармонического:

$$h_{t+1} \cong 2\frac{2h_t h_{t-1}}{h_t + h_{t-1}}, \quad (h_1, h_2) = (1, 1):$$

1, 1, 2, 2, 4, 5, 8, 12, 19, 29, 45... [3, A093335].

Среднегармоническое положительных чисел – это обратная величина к среднему арифметическому их обратных.

Терм данной целочисленной последовательности – удвоенное гармоническое среднее двух предшествующих термов, округленное до ближайшего целого числа.

Отношение соседних членов ряда стремится к константе:

$$H = \frac{h_{t+1}}{h_t} = \frac{4h_{t-1}}{h_t + h_{t-1}} = \frac{4}{\dfrac{h_t}{h_{t-1}} + 1} = \frac{4}{H+1};$$

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_means.
[2] http://ru.wikipedia.org/?oldid=28333879.

$$H^2 + H - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} \approx 1{,}562 .$$

Примечательно, что эквивалентное разностное уравнение и соответствующая рекуррентная последовательность $f_{t+1} = -f_t + 4f_{t-1}$ приводит к другому аттрактору $\frac{-\sqrt{17} - 1}{2} = -H - 1 \approx -2{,}562$, как максимальному по модулю корню характеристического квадратного уравнения.

Геометрическое построение величины H достаточно простое (рис. 1):

в прямоугольнике размером 0,5×2 проводится диагональ, и поворотом циркуля от неё отсекается (вычленяется) отрезок, равный меньшей стороне прямоугольника.

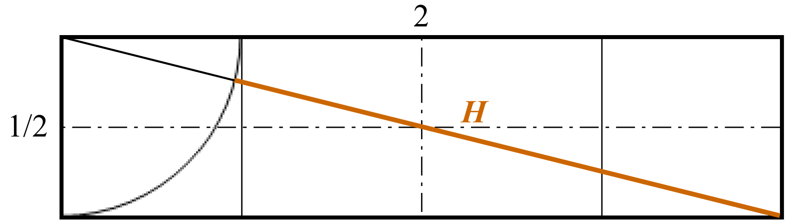


Рис. 1. Геометрическое построение аттрактора удвоенного среднего гармонического

Константа H имеет отношение к единичной сумме следующего бесконечного ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c^{-\lceil \sqrt{k} \rceil} = 1 ,$$

где $c = H + 3 = \left(\sqrt{17} + 5\right)/2$, $\lceil \xi \rceil$ – целая часть от ξ [3, A082486].

<u>*Удвоение среднего геометрического*</u>:

$$g_{t+1} \cong 2\sqrt{g_t g_{t-1}}, \quad (g_1, g_2) = (1, 1) :$$

1, 1, 2, 2, 4, 5, 8, 12, 19, 30, 47, 75 ... [3, A093333].

Терм данной последовательности (A093335) – это удвоенное геометрическое среднее двух предшествующих термов, округленное до ближайшего целого числа.

Отношение соседних членов ряда стремится к константе

$$G = \frac{g_{t+1}}{g_t} = \frac{2\sqrt{g_t g_{t-1}}}{g_t} = 2\sqrt{\frac{g_{t-1}}{g_t}} = \frac{2}{\sqrt{G}} = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587 .$$

Данный ряд можно считать геометрически-средним аналогом чисел Фибоначчи.

<u>*Удвоение среднеквадратического*</u>:

$$q_{t+1} \cong 2\sqrt{\frac{q_t^2 + q_{t-1}^2}{2}}, \quad (q_1, q_2) = (1, 1) :$$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 56, 92, 152 ... [3, A093332].

