

## Золотые купола в задаче конусной упаковки евклидового пространства

*Не все купола – храмы,  
Не всякая блёска – золото.*

**Мир математики.** Даже сравнительно поверхностное знакомство с математикой позволяет заметить её главные отличительно-характерные особенности [1, с. 6–8]:

- отвлеченность (число, линия, функция, интеграл и т.п.);
- точность;
- логическая строгость и непреложность выводов;
- чрезвычайная широта применения.

Но при всей своей абстрактности математика жизненна, ибо её понятия и выводы исходят из действительности, находя широкое применение в разных областях науки, техники и жизненной практики. Не требуется доказывать, что «чистая математика может привести к неожиданным выводам и даже оказать влияние на повседневную жизнь» [2, с. 58].

Математика универсальна и может быть языком любой науки. Она – символ мудрости, образец научной строгости и простоты, эталон совершенства и красоты в науке.

По словам Б. Рассела<sup>1</sup> «Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства».

Н. Бор<sup>2</sup> считал, что "математика – это больше, чем наука, это язык".

По мнению одного из ведущих математиков XX века Р. Куранта «Математика содержит в себе черты волевой деятельности, умозрительного рассуждения и стремления к эстетическому совершенству. Её основные и взаимно противоположные элементы – логика и интуиция, анализ и конструкция, общность и конкретность» [3, с. 20].

При этом самым важным и плодотворным завоеванием современного аксиоматического развития науки стало ясное осознание необходимости отказа от представления об основных математических понятиях как о реально существующих предметах [3, с. 24].

Но, несмотря на то, что математика оперирует набором абстрактных форм-структур и не относится к естественным наукам, она широко используется для точной формулировки их содержания и получения новых результатов.

**Как городили огород, создавая проблему на ровном месте...** Чтобы не говорили отдельные авторы, но чрезвычайно узкая область, оперирующая понятием "золотого сечения" (ЗС), – едва-едва заметный островок в обширном пространстве математики.

Конечно, не исключено, что ЗС играет определенную роль в мироздании. Однако это вовсе не означает, что существует некая важная проблема ЗС. Такой проблемы ни в математике или в физике, ни вообще в науке никогда не было и по сей день не существует! Поэтому «консолидация славянских ученых вокруг проблемы золотого сечения», провозглашаемая гармонистами<sup>3</sup>, больше напоминает картинки конспирологической или масонской регулярности, нежели научное сотрудничество в рамках творческого союза.

<sup>1</sup> Берtrand Рассел (1872–1970) – англ. математик, философ, нобелевский лауреат (1950) по литературе. Его вклад в математическую логику считается наиболее значительным со времен Аристотеля. Известен парадокс Рассела или теоретико-множественная антиномия, оперирующая с понятием множества всех множеств.

<sup>2</sup> Нильс Бор (1885–1962) – датский физик-теоретик, нобелевский лауреат (1922) по физике. Секрет его притягательной силы был чрезвычайно прост: «мы не боялись показаться глупыми перед молодежью».

<sup>3</sup> Речь идет о небольшой группе "технарей", философов, филологов, искусствоведов и экономистов, ратующих за развитие отдельной "математики гармонии". Хотя в науке «математика будь чего-либо» отсутствует. А сама гармония более 1000 лет вообще считалась 4-й "матемой".

В то же время вполне логично говорить о сфере применения ЗС в науке и практике.

В крайнем случае, можно даже использовать такое слово, как "проблематика" – совокупность возможных (!) вопросов, взаимосвязанных рассматриваемым объектом.

Ведь нет же проблемы числа  $\pi$ . Зато есть невероятно обширное поле его применения в самых разных областях знаний.

Тогда откуда взяться проблеме ЗС? В чем она может заключаться? Или что конкретно мы собираемся решать? – Путь к истине далеко не обязательно идет через золотое сечение. Для этого нужен "золотой ключик" и, возможно, "уста младенца", которые глаголют истину.

Да и абсолютное большинство спиральных образований, которые часто демонстрируют исследователи, не имеют к ЗС никакого отношения. Хотя и могут иногда его включать.

**Мир правильных форм.** Можно доподлинно утверждать, что своим рождением и развитием математика во многом обязана изучению симметричных равносторонних и/или равноугольных форм.

«Симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство», и «означает тот вид согласованности отдельных частей <объекта>, который объединяет их в единое целое» [4, с. 35–37]. Примечательно и другое: «древние греки никогда не употребляли слово "симметричный" в его современном смысле. В обычном использовании слово *συμμετρικός* означало *соразмерный*, пропорциональный, а у Евклида оно было эквивалентно нашему слову *соизмеримый*» [4, с. 101].

Из планиметрии известно, что количество правильных многоугольников бесконечно, и теоретически можно построить любой правильный  $n$ -угольник – выпуклый многоугольник, у которого все стороны между собой равны

Правда здесь есть некоторые ограничения. Так, по теореме Гаусса–Ванцеля правильный  $n$ -угольник строится с помощью циркуля и линейки<sup>4</sup> тогда и только тогда, когда  $n = 2^k \cdot p_1 \cdot \dots \cdot p_m$ , где  $p_i$  – простые числа Ферма (3, 5, 17, 257, 65537) [5, 6].

А вот, например, правильный семиугольник строится уже с помощью циркуля и *размеченной линейки*, на которой можно делать отметки (засечки) и с помощью которой можно проводить прямые, проходящие через какую-нибудь точку. Причем отмеченные на линейке точки будут принадлежать данным линиям (прямым или окружностям) [7].

Заметим, что перечень инструментов и набор разрешенных операций в значительной степени обусловлен главным образом историческими причинами и, вообще говоря, мог быть другим. Но это больше относится к философии математики [8]. Хотя условность вычерчивания того же правильного семиугольника приводила к неверному толкованию его применения в архитектуре [9], якобы из-за сложности построения.

Тем удивительным представляется положение, когда в трехмерном пространстве имеется *только пять* правильных выпуклых многогранников. «Их часто называют платоновыми телами, так как они играют большую роль в натурфилософии Платона» [4, с. 100].

Но вот уже в общем случае  $N$ -мерной евклидовой геометрии имеется 6 правильных 4-мерных многогранников, а для  $N \geq 5$  размерностей существует по 3 многогранника: симплекс, гиперкуб и гипероктаэдр [10].

**Почему именно 5?** Факт наличия только пяти правильных выпуклых многогранников хорошо известен.

Теорему о том, что платоновских тел ровно пять, и не больше, доказывал ещё Лука Пачоли в своем послании «О божественной пропорции» (1509).

---

<sup>4</sup> Раздел евклидовой геометрии, известный с античных времен. Циркуль и линейка считаются идеальными инструментами, в частности: у линейки нет делений, и она имеет только одну сторону бесконечной длины, циркуль может иметь сколь угодно большой или малый раствор.

Позволим себе некоторое уточнение-повторение знакомых тез, поскольку это будет иметь одно из важных оснований для формулирования наших последующих выводов.

Пусть пара целых чисел  $\{p, q\}$  характеризует односвязное платоново тело, в котором к каждой вершине примыкают  $q$  граней в виде правильных  $p$ -угольников с внутренними углами  $180 \cdot (1 - 2/p)$  градусов.

Из выпуклости многогранника следует, что сумма всех внутренних углов по граням, примыкающим к любой из его вершин, меньше  $360^\circ$ . Следовательно, должно выполняться неравенство  $180 \cdot (1 - 2/p)q < 360$ , которое равносильно  $q(p-2) < 2p$  или  $p(q-2) < 2q$ .

Отсюда вытекает, что  $p, q > 2$ , а возможные решения определяются простым перебором

$p$ – число углов на грани	$q$ – число граней у вершины	Многогранники $\{p, q\}$
3	3, 4, 5	$\{3, 3\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}$
4	3	$\{4, 3\}$
5	3	$\{5, 3\}$
$> 5$	решения нет	–

Значит, других правильных многогранников, кроме пяти тел Платона, не существует.

Так или иначе, но наличие всего пяти правильных многогранников остается довольно необычной математической интригой в абстрактной мозаике-картине геометрических пространств, особенно на фоне счетного множества правильных многоугольников.

Наряду с этими телами в античные времена появился и прообраз золотого сечения.

В своих "Началах" Евклид увязывал его главным образом с геометрическим построением правильного 5-угольника, а также платоновых тел: икосаэдра и додекаэдра, имеющих возле каждой вершины соответственно по 5 3-угольных и 3 5-угольных граней.

То есть, формообразующей подосновой здесь выступает число 5, которое в свою очередь воссоздается прямоугольным треугольником с соотношением катетов 1:2, так как  $1^2 + 2^2 = 5$ . Именно поэтому данная фигура обычно берется в основу геометрических построений ЗС [11].

К пяти многогранникам можно добавить и шестое тело – шар (сферу), как наиболее совершенную объемную фигуру и предельный многогранник с бесконечным числом граней, тем более что общей мерой их длины является радиус описанной сферы  $R$ .

**12–ЗС–24 и числа Фибоначчи.** В силу особой симметрии в золотом сечении наглядно проявляется правило перетоков [12], когда происходит равновеликое отклонение от середины большей и меньшей части так, что де-факто большая часть забирает себе (присваивает)  $\sqrt{5}/2 - 1 \approx 0,118 \rightarrow 11,8\%$ .

То есть доля аннексии большей частью у меньшей в ЗС равна 11,8%. Хотя суммарное отличие между большим и малым составляет  $\phi - \phi^2 \approx 0,236$ , где  $\phi = (\sqrt{5} - 1)/2$ .

Итак, в случае золотого сечения одна часть отторгает от другой 12% – в целочисленном процентном отношении, так что образующаяся разность  $50 \pm 12$  становится равной 24%.

