С.Л. Василенко

Гиперболические фантазии

Фантастическое составляет
сущность действительности.
Ф.М.Достоевский

Причинно-следственная галерея. В классическом представлении число Ф золотого сечения (ЗС) является положительным решением пропорции: Ф=*Ц*:*Б*=*Б*:*М*, связывающей *Ц*елое с его *Б*ольшей и *М*еньшей частями неповторимым образом – единственным из бесконечного многообразия.

Это число – иррациональное.

Отрезок длиной Ф несоизмерим с отрезком единичной длины.

В его основе лежит квадратный корень из пяти, который геометрически выражается гипотенузой прямоугольного треугольника с катетами длиной 1 и 2.

Соответственно правильный звездчатый пятиугольник – основной "поставщик" ЗС.

Алгебраическая форма решения исходной пропорции в своём эквивалентном представлении приводит к возвратному однородному уравнению с единичными коэффициентами $f_{n+1}=f_n+f_{n-1}$.

В зависимости от пары начальных условий, не обязательно целочисленных, это уравнение рекурсивно порождает множество последовательностей Фибоначчи. Все они своим отношением f_{n+1}/f_n сходятся к аттрактору – числу золотого сечения Ф.

Наиболее удобная из них для анализа образует при $(f_0,f_1)=(2,1)$ так называемые числа Люка, имеющие простое аналитическое представление $L_n=\Phi^n+(-\Phi)^{-n}$.

Форма последней записи напоминает формулы гиперболических функций синуса и косинуса $\mathrm{ch}\,x,\mathrm{sh}\,x=(e^x\pm e^{-x})/2$, что натолкнуло отдельных учёных на введение соответствующих обозначений с наделением их якобы полезными качествами.

Правда, как оказалось, ничего дополнительного в математику они не привносят, и привнести не могли, ибо являются результатом обычного переобозначения.

Они полностью повторяют известные огибающие линии к кривым семейства функций, основанных на модификациях непрерывной функции Люка, о чём подробно изложено в работах [1, 2].

Более того, одна простая формула для тех же чисел Люка $L_n=\Phi^n+(-\Phi)^{-n}$ (куда уж проще?) элементарно разбивается на два частных соотношения: отдельно для чётных $L_{2n}=\Phi^n+\Phi^{-n}$, и отдельно для нечётных членов $L_{2n+1}=\Phi^n-\Phi^{-n}$.

Вот и вся манипуляционная премудрость, ни на йоту не продвигающая нас к новым горизонтам знаний.

Очевидное – вероятное. Следует отметить, что использование взаимозаменяемых буквенных обозначений, введение модифицированных переменных и подобные вспомогательные действия иногда преподносятся отдельными авторами как материал с пометкой новизны.

Обнаруживается это без особых затруднений. Хотя определённое время содержимое способно создавать фоновый "белый шум" экстравагантным, но малопродуктивным материалом.

Не минула судьба и естественную гиперболичность, изначально свойственную возрастающим числовым последовательностям Фибоначчи, с её трансформацией теперь уже на геометрические построения.

Так, основной лейтмотив пространной работы [3] сводится к построению "золотого" прямоугольника с отношением сторон $\Phi:1\equiv\left(1+\sqrt{5}\right)/2$, вершины которого расположены на двух ветвях равнобочной гиперболы $x^2-y^2=1$.

Решение тривиальное:

$$x = y\Phi \;\;\Rightarrow\;\; y^2\left(\Phi^2 - 1\right) = 1 \;\;\Rightarrow\;\; y' = 1/\sqrt{\Phi} = \sqrt{\phi}\,, \quad x' = \sqrt{\Phi}\,. \qquad (1)$$

Четыре вершины прямоугольника определяются соответственно как точки $(\pm\, x', \pm\, y')$, симметричные относительно осей и начала координат.

Какое-либо практическое приложение здесь почти не просматривается.

Обыкновенная задачка в пределах школьного курса математики.

Ну, а идея бесконечной множественности золотых сечений в привязке к длине геометрического отрезка [3] не выдерживает никакой критики, поскольку золотое сечение (ЗС) – это особое отношение соизмеримых частей, определяемое фундаментальной константо Ф.

Равно как и «точки ЗС на ветвях гармонической гиперболы» [3] – нонсенс независимо от вкладываемого смысла. Вольное тиражирование адекватных равенств с заменой переменных также лишено значимости в виду очевидной незатейливости решения (1).

Как говорится, проще некуда.

Гиперболические тенденции. Что же остаётся, выражаясь языком химии воды, в сухом остатке [3]? – Полезным представляется лишь сам замысел формировать на ветвях гиперболы геометрические фигуры, удовлетворяющие заданным свойствам, в частности, с отношением сторон, равным числу золотого сечения.