Аттрактор-отношение соседних членов ряда (относительно предыдущих значений) стремится к константе

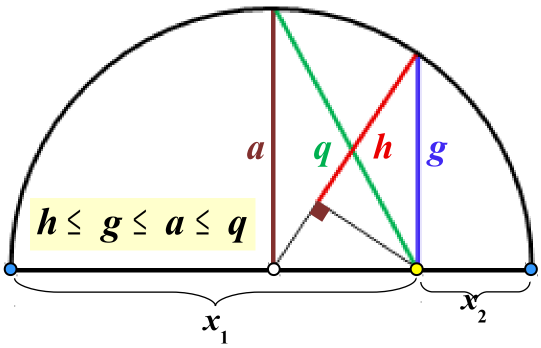
$$Q = \frac{q_{t+1}}{q_t} \cong \sqrt{2\frac{q_t^2 + q_{t-1}^2}{q_t^2}} = \sqrt{2\left(1 + Q^{-2}\right)} ;$$

$$Q^4 - 2Q^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{1+\sqrt{3}} \approx 1{,}653\,.$$

Таким образом, аттракторы удвоенных средних (второго порядка, – по количеству слагаемых) выстраиваются в строгой последовательности:

$$(H, G, A, Q) = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2},\ \sqrt[3]{4},\ \frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \sqrt{1+\sqrt{3}} \right) \approx (1{,}562;\ 1{,}587;\ 1{,}618;\ 1{,}653)\,.$$

Именно в такой очерёдности (от меньшего значения к большему) они располагаются для любой пары неравных между собой чисел (рис. 2). Равенство достигается при $x_1 = x_2$.



Средние (*means*):
– гармоническое (*harmonic*);
– геометрическое (*geometric*);
– арифметическое (*arithmetic*);
– квадратическое (*quadratic*).

Рис. 2. Геометрическая интерпретация наиболее распространённых средних

В этом контексте число $A = \Phi$ следует считать основной (базовой) константой золотого сечения, а величину $\phi = \Phi^{-1} = \left(\sqrt{5}-1\right)/2 \approx 0{,}618$ – дополнительной (сопряженной).

Примечательно, что сами аттракторы, все без исключения, получены без привязки к конкретным начальным условиям. Исходные числа нам были нужны исключительно для того, чтобы чисто иллюстративно сформировать конкретный числовой ряд.

Поэтому, какую бы пару чисел (не равных одновременно нулю) мы не взяли, в результате многократного применения алгоритмической процедуры мы обязательно выйдем на соответствующий аттрактор.

Удвоения среднего степенного. Описанные средние являются частными случаями единой модели обобщенного среднего степенного для набора n положительных вещественных чисел $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$M_p(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{1/p}.$$

$$M_{-1} = h = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_n}},\quad M_0 = g = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n},\quad M_1 = a = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n},\quad M_2 = q = \sqrt{\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{n}}\,.$$

Довольно любопытное наблюдение: по мере увеличения средних, их формообразующие формулы, выстроенные в ряд, тоже как бы подтягиваются (поднимаются) снизу вверх.

Заметим, что среднее геометрическое $(m = 0)$ действительно образуется из общей формулы среднего степенного в корень n-й степени из произведения усредняемых чисел, как вырожденный предельный случай $m \to 0$.

В практических вычислениях ноль достаточно заменить, например, на величину 10^{-10}.

Найдем аттрактор для удвоенного среднего степенного двух усредняемых величин:

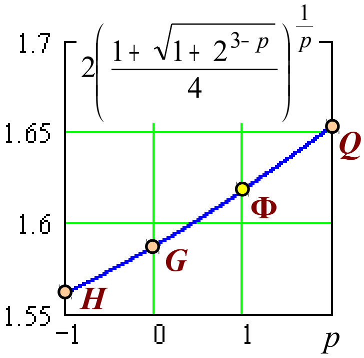


Рис. 3. Средние степеней $p = 0, \pm1, 2$ второго порядка

$$L = \frac{x_{t+1}}{x_t} = 2\left(\frac{x_t^p + x_{t-1}^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} \Bigg/ x_t = 2\left(\frac{1+x_{t-1}^p / x_t^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} = 2\left(\frac{1+S^{-p}}{2}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Обозначив $z = L^p$, приходим к квадратному уравнению $z^2 - 2^{p-1}z - 2^{p-1} = 0$, откуда

$$L = 2\left(\frac{1+\sqrt{1+2^{3-p}}}{4}\right)^{1/p}.$$

Это общая формула, которая объединяет в себе все степенные аттракторы второго порядка (n=2, рис.3). Более того, нет принципиальных ограничений против расширения степеней на всю числовую ось. В математическом аспекте это вполне допустимо. Весь вопрос упирается в целесообразность, интерпретируемость и содержательность.