Выстраиваясь на подобных примерах, числа 12 и 24 постепенно начинают играть центральную роль в математике, благодаря целой серии многих "совпадений", которые только сегодня стали осознаваться в полной мере [13–16], включая глубинную общность числовой структуры  $12 \times 5 = 60$  в масштабной иерархии Вселенной [17].

Так, египетский треугольник (3–4–5), увеличенный вдвое (6–8–10), имеет любопытное свойство: периметр составляет 24 линейных ед., площадь –  $6 \cdot 8/2 = 24$  квадратных ед.

То есть, параметры площади и периметра знаменитого треугольника выражаются одинаковыми абстрактно-числовыми представлениями, кратными 12.

Пифагорова тройка ( $3+4+5=12$ ) удовлетворяет также равенству:  $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ .

Есть и другие тройки с подобными свойствами, например, (6–8–10), (5–12–13), (9–10–17), (7–15–20), (6–25–29).

Весьма любопытная связь здесь просматривается и с числами Фибоначчи  $F_n$ .

1) Так, Дж.Кон доказал [18], что единственным точным квадратом среди чисел Фибоначчи (кроме 1) является число с индексом 12:  $F_{12} = 12^2 = 144$ .

2) Простое число  $p$ , называется *собственным делителем*  $F_n$ , если  $F_n$  делится на него, а ни одно из чисел Фибоначчи, меньших  $F_n$ , не делится на  $p$ .

Например, 11 – собственный делитель  $F_{10}$ , 17 –  $F_9$  и т.д.

Но, оказывается, есть исключения: всякое число Фибоначчи, кроме  $F_6 = 8$  и  $F_{12} = 12^2 = 144$  обладает хотя бы одним собственным делителем [19, с. 55].

3) В работе [20, с. 86–89], анонсированной как монография по новым взаимосвязям математики и гармонии, приводятся известные энциклопедические сведения о пифагоровых тройках (удовлетворяющих теореме Пифагора) на основе чисел Фибоначчи

$$(F_n F_{n+3})^2 + (2F_{n+1} F_{n+2})^2 = (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2.$$

Хотя здесь можно выделить иное, более интересное и познавательное свойство.

Оказывается, в приведенной формуле отражаются не столько свойства этих чисел, сколько выражена уникальная особенность двучленной аддитивной рекурсии с любыми начальными условиями! А это гораздо существеннее и принципиальнее.

То есть не числа сами по себе образуют данную особенность, а процедура (!) формирования этих чисел: целых, комплексных или трансцендентных.

Рекурсия первична, числа вторичны!

Поэтому Пифагоровы тройки можно компоновать с использованием любых неотрицательных пар начальных условий для последовательностей Фибоначчи. Например, пары (0,1) - (1,1) - (2,1) - (3,1) - (4,1) - (5,1)... дают нам красивые тройки (3–4–5), (5–12–13), (7–24–25), (9–40–41), (11–60–61), (13–84–85)..., где гипотенуза отличается от большего катета всего на единицу, а меньший катет "пробегаёт" нечетные числа.

Следовательно, имеем такие тройки:  $2n+1$ ,  $2n(n+1)$ ,  $2n(n+1)+1$ .

4) Нумерологический период или период Пизано [21] повторения чисел Фибоначчи по (mod 9) равен 24.

**Контактное число.** Поиск самой плотной (не обязательно периодической) упаковки сфер в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $R^n$  известен как проблема Кеплера (1611).

С ней тесно связана другая открытая математическая проблема: чему равно контактное число  $\tau_n$  в  $R^n$  размерностью  $n > 4$ ?

$\tau_n$  – наибольшее число непересекающихся и одинакового радиуса сфер в  $R^n$ , которые одновременно касаются еще одной сферы того же радиуса<sup>5</sup> [22].

Другими словами, контактное число<sup>6</sup> (kissing number) – максимальное количество шаров единичного радиуса, которые могут синхронно касаться одного такого же шара в  $n$ -мерном евклидовом пространстве (без самопересечения).

Альтернативное определение соотносится с размещением точек на сфере:

$\tau_n$  – наибольшее число точек, которые можно расположить на единичной сфере  $S^{n-1}$  в  $R^n$  так, чтобы угловое расстояние между любыми двумя из них было не меньше  $60^\circ$ .

Почему именно  $60$  градусов? – Обратимся к рисунку (рис. 1).

<sup>5</sup> На английском образно называется "число поцелуев" – *kissing number*.

<sup>6</sup> Отдельно существует *контактное число на решётке* – аналогичный параметр для плотнейшей регулярной упаковки шаров. – <http://ru.wikipedia.org/?oldid=25527367>.

$$AD = \frac{r}{\sin \alpha'} - r = r \left( \frac{1}{\sin \alpha'} - 1 \right).$$

Между двумя одинаковыми шарами, находящимися на плоскости, можно вставить такой же третий, если  $AD = r$  или  $\sin \alpha' = 1/2$ .

Откуда *угол раствора* конуса (угол между двумя противоположными образующими или удвоенный угол между осью конуса АВ и любой прямой АС на его боковой поверхности) равен

$$\alpha = 2\alpha' = 2 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

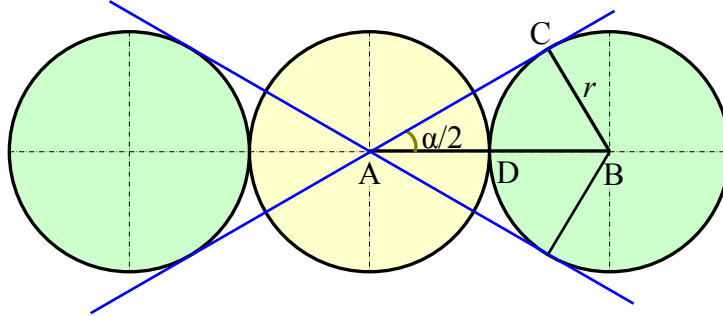


Рис. 1. К задаче определения углового расстояния между шарами

**В трехмерном случае** ( $n = 3$ ) легко построить пример с 12 шарами, касающимися центрального шара и расположенными в вершинах икосаэдра.

Поэтому нижняя граница  $\tau_3 \geq 12$ . О ней знал ещё Ньютон.

Это расположение неплотное, между шарами будут довольно заметные зазоры.

С другой стороны, площадь центрального шара более чем в 14 раз больше площади проекции каждого из касающихся шаров, так что верхняя граница  $\tau_3 \leq 14$ .

Лишь в 1953 г. в работе Шютте и ван дер Вардена<sup>7</sup> была установлена правота Ньютона, что  $\tau_3 = 12$  [23]. Однако доказательства ещё весьма сложны.

Но зато, например, легко доказывается следующая теорема.

**Теорема.**  $\tau_3 \leq 13$ .

Будем считать центр исходного шара центром всей системы. Рассмотрим плотное касание шаров (или их разрезов в форме кругов) с минимально возможным просветом (рис. 2). Площадь этого просвета включает равносторонний треугольник со стороной 2 за вычетом трёх круговых секторов (в  $60^\circ$  с радиусом 1) и равна  $\sqrt{3} - \pi/2$ .

Просвет отстоит от центра на расстоянии  $\sqrt{3}$ , поэтому его телесный угол не менее

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{3} - \pi/2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{6} \approx 0,05375.$$

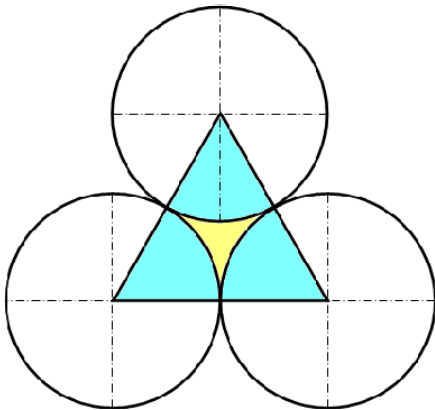


Рис. 2. Касание трёх шаров в разрезе

*Телесный угол* при вершине прямого кругового конуса с углом раствора  $2\theta$  составляет [24]  $\omega_k = 2\pi(1 - \cos \theta)$ .

В частности, телесный угол конуса с углом раствора  $60^\circ$  равен  $\omega_k = \pi(2 - \sqrt{3}) \approx 0,8418$ .

<sup>7</sup> Schütte K. and van der Waerden B.L. Das Problem der dreizehn Kugeln. *Math. Ann.* – 1953, **125** (1), 325–334.

Поэтому даже для гипотетической максимальной плотной упаковки 14 шаров, их суммарный телесный угол с учетом минимально возможных просветов превысит  $4\pi$ .

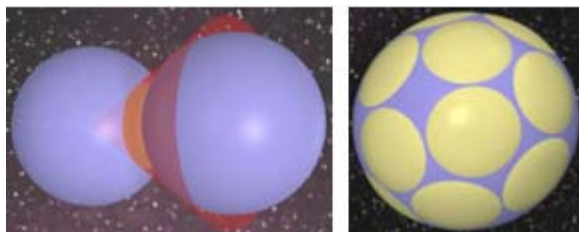
На плоскости  $\tau_2 = 6$ , в 3-мерном пространстве  $\tau_3 = 12$ , в 4-мерном –  $\tau_4 = 24$  [22].

В более общих случаях задача решена лишь для  $n = 8$  и  $n = 24$ . В 1979 г. доказано, что  $\tau_8 = 24 \cdot 10$  и  $\tau_{24} = 196560$ . Последнее число отражает плотную упаковку шаров в 24-мерном евклидовом пространстве (решетка Лича).

Красивая математическая проблема о контактном числе шаров является частным случаем задачи о сферическом коде и имеет много важных приложений в технике при передаче информации на расстояния.