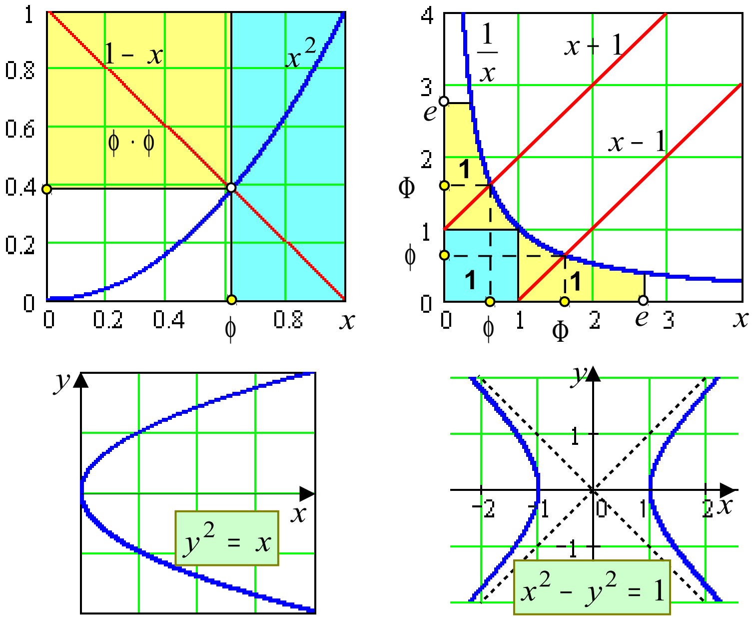

Рис. 1. Аналитико-геометрическая интерпретация квадратичного представления золотого сечения в вариантах параболы и гиперболы

Подобные фигуры строились нами ранее, например, для эллипсов [4] с различными вариантами сопоставления линейных отрезков в отношении ЗС.

Не составляет особого труда распространить этот опыт и на гиперболы.

Золотое сечение одинаково хорошо демонстрируется как пересечением параболы и прямой [5] согласно уравнению $x^2 = 1 - x$, так и адекватными пересечениями гиперболы с двумя прямыми $x \pm 1 = 1/x$ (рис. 1). – Ввиду численной обратимости величин $\phi = \Phi^{-1}$.

Хотя из соображений интерпретируемости, всё же более предпочтителен вариант с параболой.

Во-первых, через фиксированную точку на боковой поверхности конуса можно провести только одно сечение в виде параболы [6, 7], что подчёркивает уникальность ЗС, в отличие от образования бесконечного множества гипербол с вершиной в данной точке.

Во-вторых, параболическая концепция ЗС наиболее ближе подходит к геометрической трактовке [8] построений Евклида (предложение 2.11), отчего уровень доверия многократно возрастает.

Гиперболические тренды. Каноническая форма уравнения гиперболы с вершинами на осях *OX* и *OY* декартовой системы координат имеет вид [9]:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2)$$

где a, b – полуоси сопряжённых ветвей гиперболы.

√ При $a=b=1$ имеем решение (1) (рис. 2-а): красным отмечена основная гипербола, синим – сопряжённая при замене в (2) единицы на -1.