В частности, при $p = 1$ естественно получаем обычное золотое сечение.

Предостережение. Некоторые из современных "золотосеченцев-алхимиков"[3] чрезмерно грешат вольным и безответственным распространением "золотосодержащей терминологии" на самые разные числовые формы.

Дело порой доходит до абсурда, когда любое число в интервале (1, 2) объявляется обобщенным золотым сечением.

Мы уже отмечали в своих работах пагубность подобных "нововведений", приводящих к дискредитации самой идеи ЗС.

Рассмотренные нами случаи формально тоже дают повод к подобному лжеобобщению золотого сечения, чего делать, конечно, ни в коем случае нельзя.

В действительности нужно вести речь об ином.

Мы взяли общую идеологию получения чисел Фибоначчи (с их свойством группироваться вокруг ЗС), трансформировали её через механизм образования среднего арифметического, и затем расширили на структуры других видов средних и их аттракторы.

В результате получено обобщение задачи усреднения, частным случаем которой естественно является и золотое сечение – единственное, уникальное, неповторимое и принципиальное не поддающееся никаким таким обобщениям.

Ибо фундаментальные математические константы не обобщаются в принципе!

Это нужно иметь в виду всякий раз, когда обращаешься к тематике ЗС.

Ложное стремление придать отдельным работам золотой терминологический лоск за счёт броских псевдонаучных эпитетов привносит только путаницу и понятийный хаос.

От Фибоначчи к трибоначчи... Подобно тому, как последовательности Фибоначчи обобщаются для более двух слагаемых, задача структурирования средних и поиск их аттракторов вполне допускает своё расширение для нескольких усредняемых данных. Правда, поиск аналитических закономерностей в этом случае, конечно, усложняется.

Но это вполне закономерно. Даже обобщение самих последовательностей Фибоначчи натыкается на принципиальную неразрешимость алгебраических уравнений выше четвёртого порядка.

Тем не менее, наша задача в ряде случаев оказывается вполне разрешимой.

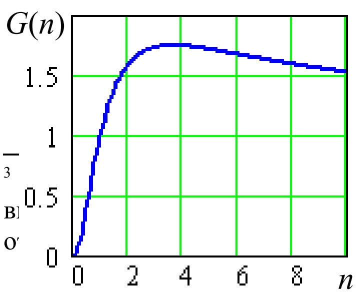


Рис. 4. Изменение аттрактора для среднегеометрического

[3] ... ю исключительно в позитивном смысле, проводя параллели с представителями в... ремлении получить золото за счёт химических реакций сделали немало важных о... естествознания.

Например, можно показать, что последовательности, образованные за счет n-кратного геометрического среднего n числовых величин $x_t = n \cdot \sqrt[n]{x_{t-1} \cdots x_{t-n}}$, имеют следующий аттрактор (рис. 4):

$$G(n) = \lim_{t \to \infty} \frac{x_{t+1}}{x_t} = n^{\frac{2}{n+1}}.$$

Всё достаточно просто: количество усредняемых величин n возводится в квадрат, и извлекается корень $(n+1)$-й степени.

Максимум аттрактора $G_{max} \approx 1{,}745$ соответствует значению степени $n \approx 3{,}591$ – корню уравнения $n \ln n = n + 1$, вытекающего из нулевой производной.

Можно также предложить общую схему определения n-го аттрактора для гармонического среднего.

Она подобна численному решению задачи n-боначчи, только в обратных величинах.