Например, в модемах применяется код, исправляющий ошибки с использованием решения задачи о контактном числе в 8-мерном евклидовом пространстве [25].

**"Сферические шапочки"**. Рассматривая правильные тела, в ряде задач вовсе не обязательно исследовать их пространственные конфигурации, а можно «ограничиваться поверхностью сферы, проходящей через вершины многогранника, на которую мы перенесем ребра и грани многогранника при помощи проекций из центра этой сферы» [26, с. 11].



И уже на поверхности сферы осуществлять те или иные операции.

Так, в вышерассмотренной задаче о контактном числе каждому шару соответствует *сферическая шапка* на центральном шаре и точка касания.

Такой подход позволяет сформулировать также проблему о *покрытии сферы сферическими шапками*, расположив на поверхности шара как можно больше сферических шапок заданного размера.

В переводе на язык шаров это приводит к следующей постановке: как много одинаковых шаров могут касаться шара другого радиуса?

Упаковка  $n$  одинаковых подходящих и непересекающихся кругов на единичной сфере эквивалентна максимизации минимального расстояния между любыми двумя из  $n$  точек на сфере [27–29] или упаковке сфер на центральной сфере:

как на сфере поместить заданное число точек, чтобы наименьшее из парных расстояний между ними было наибольшим?

Например, в работе [30] решается задача по размещению  $n$  точек на единичной сфере с максимизацией минимального расстояния между ними. Для 3-мерного пространства представлена таблица угловых расстояний (в градусах) при  $n \leq 130$ .

В общем случае это пока открытая математическая проблема, которая формулируется также в виде<sup>8</sup>: какое наибольшее количество непересекающихся окружностей одинакового радиуса можно разместить на сфере радиуса  $R$ ?

Оптимальное размещение  $n = 4 \div 15$  точек на сфере по критерию  $\max \min l_{ij}$ , полученное с применением ЭВМ по результатам работы [31], представлено на рис. 3.

**Конусная упаковка.** Поместим на сфере  $n$  точек так, чтобы минимальное расстояние между любой парой точек было максимальным  $d = \max \min l_{ij}$ .

С центрами в размещенных точках проведем окружности радиусом  $r = d/2$  и очертим прямые конусы с вершиной в центре сферы. Конусы заполняют определённый объём сферы и в целом евклидового пространства при неограниченном увеличении радиуса сферы  $R$ .

Проблема размещения точек на сфере модифицировалась в эквивалентную задачу максимальной упаковки  $n$  одинаковых конусов, исходящих из одной центральной точки.

<sup>8</sup> Открытые математические проблемы // Википедия. – <http://ru.wikipedia.org/?oldid=27559814>.

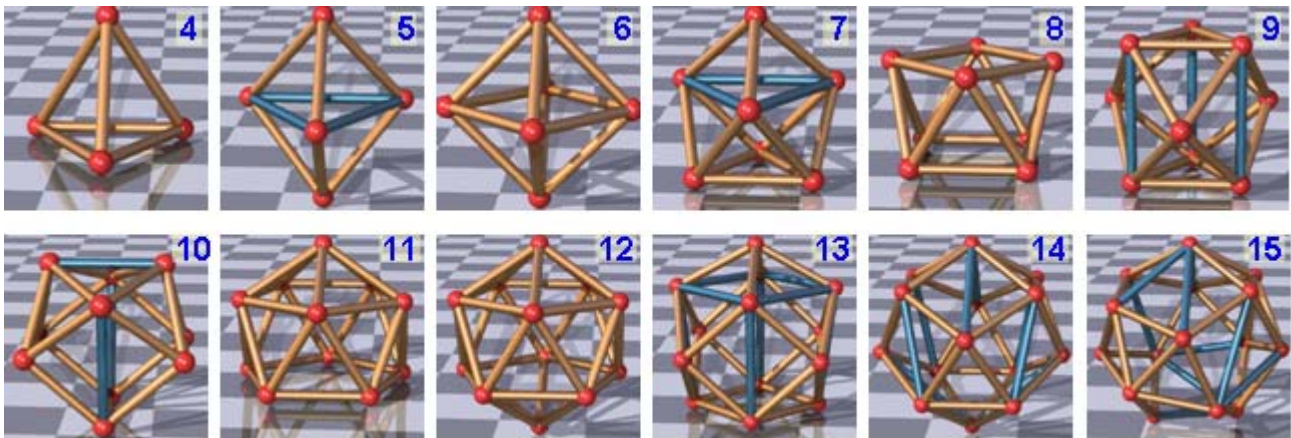


Рис. 3. Размещение  $n$  точек на сфере

Причем упаковать конусы требуется так, чтобы, не пересекаясь, они наиболее плотно (максимально) заполнили трехмерное пространство.

Подобно упаковке шаров существуют разные варианты размещения конусов.

Но один из них всё-таки является наиболее "плотным", когда объем пустот получается минимальным.

В целом хорошая равномерная упаковка получается для платоновых тел. В других случаях будут иметь место ассиметричные зазоры.

Плотность конусной упаковки, сопряженной с правильным многогранником равна (приложение 1)

$$\rho = \frac{\Gamma}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\Gamma \Omega}{4\pi},$$

где  $\Omega = 2\pi \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \right)$  – телесный угол одного конуса,  $\Gamma$  – число граней,  $\theta$  – двугранный угол

Многогранник	Число вершин	Число граней	Плотность упаковки, $\rho$ (%)
Икосаэдр	12	20	65,83
Октаэдр	6	8	73,40
Тетраэдр	4	4	84,53
Куб	8	6	87,87
Додекаэдр	20	12	<b>89,61</b>

между смежными гранями тела многогранника.

Здесь наблюдается любопытная закономерность: чем больше величина отношения количества вершин к числу граней в правильном многоугольнике, тем более плотной становится конусная упаковка (см. табл.).

Самая большая плотность конусной упаковки получается у додекаэдра – 89,61 %:

$$\rho = 6 \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{1+\phi^2}} \right) = 6(1 - \sin \arctg \Phi) = 6 \left( 1 - \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} \right) = 6 \left( 1 - \frac{1}{2 \sin \pi/5} \right) = 0,8961.$$

Вот Вам ещё один феномен золотого сечения  $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2!$

Итак, максимальную упаковку (световую) даёт дюжина (12) одинаковых конусов, исходящих из одного центра, каждый из которых касается пяти таких же конусов.

Учитывая симметрию, получаем шесть пар конусов по два в противоположные стороны. Можно сравнить с самой плотной упаковкой на плоскости – гексагональной решетчатой упаковкой кругов с плотностью  $\pi/\sqrt{12} \Rightarrow 90,69\%$ .

Да, число 12 продолжает радовать нас своими сюрпризами.

Угол раствора конуса в додекаэдре равен:  $\pi$  минус двугранный угол, который для додекаэдра составляет  $2 \cdot \arctan \Phi$ .

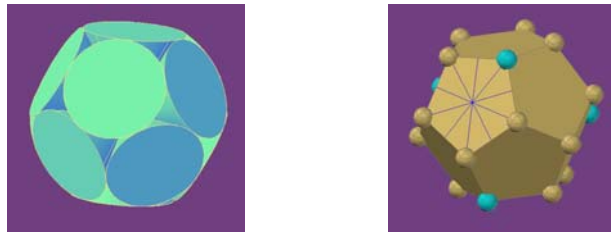
Итого получаем:

$$\alpha = \pi - 2 \arctg \Phi = \arccos(1/\sqrt{5}) \approx 1,107 \approx 63,44^\circ.$$

Набросаем в эти конусы шары. Поскольку угол раствора больше  $60^\circ$ , все 12 шаров коснутся центрального шара.

Но расположение их настолько свободно, что они могут не касаться друг друга и свободно кататься по поверхности внутреннего шара в пределах телесного угла.

А вот и картинка, на которой видно расположение 12 конусов в додекаэдре



Для сравнения на рис. 4 представлено заполнение евклидова пространства по осям координат или граням куба.

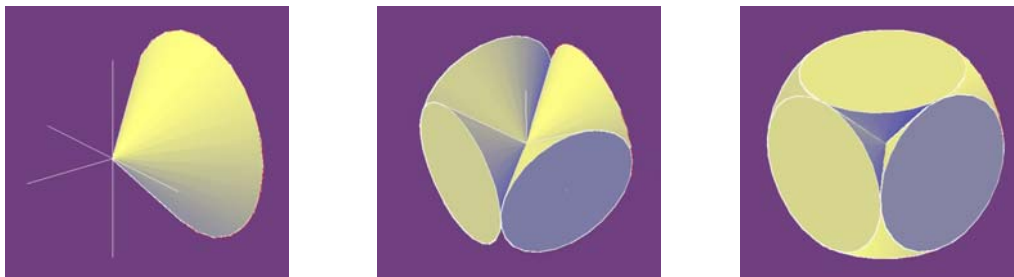
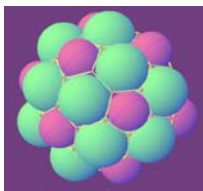


Рис. 4. Последовательное заполнение пространства конусами, расположенными по граням гексаэдра (куба)

Центр тяжести любого конуса лежит на четверти высоты, считая от основания.

А центр тяжести объема шарового сектора определяется по формуле [32, с. 227]

$$\bar{x} = \frac{3}{4} \left( r - \frac{h}{2} \right).$$



**«Ягода-малина».** Здесь возникает интересная, хотя и утопическая идея. Кажется, что если немного увеличить фиолетовые шарики, вписанные в пятиугольники, за счет зеленых шариков, вписанных в шестиугольники, то мы можем получить раскладку 32 одинаковых шариков на поверхности шара. Однако это не получается.