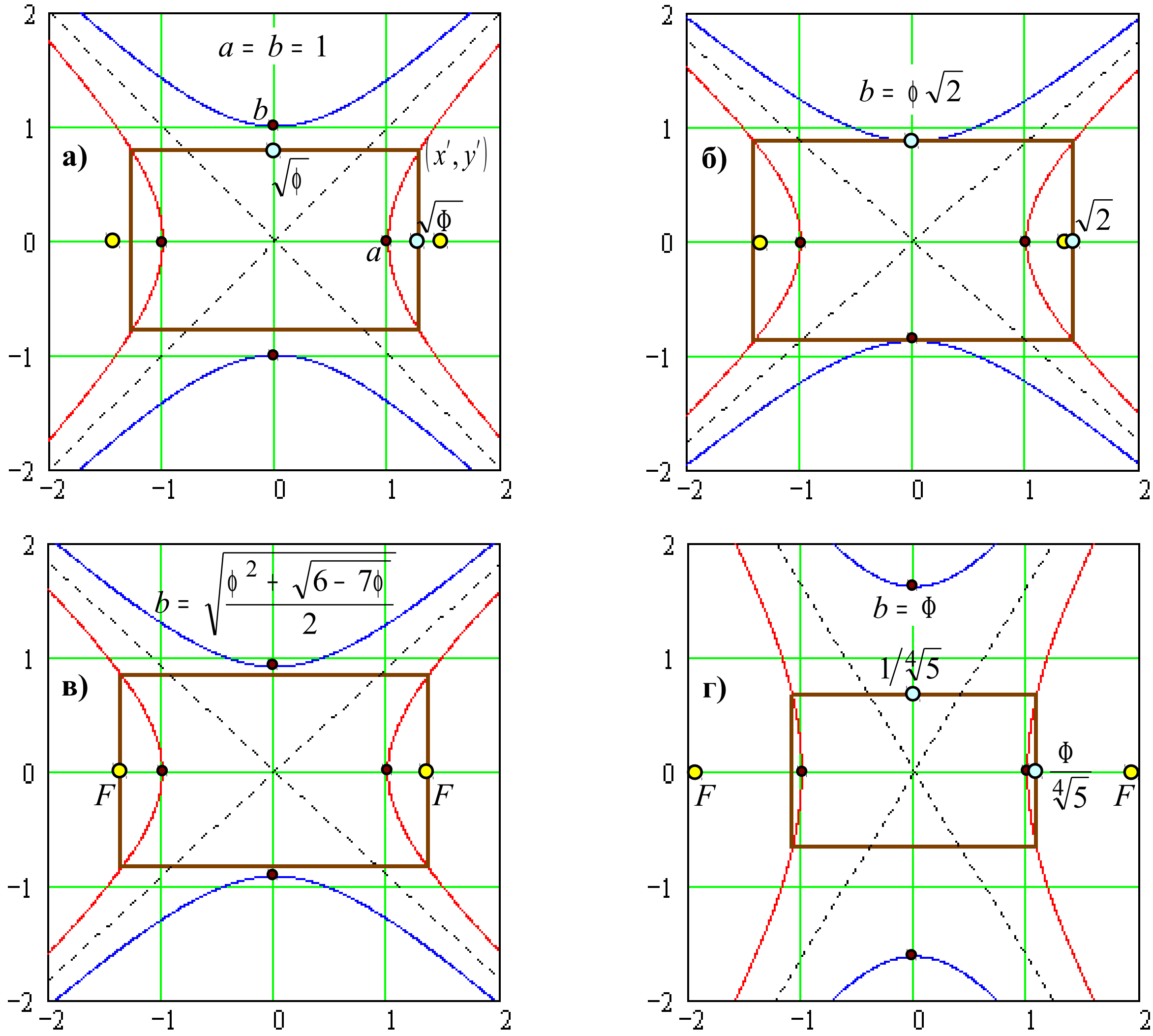

Рис. 2. Варианты "золотых" прямоугольников с отношением сторон 1:Ф и с вершинами на ветвях гиперболы

√ Можно построить "золотой" прямоугольник $x'/y' = \Phi$ так, чтобы он двумя сторонами касался сопряжённых гипербол (рис.2-б):

$$a = 1, \;\; y' = b \;\Rightarrow\;\; x' = \sqrt{2}, \;\; y' = \phi\sqrt{2}.$$

√ Можно построить "золотой" прямоугольник так, чтобы он двумя сторонами проходил через фокусы F (рис. 2-в).

Напомним, что разность расстояний каждой точки гиперболы для фокусов одна и та же и равна расстоянию между вершинами гиперболы. Расстояние от каждого фокуса F до центра гиперболы равно $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Отсюда получаем:

$$a = 1,\ x' = c = \sqrt{1 + b^2} \quad \Rightarrow \quad 1 + b^2 - \frac{(1 + b^2)\phi^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad b^2 = \frac{\phi^2 + \sqrt{\phi^4 + 4\phi}}{2} = \frac{\phi^2 + \sqrt{6 - 7\phi}}{2}.$$

√ Допустимо также полуоси гиперболы задать соотношением $b/a = \Phi$ (рис.2-г):

$$a = 1,\ b = \Phi \quad \Rightarrow \quad y^2\Phi^2 - y^2\phi^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y' = 1/\sqrt{\sqrt{5}},\quad x' = y'\Phi .$$

Возможны и другие варианты расположения прямоугольников.
Идея незамысловатая. Построения несложные. Потому комментарии излишни.

Литература:

1. *Василенко С.Л.* Гиперболические метаморфозы аддитивно-рекуррентных последовательностей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16255, 27.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161750.htm.
2. *Василенко С.Л.* Гиперболические лабиринты на пути к гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15513, 06.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161539.htm.
3. *Владимиров В.Л., Стахов А.П.* Гиперболические уравнения золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16548, 05.06.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321200.htm.
4. *Василенко С.Л.* Золотоносные жилы в планиметрии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16086, 25.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161705.htm.
5. *Василенко С.Л.* Базовое тождество математических основ гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16069, 10.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.
6. *Бронштейн И.Н.* Парабола. – Квант. – 1975. – № 4. – С. 9–16. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/1975/04/parabola.htm.
7. *Бронштейн И.Н.* Общие свойства конических сечений. – Квант. – 1975. – № 5. – С. 31–40. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/1975/05/obshchie_svojstva_konicheskih.htm.
8. *Василенко С.Л.* "Золотой разговор" с Евклидом // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.
9. *Бронштейн И.Н.* Гипербола. – Квант. – 1975. – № 3. – С. 16–24. – http://kvant.mirror1.mccme.ru/1975/03/giperbola.htm.