Приемлемым способом находим максимальный по модулю корень λ уравнения

$$n^2 x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1.$$

Величина λ^{-1}, обратная корню λ, – искомое значение аттрактора H_n для последовательности вида $x_t = \dfrac{n^2}{\dfrac{1}{x_{t-1}} + \ldots + \dfrac{1}{x_{t-n}}}$.

Рассмотрим весьма полезный альтернативный вариант, для чего запишем и преобразуем характеристическое алгебраическое уравнение n-боначчи:

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = \frac{1}{x}\left(x^n + x^{n-1} + \ldots + x\right) = \frac{1}{x}\left(x^n + x^n - 1\right) = 2x^{n-1} - x^{-1}.$$

Разделив его почленно на x^{n-1}, получаем $x + x^{-n} = 2$.

Последнее уравнение предпочтительнее исходного тем, что содержит минимальное число слагаемых, а также упрощает исследование структур с дробными значениями степени n. Важно лишь в соответствующих поисковых процедурах начальные приближения корня положить >1, например 1,5.

Аналогично видоизменим уравнение для гармонического среднего

$$n^2 x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 = \frac{1}{x}\left(x^n + x^{n-1} + \ldots + x\right) = \frac{1}{x}\left(x^n + n^2 x^n - 1\right) = \left(1 + n^2\right)x^{n-1} - x^{-1}.$$

Разделив на x^{n-1}, получаем $n^2 x + x^{-n} = 1 + n^2$.

В отличие от модели n-боначчи, начальные приближения корня в этом случае наоборот следует положить <1, например 0,5.

В частности, для $n = 2$ имеем $4x + x^{-2} = 5$ или $4x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ с положительным действительным корнем $\lambda = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2} = \Phi^{-1}$.

В общем случае последовательности (не обязательно целочисленные), образованные за счет n-кратного обобщенного среднего степенного, представимы в рекуррентной форме

$$x_t = n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{t-i}^{p}\right)^{1/p}$$

и имеют предельные аттракторы вида (рис. 5)

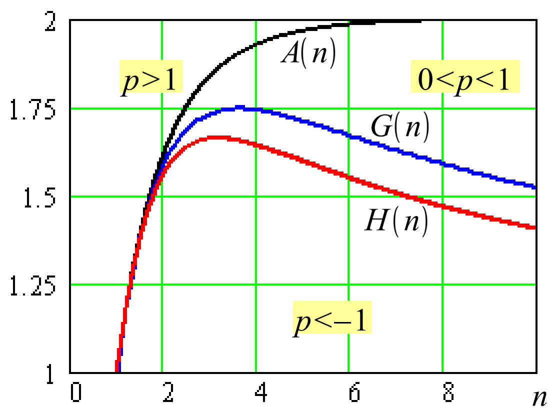


Рис. 5. Изменение степенных аттракторов

$$L_p(n) = n \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{t-i}^{p} \right)^{1/p} \Bigg/ x_{t-1} \,,$$

включая его частные случаи:

$H(n) = L_{-1}(n)$ – гармонический;

$G(n) = \lim\limits_{p\to 0} L_p(n)$ – геометрический;

$A(n) = L_1(n)$ – арифметический.

Кривая $H(n)$ имеет максимум $H_{\max} \approx 1{,}662$ при $n \approx 3{,}138$.

Размышлизмы. Примечательно, что линия арифметического (фибоначчиевого) аттрактора является пограничной, отделяя две асимптоты: 1 и 2. То есть аттракторы модели *n*-боначчи (*p* = 1) с увеличением порядка n стремятся к 2 согласно уравнению $x + x^{-n} = 2$.

Но стоит хотя бы незначительно уменьшить степень p и картина сразу изменяется.

Сначала кривая возрастает, где-то очень далеко-далеко (по *n*) достигая максимума ≈ 2, а затем, плавно уменьшаясь, в бесконечности стремится к единице.