**Упаковка – покрытие.** В части идеологии расположения на плоскости, на сфере или в пространстве упаковка тесно связана с геометрическим покрытием [33, с. 101, 182].

*Плотнейшая упаковка:* расположить в заданной области фиксированное количество точек так, чтобы каждая точка была удалена от других возможно дальше. То есть, чтобы кратчайшее расстояние между любыми двумя точками было максимальным.



*Редчайшее покрытие:* расположить в заданной области фиксированное количество точек так, чтобы каждая точка области лежала по возможности ближе к какой-то нашей точке. То есть, чтобы наибольшее расстояние от точки области до самой близкой к ней из наших точек было возможно меньшим.

Введем обозначение  $w_n = \frac{n}{n-2} \cdot \frac{\pi}{6}$ .

Если на сфере расположены  $n \geq 3$  непересекающихся равных сферических кругов, то плотность расположения

$$\rho \leq \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{1}{2 \sin w_n} \right).$$

Если сфера покрыта  $n \geq 3$  равными сферическими кругами, то плотность покрытия

$$\rho \geq \frac{n}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} w_n} \right).$$

Равенство достигается лишь, если  $n = 3, 4, 6$  или  $12$ . Центры кругов – суть вершины вписанного в сферу правильного треугольника, тетраэдра, октаэдра или икосаэдра.

Допустима альтернативная формализация задачи *о наиболее плотной упаковке* на сфере. Пусть в трёхмерном евклидовом пространстве задана единичная сфера  $S$ . Под шаром радиуса  $r$  на сфере  $S$  понимается совокупность точек поверхности сферы  $S$ , геодезические расстояния которых от фиксированной точки (центра) не превосходят  $r$ .

Плотнейшая упаковка шаров равных радиусов на сфере формулируется следующим образом: как на  $S$  расположить  $m$  точек  $P_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ), чтобы  $\theta_m = \inf \theta(P_i, P_j)$  был наибольшим? Здесь  $\theta(P_i, P_j)$  – угловое расстояние между точками  $P_i, P_j$  [34].

Множество  $\{K_i\}$  тел  $K_i$  образует упаковку в области  $D$ , если  $\bigcup_i K_i \subset D$  и никакие два тела множества  $\{K_i\}$  не имеют общих внутренних точек [34]. Иногда упаковку называют заполнением, а в русском переводе книги [35] употребляется также термин "укладка".

### **От сферического треугольника к плоскому аналогу.**

Площадь сферического треугольника на сфере радиусом  $R$  равна

$$S_{\Delta} = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)R^2 = \varepsilon R^2,$$

где  $0 < \varepsilon < 2\pi$  – сферический эксцесс (избыток)<sup>9</sup> – разность между суммой углов сферического треугольника и числом  $\pi$  (рис. 5-а).

Формула Люилле (L'Huilier) [36, с. 55] дает возможность вычислить сферический эксцесс по сторонам треугольника. В случае равных сторон длиной  $2a$  он равен

$$\varepsilon = 4 \arctan \sqrt{\tan \frac{3a}{2} \cdot \tan^3 \frac{a}{2}}.$$

Три круговых сектора, охватываемых треугольником, составляют половину шарового сегмента (рис. 5-б) и имеют суммарную площадь

$$S_{\Sigma} = \frac{2\pi R}{2} h = \pi R^2 (1 - \cos \varphi) = \pi R^2 \left( 1 - \cos \frac{a}{R} \right).$$

<sup>9</sup> Weisstein E.W. Spherical Excess // MathWorld. – <http://mathworld.wolfram.com/SphericalExcess.html>.

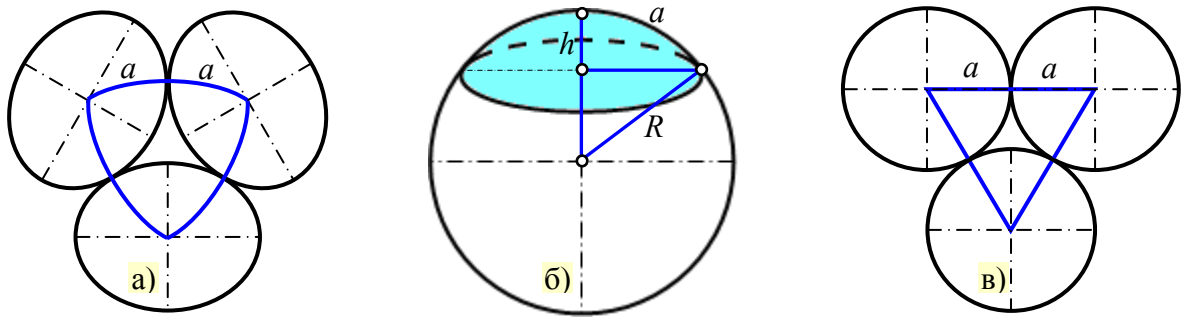


Рис. 5. Схематическое представление объектов при упаковке  
 а) сопряжение трёх кругов на сфере;  
 б) шаровой сегмент (часть шара, отсекаемая плоскостью);  
 в) сопряжение трёх кругов на плоскости

Приняв условно  $R = 1$ , находим плотность упаковки

$$\eta = \frac{S_{\Sigma}}{S_{\Delta}} = \frac{\pi(1 - \cos a)}{4 \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{tg} \frac{3a}{2} \cdot \operatorname{tg}^3 \frac{a}{2}}}$$

Переходя к пределу при  $a \rightarrow 0$ , с учетом первого замечательного предела  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$ , можно определить верхнюю границу

$$\eta < \eta' = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi(1 - \cos a)}{4 \cdot \sqrt{\frac{3a}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^3}} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi(1 - \cos a)}{\sqrt{3} \cdot a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{\sin a}{a} = \frac{\pi}{\sqrt{12}}$$

Как и следовало ожидать, верхняя граница совпадает с максимальной плотностью  $\pi/\sqrt{12}$  гексагональной упаковкой на плоскости (рис. 5-в), когда чрезвычайно малые круги на сфере становятся аналогичными кругам на плоскости.

Однако если для плоскости получается точное значение плотности упаковки, то для сферы – только верхняя граница

На самом деле не все круги пакуются на сфере гексагональным образом, так как нет идеальных (правильных) многогранников с числом граней, большим 20.

То есть в общем случае круги на сфере не имеют везде одинаковую плотность.

**Алгебраическая сущность упаковки.** Центры равных кругов, проектируемые на поверхность сферы, определяют множество точек, минимальное расстояние между которыми максимально.

Круги могут контактировать по-разному.

Некоторые круги могут располагаться свободно, не касаясь ближайших соседей. Но большинство жестко связано. Если  $m$  – число таких "жестких" кругов, то найдется как минимум  $2m-2$  минимальных расстояний, что обеспечивает достаточное количество уравнений для нахождения координат  $u$  несвободных точек.

*Почему  $u$  – алгебраическое число?* – Решаемые уравнения полиномиальные.

Это следует из того (когда решение уравнений существует), что координаты точек с подходящим размещением выпуклого многогранника, могут быть вполне взяты как алгебраические числа – корни полиномов [28], в частности:

$$\begin{aligned} u_2 &= u + 1, & u_3 &= 2u + 1, & u_4 &= 3u + 1, & u_5 &= u, & u_6 &= u, \\ u_7 &= 3u^3 - 9u^2 - 3u + 1, & u_8 &= 7u^2 + 2u - 1, & u_9 &= 3u - 1, & u_{10} &= 7u^3 - 4u^2 - 2u + 1, \end{aligned}$$

$$u_{11} = u_{12} = 5u^2 - 1, \quad u_{20} = 21u^3 - 9u^2 - 5u + 1, \quad u_{24} = 7u^3 + u^2 - 3u - 1.$$

*Вопрос существования.* Когда упаковка находится опытным путем, возникает вопрос о её действительном существовании. Возможно, система уравнений непоследовательна, но только вряд ли так. Если численный метод сводит решение уравнений в одну точку, то без особых колебаний можно быть уверенным, что решение действительно существует.

Упаковка также существует, если полиномиальные уравнения дополнительно могут быть решены алгебраическими способами, или преобразованы к более простому многочлену.

Для достаточно малых значений  $n$  это может быть выполнено с помощью методов компьютерной алгебры (рис. 6).

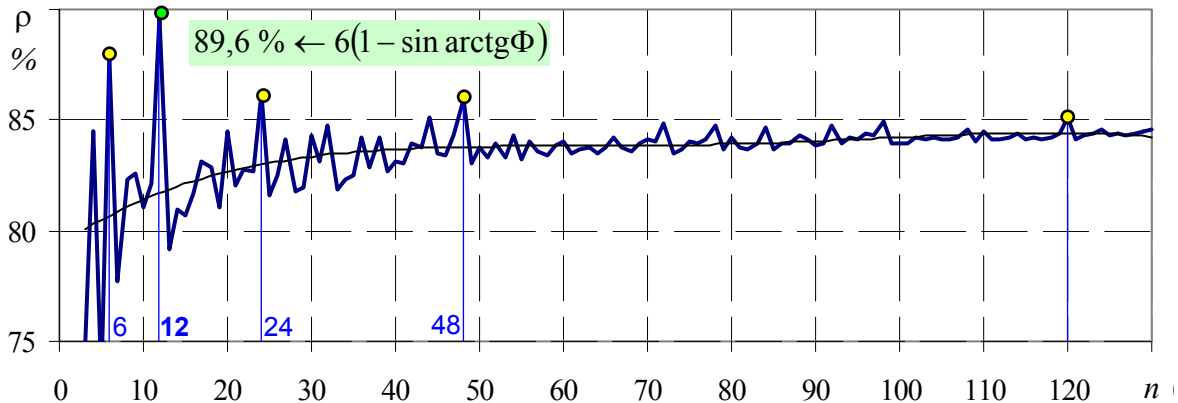


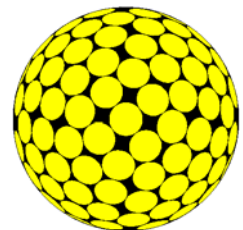
Рис. 6. Плотность конической упаковки трёхмерного пространства  $n$  одинаковыми конусами:  $\Phi \approx 1,618$  – число золотого сечения

*Нахождение минимального полинома.* Вначале численно с высокой степенью точности (до 100 десятичных разрядов) решается система полиномиальных уравнений с использованием многомерной версии Ньютона–Рафсона. Если процесс сходится в одну точку нормально, то мы можем быть почти уверены, что упаковка существует [28].

В этой точке можно попробовать решить систему полиномиальных уравнений, используя методы компьютерной алгебры. Далее обычно находится одномерный многочлен, один из действительных корней которого –  $u$ . Алгебраический номер связан с многочленом.

В некоторых случаях с применением специальных алгоритмов находятся минимальные полиномы для  $u = \cos(\text{центральный угол к минимальному краю})$  для  $n < 19$  и для  $n = 20, 24, 38, 48, 50, 52, 120$ .

Картинка наиболее лучшей из известных упаковок для  $n = 150 \Rightarrow$



Примечательно, но на сфере теорема Пифагора не работает, равно как и в остальных неевклидовых геометриях. Так, два меридиана, образующие угол  $90^\circ$ , и экватор ограничивают на сфере равносторонний сферический треугольник, все три угла которого прямые. Для его сторон выполняется равенство  $a^2 + b^2 = 2c^2$ , но не  $c^2$  как на плоскости.

### О послойной упаковке евклидова пространства.

Более 300 лет известна (И.Кеплер) и признаётся наиболее плотной упаковка шаров "вручную", когда на слой шаров, уложенных с квадратным рисунком, наложен другой такой же слой шаров в лунки нижележащего.

Коэффициент заполнения пространства равен около 74 %.

Очевидно, что шары третьего слоя будут лежать точно над шарами первого.

Такая упаковка обычно называется кубической плотнейшей гранецентрированной.

Она считалась единственной, пока английский кристаллограф У. Барлоу не показал (1900), что, поставив куб на угол, его можно разобрать на плоские ещё более плотные слои, в которых лунок между шарами в два раза больше числа самих шаров.

Варьируя укладку плотноупакованных слоев, получают бесчисленное множество плотнейших упаковок с одинаковым коэффициентом заполнения – 74,05 %.

Если ограничить наслаивание некоторым периодом, то получается: двухслойная плотнейшая упаковка (третий слой повторяет первый), трёхслойная (четвёртый слой повторяет первый), четырёхслойная и т.д.

В работе [37] приведен вывод плотности упаковки шаров  $\pi/\sqrt{18} \approx 0,7405$  для двух вариантов пакетирования: кубического и гексагонального.

Тетраэдральная конфигурация является плотнейшей упаковкой четырёх шаров в пространстве. Она же даёт [38] верхнюю оценку плотности заполнения всего пространства шарами, равную  $\sqrt{2}(3 \arccos 1/3 - \pi) \approx 77,96\%$ . То есть никакая упаковка шаров не может иметь плотность большую, чем эта (Роджерс, 1958). Но, к сожалению, плотно прилегающими друг к другу тетраэдрами нельзя "выложить" всё пространство.

Стратегия упаковки шаров в тетраэдральные комплекты ("жадный" алгоритм), рано или поздно приводит к неудачному ходу, когда конфигурация шаров неспособна "поглотить" очередной шар без увеличения просвета между ними.

*Трёхслойная упаковка – это исходная кубическая, прочие – все гексагональные.*

Таким образом, при самой плотной упаковке шар будет соприкасаться с 12 другими «подобно зернам граната» (Кеплер). «Если при таком расположении подвергнуть шары равномерному расширению так, чтобы их центры оставались неподвижными, то – в случае, если взаимное проникновение шаров невозможно, – они превратятся в ромбододекаэдры, заполняющие всё пространство» [4, с. 114].



«Если надлежащим образом симметрично отсечь 6 вершин додекаэдра, то получится многогранник, ограниченный 6 квадратами и 8 шестиугольниками. Это тетракайдекаэдр<sup>10</sup>, известный ещё Архимеду... при соответствующих переносах <они> могут заполнить всё пространство без покрытий и пропусков» [4, с. 115].

**От конусной упаковки к строению Вселенной.** Окружающего пространства вокруг нас так много, что больше, кажется, и не бывает. Чтобы его всё представить, не хватает воображения. В то же время нельзя не обратить внимания на принцип экономии в природе.

Благодаря гравитации планеты близки к форме шара.

Свет распространяется в основном по прямым или геодезическим линиям.

Между двумя заданными точками тело обычно движется так, чтобы действие было стационарным (принцип наименьшего действия).

Логично предположить, что в глобальном аспекте Вселенная упакована также компактно, – с позиций "минимальных усилий".

Проведенные выше модельные проработки-построения здесь могут быть весьма востребованы. Но «любые умозаключения о возможной форме нашей Вселенной должны опираться на реальные факты, полученные из астрономических наблюдений.

Без этого даже самые красивые и правдоподобные гипотезы обречены на неудачу» [39].

Поэтому важно проанализировать, что говорят о Вселенной реальные данные.

Так, на основе наблюдений космического микроволнового фона (МФ) группа американских математиков высчитала, что Вселенная, скорей всего, конечна и имеет форму додекаэдра [40].

<sup>10</sup> [http://en.wikipedia.org/wiki/Truncated\\_octahedron](http://en.wikipedia.org/wiki/Truncated_octahedron).

Для бесконечной Вселенной в МФ наблюдались бы волны любых размеров, однако, крупные волны фактически не обнаруживаются. Учёные объясняют это тем, что Вселенная замкнута, а параметры колебаний в распределении МФ определяются её формой и размером. Волны выглядят так, как они должны выглядеть, возникнув внутри правильной геометрической фигуры с 12 пятиугольными гранями.

Но это вовсе не говорит о краях Вселенной. Многогранник этот может замыкаться сам на себя. То есть, добравшись до одной из его граней, мы просто попадаем обратно внутрь через противоположную сторону многомерной "петли Мёбиуса".

Математическая теория трёхмерных многообразий показывает, что наше пространство может «искривляться само в себе» бесконечным числом способов.

Одной из возможных моделей топологии пространства служит трёхмерное многообразие Зейферта–Вебера (1932), представляющее собой додекаэдр, противоположные грани которого математически склеены друг с другом, то есть, отождествлены [41].

Второе додекаэдральное многообразие получается "склеиванием" противоположных пятиугольников с предварительным вращением одного из них на  $3/10$  полного оборота против часовой стрелки вокруг оси, перпендикулярной его плоскости.

Таким образом, одно из топологических математических решений физической проблемы предполагает, что *Вселенная – замкнутый сам на себя додекаэдр*.

Тогда подавление низкочастотных гармоник можно объяснить пространственной высокочастотной модуляцией фонового излучения [42, 43]. То есть низкие гармоники как бы гасят сами себя за счет прохождения радиосигнала через разные грани Вселенной.

В такой топологической модели мира события, происходящие вблизи одной из граней додекаэдра, оказываются рядом и с противоположной гранью, поскольку эти области тождественны и на самом деле являются одной и той же частью Вселенной.

Из-за этого реликтовый свет, приходящий на Землю с диаметрально противоположных сторон оказывается излученным одной и той же областью первичной плазмы.

Данное обстоятельство приводит к подавлению низших гармоник спектра реликтового излучения даже во Вселенной, размеры которой немногим больше горизонта видимых событий.

Возможны и другие геометрические компоновки.

При определенных размерах правильного пятиугольника на сфере его углы станут равными  $120^\circ$  (а не  $108^\circ$ , как на плоскости), и три таких пятиугольника, если их сложить вершинами, будут без зазоров стыковаться друг с другом [44].

Дюжина (12) таких пятиугольников без зазоров покрывают всю сферу.

Аналогичная картина получается при заполнении трехмерного пространства додекаэдрами ("трехмерными пятиугольниками").

Заполнить ими Евклидово пространство "без щелей" не удастся.

Но в пространстве положительной кривизны их углы (двугранные при ребрах и телесные при вершинах) с увеличением размеров фигуры растут так, что в определенный момент все зазоры исчезают. При этом 12 сферических додекаэдров, каждый из которых напоминает футбольный мяч, целиком заполняют поверхность трехмерной гиперсферы [43].

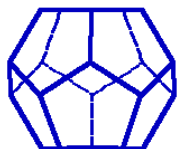
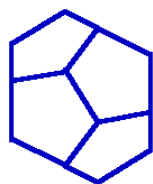
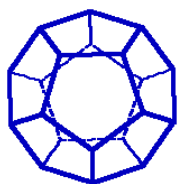
Осталось за малым: определить геометрию Вселенной.

«Если Вселенная имеет эллиптическую геометрию, то она, в конце концов, снова будет коллапсировать<sup>11</sup>. Если её геометрия гиперболическая, то расширение будет продолжаться вечно. Если же геометрия Вселенной евклидова, то она тоже будет вечно расширяться, но скорость расширения будет стремиться к нулю» [41].

---

<sup>11</sup> Гравитационный коллапс – быстрое сжатие массивных тел под действием гравитационных сил.

**Додекаэдр: неидеальная идеальность.** Учитывая, что именно додекаэдр приводит к наиболее плотной упаковке евклидового пространства, рассмотрим это тело чуть подробнее.