Таким образом, с точки зрения степенных аттракторов модель *n*-боначчи можно условно назвать "предельной моделью бумеранга".

При $p \geq 1$ бумеранг (степенной) никогда не возвращается, стремясь в пределе к двум.

При $p < 1$ бумеранг, пройдя точку максимума, рано или поздно ассимптотически возвращается к единице.

Что-то сродни первой космической (круговой) скорости в идеальных условиях.

В частности, золотое сечение – предельная точка невозврата предельного атрактора.

Если атрактор $L_p(n)$ при *n* = 2 проходит через точку ЗС или выше её, значит кривая уже никогда не вернётся назад к единице.

В этом констекте золотое сечение ассоциируется с предельным ростом, а также изменением качественного состояния.

Живым системам, скорее всего, соотвествует естественное ограничение $|p| < 1$.

Некоторые из них (улитки, растения) в наибольшей мере приближены снизу к линии арифметического аттрактора $A(n) = L_1(n)$, но никогда её не пересекают, чем достигается максимальный рост, выше которого возникает дефицит питания извне.

Возможно, величина ЗС здесь выступает своеобразным ограничивающим и регулирующим наследственным кодом, когда фаза роста (первоначальное увеличение числа усреднений *n*) после достижения максимума сменяется фазой медленной деградации (увядания).

Запредельные состояния по кривой аттрактора $A(n) = L_1(n)$ и выше неё свойственны только глобальным живым образованиям, способным структурироваться в пространствах большей размерностью, чем 3. Это приблизительно похоже на то, что мы обычно вкладываем в понятие бога и ангелов, оснащённых мощным интеллектом и разумом.

Впрочем, здесь необязательно должны быть какие-либо искусственные ограничения.

Догмат-теза о том, что бог есть и он один, в контексте истинности ничем не отличается от гипотезы, что всемирных разумов (богов) несколько. С собственными вотчинами в виде метагалактик, макро- и микромиров. Со своими спорами и разногласиями. Тёмными материями и войнами, сопровождающимися взрывами звёзд и проч.

Так что древние представления человека о вероятном многобожии вполне осязаемы и допустимы.

Весь вопрос лишь в смыслах и значениях...

Вместо заключения. Предложенное расширение золотого сечения на структуры обобщенных средних и их аттракторы имеет, прежде всего, теоретическое значение.

Оно позволяет сопоставить бесконечному множеству конкретных значений любого вида среднего один единственный аттрактор подобно тому, как любая пара чисел, "запряженная" в двухчленно-аддитивную рекурсию, всегда приводит к золотому сечению.

При этом схему Фибоначчи допустимо интерпретировать как модель удвоения среднеарифметического двух предшествующих значений.

В то же время следует ожидать и конкретные практические приложения.

Как отмечает автор работы [4], в архитектуре и строительстве издавна нашли применение различные способы усреднения: арифметическое, геометрическое, гармоническое и др.

В этой связи весьма полезным представляется получение и анализ любой информации о возможном использовании или проявлении степенных аттракторов, и в первую очередь, их наиболее простых вариантов в виде

$$(H, G, A, Q) = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2},\ \sqrt[3]{4},\ \frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \sqrt{1+\sqrt{3}}\right) \approx (1{,}562;\ 1{,}587;\ 1{,}618;\ 1{,}653).$$

В целом образующиеся аттракторы или предельные отношения соседних членов рядов не зависят от начальных значений и определяются лишь степенью обобщенного среднего и числом усредняемых элементов.

Литература:

1. *Василенко С.Л.* Кролики Фибоначчи на Великой китайской стене // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16102, 08.10.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161710.htm.

2. *Орлов А.И.* Эконометрика: 3-е изд. – М.: Экзамен, 2004. – 596 с.

3. *The On-Line* Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS). – http://oeis.org/.

4. *Белянин В.С.* Таинство чисел золотой пропорции. 2. Тонкая структура // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2011. – http://www.artmatlab.ru/templates/text/r_display/editor/ac18/gs7.pdf.