Додекаэдр<sup>12</sup> – правильный двенадцатигранник, состоит из двенадцати правильных и равных пятиугольников, соединенных по три около каждой вершины.

Противоположные грани додекаэдра центрально симметричны друг другу.

Додекаэдр имеет центр симметрии и 15 осей симметрии. Каждая из осей проходит через середины противоположащих параллельных ребер.

Тело располагает 15 плоскостями симметрии. Любая из них проходит в каждой грани через вершину и середину противоположного ребра.

Додекаэдр обладает осью симметрии 5-го порядка<sup>13</sup>.

Как утверждает современная математика, такая симметрия не совместима с трансляционной инвариантностью.

Никакой идеальный кристалл не может обладать такой симметрией, а потому принципиально не может расти в виде додекаэдра, в отличие от других правильных многогранников.

Правильными пятиугольниками нельзя без зазоров покрыть плоскость.

Также додекаэдрами невозможно плотно заполнить пространство.

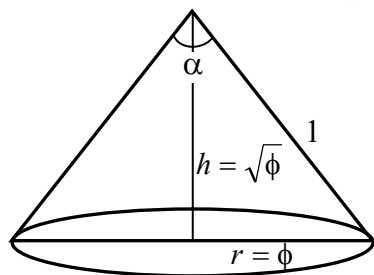
Итак, возникает своеобразный парадокс.

Сами додекаэдры физически не реализуются, и ими нельзя заполнить пространство.

Но конусы, вписанные в их грани дают самую плотную упаковку.

Так, и золотое сечение. Оно вроде сокрыто в природе, редко присутствует в явном виде, но при этом небезосновательно считается наиболее идеальным.

**Золотой конус.** Вырежем из круга золотой угол



$$2\pi\phi^2 = \frac{\pi}{2}(\sqrt{5}-1)^2 \approx 137,51^\circ.$$

Из большей части свернём "золотой конус".

Угол раствора образованного конуса (между двумя противоположными образующими) равен

$$\alpha = 2 \arccos \sqrt{\phi} \approx 76,35^\circ.$$

Телесный угол при вершине прямого кругового конуса равен

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right) = 2\pi(1 - \sqrt{\phi}) \approx 77,0^\circ.$$

**Мимходом.** Любопытно, но додекаэдр стал родоначальником целого направления в теории графов со старой задачи Уильяма Гамильтона (1805–1865) с условным названием "путешествие по додекаэдру" [45, 46]. Напомним, путь в графе – последовательность рёбер такая, что конец одного ребра является началом другого.

Цепь – маршрут, все рёбра которого различны. Цикл, который содержит все рёбра графа, называется эйлеровым, а простой цикл, содержащий все вершины графа, – гамильтоновым.

<sup>12</sup> <http://en.wikipedia.org/wiki/Dodecahedron>; <http://mathworld.wolfram.com/Dodecahedron.html>.

<sup>13</sup> Симметрия  $n$ -го порядка – симметричность относительно поворотов на угол  $360^\circ/n$  вокруг какой-либо оси.

То есть *гамильтонов путь (цепь)* – маршрут, содержащий каждую вершину графа ровно один раз. Если начальная и конечная вершины совпадают, то образуется *гамильтонов цикл*.

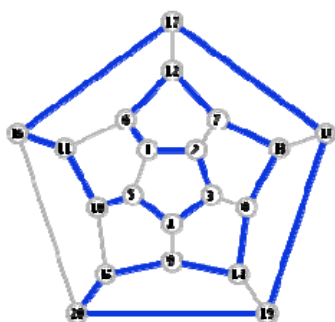


Рис. 7. Граф додекаэдра с циклом Гамильтона

Уильям Гамильтон впервые определил эти классы, исследовав варианты "путешествия по додекаэдру", узловые вершины которого символизировали города, а рёбра – соединяющие их дороги (рис. 7).

Для ромбического додекаэдра эта задача неразрешима.

**Размышлизмы.** Итак, максимальную упаковку дают двенадцать (12) одинаковых конуса, исходящих из одного центра, каждый из которых касается пяти таких же конусов. Другими словами, наиболее плотно евклидово пространство заполняется с помощью 12 равных круговых конусов, выходящих из одной общей точки, что позволяет это назвать "*конусной упаковкой*".

С учётом симметрии получаем шесть пар конусов по два в противоположные стороны. Пять платоновых многогранников плюс шар тоже равно шести!

А теперь можно сравнить с самой плотной упаковкой на плоскости – гексагональной решетчатой упаковка кругов с плотностью ( $\pi$ , деленное на корень из 12) = 90,69 %.

Да, число 12 продолжает радовать нас своими сюрпризами.

Дюжина (12) конусов, которые соответствуют самой плотной упаковке, расположены по направляющим граням додекаэдра. Максимальная плотность конусной упаковки составляет  $6(1 - \sin \arctg \Phi) \approx 89,6\%$  и выражается через число золотого сечения  $\Phi$ .

То есть, имеем «золотые купола» на любой сфере с центром в начале координат.

Кстати, слово *купол* родственно связано с нем. Kuppel или франц. coupole, ит. cupola и лат. cup(r)ula, что означает "небольшая бочка" или "бокал" [47].

Если в золотые конусы набросать одинаковые шары, то они будут касаться такого же центрального шара. Причем кататься по нему в пределах телесного угла около 63 градусов.

Это замечательный результат-модель ЗС. Несмотря на жёсткость самого ЗС, такое расположение даёт нам элементы-степени свободы (в сцеплении). Вероятно, именно поэтому золотое сечение довольно часто проявляет себя в живых системах.

А жесткая кеплеровская упаковка с различными вариантами послойного покрытия отдаётся на откуп неживой кристаллографии: минералам и вообще всему косному.

**Конусный символизм.** На Руси издревле петух почитался как глашатай дня, света и зари, своим криком разгоняющий ночную нечисть. Золото на Руси традиционно воплощает власть бога. Золотой петушок, как впрочем, и золотая рыбка, у Пушкина олицетворяют сверхъестественную всемогущую силу, которая вольна миловать и спасать.

Ей доступно и отмщение, как воздаяние за грехи. Поэтому подобно петушку русские города устремлены ввысь золотыми куполами и крестами [48].

Мир золотого петушка – конусообразен. В его основании высится духовно-нравственная вертикаль – спица, на которую и водружен золотой петушок.

По мнению Андрея Белого, геометрическая фигура конуса воплощает идею соединения вечной истины с эволюцией мира. Земля уходит в небосвод.

Конус или объёмный треугольник с растущими вниз сторонами символизирует некую вечную истину в её движении от высшей точки *вечности* к основанию – *времени*.

Если в центре конуса по оси мысленно представить вертикаль, соединяющую *вечность* со *временем* и, одновременно, измеряющую расстояние между ними, то можно вычертить графическую модель символа. Очевидно, что чем ближе ось символа к верхней точке *вечности*, тем уже окружность *времени*.

### **Вместо заключения.**

Рассмотрена задача упаковки  $n$  подходящих кругов на единичной сфере без перекрытия. Она эквивалентна максимизации минимального расстояния между любой парой  $n$  точек на сфере.

Через эти круги можно провести конусы с общей вершиной в центре сферы.

Максимальная упаковка трёхмерного пространства образуется **12** одинаковыми конусами, исходящими из одного центра, каждый из которых касается 5 таких же конусов.

Конусы вписаны в грани додекаэдра и "стреляют" в двенадцать ( $6 \times 2 = 12$ ) направлений, которые попарно симметричны относительно центра – начала координат.

Размеры конуса отвечают окружности, вписанной в правильный пятиугольник, как наибольший из возможных  $n$ -угольников ( $n = 3, 4, 5$ ).

Наибольшая плотность конусной упаковки  $\rho$  соответствует додекаэдру и выражается через число золотого сечения:  $\rho = 6(1 - \sin \arctg \Phi) = 89,6 \%$ .

В этой связи небезынтересен такой неправильный многогранник, как "золотой кубоид" – прямоугольный параллелепипед с ребрами, имеющими длины  $\Phi$ , 1 и  $\phi = \Phi^{-1}$  [49].

Его полная поверхность равна  $4\Phi$ , диагональ 2. Описанная вокруг него сфера имеет радиус 1 и площадь поверхности  $4\pi$ . Так что отношение поверхности этой сферы к поверхности "золотого кубоида" равна  $\pi : \Phi$ .

*От упаковки к живому с участием ЗС.* Живому существу нужна достаточно плотная упаковка составляющих элементов, чтобы сохранять структурную целостность и одновременную компактность.

Плотность упаковки, как шаров (молекул), так и конусов (системное заполнение пространства) в количестве 90 % здесь вполне подходит.

Остальные 10 % условно остаются на подвижность системы.

При этом в роли базового строительного материала естественным образом выступает химический элемент углерод: порядковый номер 6, атомная масса **12**.

Прочность простых, двойных и тройных связей атомов углерода между собой, их способность образовывать устойчивые цепи и циклы, а также соединяться с большинством элементов, создавая молекулы различного состава и строения, обуславливают существование огромного числа углеродсодержащих соединений.

К концу 20 века их число превысило 10 млн.

Среди них обширные группы углеводов, белков, жиров и др.

Органические соединения углерода играют ключевую роль в существовании живых организмов и составляют основу земной жизни.

Так, общее содержание углерода в организме человека около 20 %.

Возможно, поэтому в строении живых систем можно наблюдать золотое сечение.

Но большей частью оно спрятано. Его наличие примерно в чистом виде ведет к условно косным образованиям: рога животных, ракушки и т.п. Подсолнух – тоже, если его рассматривать как "местожительство" живых семян.

Итак, **12** золотых куполов или **12** золотых конусов потенциально способны к максимальному заполнению трёхмерного пространства и своими параметрами выражаются через число золотого сечения  $\Phi$ .

Представляется, что это основной вибрирующий тон наблюдаемой Вселенной.

В частности, если исходить из космологической теории Большого взрыва, то можно высказать гипотезу о целенаправленном генерировании пространства именно по **12** конусным направляющим, обеспечивающим возможность наибольшего освоения окружающего пространства. С точки зрения внешнего наблюдателя так оно, видимо, и было.

А пока остаётся открытым вопрос: к чему стремится конусная упаковка при  $n \rightarrow \infty$ ?



**Платоновы тела**

Правильные многогранники (Платоновы тела) – это выпуклые многогранники с максимально возможной симметрией.

Многогранник называется правильным, если: он выпуклый, все его грани являются правильными многоугольниками, а в каждой вершине сходится одинаковое число рёбер.

Существует всего пять правильных многогранников [50] ( $V + \Gamma = P + 2$ ):

Таблица 1.1

**Основные параметры правильных многогранников**

Изображение	Тип правильного многогранника	Число сторон у грани, $p$	Число рёбер, примыкающих к вершине, $q$	Число вершин $V$	Число рёбер $P$	Число граней $\Gamma$
	Тетраэдр	3	3	4	6	4
	Гексаэдр (Куб)	4	3	8	12	6
	Октаэдр	3	4	6	12	8
	Додекаэдр	5	3	20	30	12
	Икосаэдр	3	5	12	30	20

Таблица 1.2

**Угловые размеры правильных многогранников**

Многогранник	Двугранный угол, $\theta$	$\tan \frac{\theta}{2}$	Плоский угол между рёбрами при вершине	Угловой дефект, $\delta$	Телесный угол при вершине, $\Omega_v$	Телесный угол, стягиваемый гранью
Тетраэдр	70,53°	$\arccos 1/3$	$1/\sqrt{2}$	60°	$\pi$	$\cos^{-1} \frac{23}{27}$
Куб	90°	$\pi/2$	1	90°	$\pi/2$	$\pi/2$
Октаэдр	109,47°	$\pi - \arccos 1/3$	$\sqrt{2}$	60°, 90°	$2\pi/3$	$4 \sin^{-1} \frac{1}{3}$
Додекаэдр	116,56°	$2 \cdot \arctan \Phi$	$\Phi$	108°	$\pi/5$	$\pi - \tan^{-1} \frac{2}{11}$
Икосаэдр	138,19°	$2 \cdot \arctan \Phi^2$	$\Phi^2$	60°, 108°	$\pi/3$	$2\pi - 5 \sin^{-1} \frac{2}{3}$

Двугранный угол  $\theta$  между смежными гранями правильного многогранника  $\{p, q\}$  задаётся формулой  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\cos \pi/q}{\sin \pi/p}$ , где  $h$  принимает значения 4, 6, 6, 10 и 10 соответственно для тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра и икосаэдра.

Угловой дефект при вершине многогранника – это разность между  $2\pi$  и суммой углов между рёбрами каждой грани при этой вершине.

Дефект  $\delta$  при любой вершине правильного многогранника  $\delta = 2\pi - q\pi(1 - 2/p)$ , где  $\{p, q\}$  – символ Шлефли<sup>14</sup>,  $p$  – число сторон каждой грани;  $q$  – число рёбер, сходящихся в каждой вершине. По теореме Декарта, дефект равен величине  $4\pi$ , деленной на число вершин (т.е. суммарный дефект при всех вершинах составляет  $4\pi$ ).

Телесный угол  $\Omega$ , стягиваемый гранью правильного многогранника, с вершиной в центре этого многогранника, равен телесному углу полной сферы ( $4\pi$  стерадиан), делённому на число граней. Он также равен угловому дефекту, дуальному к данному многограннику.

Радиусы описанной  $R$  и вписанной  $r$  сфер задаются формулами:

$$R = \frac{a}{2} \tan \frac{\pi}{q} \cdot \tan \frac{\theta}{2}, \quad r = \frac{a}{2} \cotan \frac{\pi}{p} \cdot \tan \frac{\theta}{2}, \quad \frac{R}{r} = \tan \frac{\pi}{p} \cdot \tan \frac{\pi}{q}.$$

Плотность упаковки конусов, вписанных в грани многогранников, равна

$$\rho = \frac{\Gamma}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\Gamma \Omega}{4\pi},$$

где  $\Omega = 2\pi \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \right)$  – телесный угол одного конуса,  $\Gamma$  – число граней.

Таблица 1.3

**Радиусы, площади и объемы правильных многогранников (длина ребра =2)**

Многогранник	Радиус вписанной сферы, $r$	Радиус срединной сферы, $\rho_s$	Радиус описанной сферы, $R$	Площадь поверхности, $S$	Плотность упаковки, $\rho$ (%)	Объём, $V$
Тетраэдр	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	$4\sqrt{3}$	84,53	$2\sqrt{2}/3$
Куб	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	24	87,87	8
Октаэдр	$\sqrt{2}/3$	1	$\sqrt{2}$	$8\sqrt{3}$	73,40	$8\sqrt{2}/3$
Додекаэдр	$\Phi^2/\xi$	$\Phi^2$	$\sqrt{3}\Phi$	$60\Phi/\xi$	<b>89,61</b>	$20\Phi^3/\xi^2$
Икосаэдр	$\Phi^2/\sqrt{3}$	$\Phi$	$\xi\Phi$	$20/\sqrt{3}$	65,83	$20\Phi^2/3$

Вписанная сфера  $r$  касается граней, срединная  $\rho_s$  – рёбер, описанная  $R$  – вершин. Константы  $\Phi$  и  $\xi$  задаются выражениями

$$\Phi = 2 \cos \frac{\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2};$$

$$\xi = 2 \sin \frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{1 + \Phi^2} = \sqrt{2 - \Phi}.$$

Известно, что додекаэдр двойствен (дуален) икосаэдру: центры граней икосаэдра, являются вершинами додекаэдра.

Описанная вокруг додекаэдра сфера, является вписанной в икосаэдр.

Если соединить центры граней додекаэдра прямыми линиями, то получится икосаэдр.

Соединив центры, граней икосаэдра, снова получим додекаэдр.

Считается что двойная нить спирали ДНК построена по принципу двухстороннего соответствия: за икосаэдром следует додекаэдр, затем опять икосаэдр, и так далее.

Такое вращение через куб создаёт полимерную молекулу ДНК.

<sup>14</sup> <http://ru.wikipedia.org/?oldid=25084399>.

## О конических вёдрах

Обычные ведра делают плоскодонными с несколько уменьшенным диаметром.

Скорее всего, для удобства их хранения и экономии места на складе.

Ну, и традиции. Когда-то ёмкости (вёдра, бочки и др.) собирали из плотно пригнанных дощечек, клёпок, скрепляя их обручами. Чтобы обруч плотнее набивался, деревянную посуду специально делали с переменным диаметром (Наука и жизнь. – 2008. – № 6. – <http://www.nkj.ru/>).

А вот пожарное ведро имеет коническую форму. Тому есть несколько причин.

Приведём некоторые наиболее распространенные версии, почему это именно так, а не иначе (<http://62live.ru/golovolomy/5420-pochemu-pozharnoe-vedro-konicheskoi-formy.html>).

Среди них вполне серьёзные и физически обусловленные факторы-обстоятельства, но встречаются и немного шутливо-иронические вариации:

- Такое ведро не украдут с пожарного щита, так как для бытового использования оно непригодно. Ёмкость, которую нельзя поставить на пол, в хозяйстве не нужна.
- Зачерпывать воду проще конусным ведром, поскольку плоскодонное ведро часто начинает плавать как поплавки, а конусное – опрокидывается на бок и сразу же погружается в воду, так как задняя часть ведра не обладает плавучестью.
- Чтобы удобнее было брать двумя руками: одной за ручку, второй за конус. Вероятность того, что конус выскользнет из руки намного ниже, чем край плоскодонного ведра.
- В конусном ведре не возникают завихрения (схлопывания волн) при выбросе воды, поэтому вода из такого ведра не расплескивается и летит гораздо дальше.
- Чтобы когда его бросают в огонь, оно опрокидывалось и лучше расплескивало воду в месте возгорания.
- Конусовидная форма ведра позволяет в зимнее время пробивать им лунки во льду на пожарных водоемах.
- Такая форма ведра обеспечивает ему большую жесткость, чтобы оно не разрушилось и не смялось при падении.
- Такая форма позволяет не изготавливать днище, следовательно, производственный процесс заметно упрощается.
- Раскрой конусного ведра таков, что обеспечивает максимальный объем при минимальном расходе материала. Плюс всего лишь один <сварочный> шов.
- Если отрезать у такого ведра кончик и вставить туда пробку, – получится неплохой умывальник.
- Чтобы при беге с полным ведром воды не отбить ногу нижней кромкой, как у плоскодонного ведра.
- Изначально это пошло с <английского> флота. На кораблях вёдра делались из многослойной парусины и сшивались в форме конуса.
- Чтобы на пожаре никто не отдышал. На таком ведре не посидишь, а если в нем есть вода, то его не поставишь на землю, пока не донесешь до нужного места.
- Это просто образец, чтобы народ, прибежавший на пожар с голыми руками, мог из подручных материалов (брезента, жести, проволоки) сделать нечто подобное.
- На Новый год инспектор по охране труда надевает такое ведро на голову вместо шапки, а вместо посоха берет багор и изображает Деда Мороза.


Что можно добавить? – С такой доказательной базой о преимуществах конических вёдер гораздо легче воспринимается и гипотеза о 12-направленной конической Вселенной, образованной по принципу 12 золотых куполов. Так что сужающаяся ко дну кадушка <с солёными огурцами или квашеной капустой> – без малого прообраз мироустройства.

Автор выражает благодарность **кандидату архитекторы Андрею Радзюкевичу** (г. Новосибирск) за выполненную им графику на страницах лаборатории "Золотого сечения" (<http://www.a3d.ru/disput/61>, сентябрь 2010), что способствовало лучшему образному пониманию и осмыслению задачи конусной упаковки евклидова пространства.

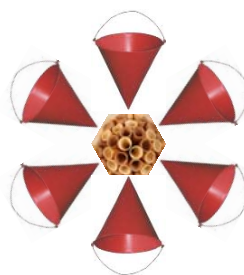
## Литература:

1. *Математика*. Её содержание, методы и значение. Т. 1 / Математический институт им. В.А.Стеклова. – М.: АН СССР, 1956. – 296 с. – <http://reslib.com/book/574>.
2. *Литлвуд Дж.* Математическая смесь: Пер с англ. – 5-е изд., испр. – М.: Наука, 1990. – 140 с.
3. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов: Пер. с англ. – М.: МЦНМО, 2000. – 564 с.
4. *Вейль Г.* Симметрия: Пер. с англ. – М.: Наука, 1968. – 192 с. – <http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/weyl-symmetry.htm>.
5. *Гейлер В.А.* Неразрешимые задачи на построение // Соросовский образовательный журнал. – 1999. – № 12. – С. 115–118. – [http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9912\\_115.pdf](http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9912_115.pdf).
6. *Построение с помощью циркуля и линейки* // Википедия. Дата обновления: 16.09.2010. – <http://ru.wikipedia.org/?oldid=27818190>.
7. *Правильный семиугольник* / Словари и энциклопедии на Академике. – <http://dic.academic.ru/dic.nsf/ruwiki/154015>.
8. *Успенский В.А.* Апология математики, или о математике как части духовной культуры // Новый мир. – 2007. – № 11. – [http://magazines.russ.ru/novyi\\_mi/2007/11/us10.html](http://magazines.russ.ru/novyi_mi/2007/11/us10.html).
9. *Зубов В.П.* Рецензия на книгу М.Гика "Эстетика пропорций в природе и искусстве" // Архитектура СССР. – 1937. – № 5. – С. 66–67. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=12&sm=2>.
10. *Правильные N-мерные многогранники* // Википедия. Дата обновления: 10.11.2010. – <http://ru.wikipedia.org/?oldid=29283451>.
11. *Василенко С.Л.* Новый взгляд на систематику «Фибоначчи – золотое сечение» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16189, 01.12.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161734.htm>.
12. *Василенко С.Л.* Не выбором едины: интерпретация итогов голосования и правило двойных перетоков // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15941, 10.06.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0012/001c/00122050.htm>.
13. 24 (number). From Wikipedia, the free encyclopedia. – [http://en.wikipedia.org/wiki/24\\_\(number\)](http://en.wikipedia.org/wiki/24_(number)).
14. *Василенко С.Л.* Периодические структуры на циферблате Фибоначчи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567. 14.07.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161676.htm>.
15. *Двенадцатеричное устройство мира*. – <http://ustierechi.ucoz.ru/publ/14-1-0-327>.
16. *Василенко С.Л.* Свойства 12 (числа) в основаниях мироустройства. Части 1–6 // Академия Тринитаризма. – М., 2011. – <http://www.trinitas.ru/>.
17. *Сухонос С.И., Третьяков Н.П.* Арифметика Вселенной // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.10267, 14.03.2003. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0223/001a/02230001.htm>.
18. *Cohn J.H.E.* On Square Fibonacci Numbers // Proc. Lond. Maths. Soc., 1964, **39**. – <http://math.la.asu.edu/~checkman/SquareFibonacci.html>.
19. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.
20. *Stakhov A.P.* The Mathematics of Harmony: From Euclid to Contemporary Mathematics and Computer Science. – New Jersey: World Scientific, 2009. – 694 p.
21. *Pisano period* // Wikipedia, the free encyclopedia. – [http://en.wikipedia.org/wiki/Pisano\\_period](http://en.wikipedia.org/wiki/Pisano_period).
22. *Мусин О.Р.* Проблема двадцати пяти сфер // Успехи мат. наук. – 2003. – Т. 58, вып. 4. – С. 153–154. – <http://www.mathnet.ru/links/0f5ccc01be36b3ca7d092d751e0a8776/rm651.pdf>.
23. *Яглом И.М.* Проблема тринадцати шаров. – К.: Вища школа, 1975. – 84 с.
24. *Телесный угол (Solid angle)* // From Wikipedia, the free encyclopaedia. – [http://en.wikipedia.org/wiki/Solid\\_angle](http://en.wikipedia.org/wiki/Solid_angle).
25. *Андреев Н.* Математические этюды. – <http://www.etudes.ru/ru/mov/mov004/index.php>.
26. *Клейн Ф.* Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени: Пер. с нем. – М.: Наука, 1989. – 336 с. – <http://reslib.com/book/1461>.
27. *Tammes P.M.L.* On the origin of number and arrangements of the places of exit on the surface of pollen-grains // Recl. Trav. Bot. Neerl. – 1930. – N 27. – P. 1–84.
28. *Buddenhagen J., Kottwitz D.A.* Multiplicity and Symmetry Breaking in (Conjectured) Densest Packing of Congruent Circles on a Sphere. – <http://www.buddenbooks.com/jb/pack/sphere/toggles7.pdf>. – <http://www.buddenbooks.com/jb/pack/sphere/minpoly.htm>.

29. *Clare B.W., Keperth D.L.* The optimal packing of circles on a sphere // *J. Math. Chem.* 6 1991. – N 6. – P. 325–349.
30. *Hardin R.H., Sloane N.J.A., Smith W.D. et al.* Spherical Codes. Nice arrangements of points on a sphere in various dimensions // *Information Sciences Research. AT&T Shannon Lab.* – 1994. – <http://www2.research.att.com/~njas/packings/>.
31. *Pfoertner H.* Maximize minimum distance (Tammes' problem). – <http://www.pfoertner.org/>.
32. *Жуковский Н.Е.* Теоретическая механика: 2-е изд. – М.: Техтеорлит, 1952. – 812 с. – <http://reslib.com/book/7387>.
33. *Фейеи Том Л.* Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве: Пер. с нем. – М.: Физматгиз, 1958. – 364 с. – <http://ilib.mirror1.mccme.ru/djvu/geometry/tot-rasp.htm>.
34. *Барановский Е.П.* Упаковки, покрытия, разбиения и некоторые другие расположения в пространствах постоянной кривизны / *Итоги науки. Сер. Мат.* – М.: ВИНТИ, 1969. – С. 189–225. – [http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jmid=inta&paperid=44&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jmid=inta&paperid=44&option_lang=rus).
35. *Касселс Дж.В.С.* Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965. – 421 с.
36. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.
37. *Weisstein E.W.* Sphere Packing. – 1996. – <http://mathserver.sdu.edu.cn/mathency/math/s/s561.htm>.
38. *Слоэн Н. Дж. А.* Упаковка шаров // *В мире науки.* – 1984. – № 3. – С. 72–82. – <http://www.ega-math.narod.ru/Nquant/Spheres.htm>.
39. *Мадера А.* Какую форму имеет наша Вселенная? // *Наука и жизнь.* – 2002. – № 8. – <http://www.astronet.ru/db/msg/1194194>.
40. *Вселенная имеет форму додекаэдра* // *Мембрана. Мировые новости* – 09.10.2003. – <http://www.membrana.ru/lenta/?2249>.
41. *Тёрстон У.П., Уикс Д.Р.* Математика трехмерных многообразий // *В мире науки.* – 1984. – № 9. – С. 74–88. – <http://ega-math.narod.ru/Nquant/Space.htm>.
42. *Прохоров М.Е.* Вселенная – додекаэдр / *Вселенная и сфера Хаббла.* – <http://galspace.spb.ru/index77.html>.
43. *Прохоров М.Е.* Вселенная как додекаэдр // *Вокруг света.* – 2006. – № 4. – <http://www.vokrugsveta.ru/vs/article/2651/>.
44. *Прохоров М.Е.* Может ли наша Вселенная быть конечной и топологически сложной? – 2003. – <http://www.astronet.ru/db/msg/1195719>.
45. *Гамильтонов граф* // *Википедия.* 20.11.2010. – <http://ru.wikipedia.org/?oldid=24843546>.
46. *Гарднер М.* Гексафлексагоны и другие математические развлечения / Гл. 6. "Икосаэдрическая игра" и "Ханойская башня". – <http://stepanov.lk.net/gardner/hex/hex.html>.
47. *Фасмер М.* Этимологический словарь русского языка: 1-е изд. – Т. 1–4. – М., 1964–1973.
48. *Волкова Е.И.* Сюжет о спасении / "Золотой петушок" как символ литературной эпохи: метасюжет о Спасителе в последней сказке А.С.Пушкина. – <http://www.ffl.msu.ru/ru/personalpages/volkova/5/>.
49. *Савин А.* Число Фидия – золотое сечение // *Квант.* – 1997. – № 6. – С. 15–17. – <http://kvant.mirror1.mccme.ru/1997/06/index.htm>.
50. *Правильный многогранник* // *Википедия.* Обновление: 26.08.2010. – <http://ru.wikipedia.org/?oldid=27269568>.

© Василенко, 2011 

<http://www.artmatlab.ru/>



**P.S.** Данный материал изначально планировалось поместить, и он уже был собственно отправлен на один из сайтов, где автором представлена добрая сотня исследовательских работ.

Однако в последнее время там усилились и без того негативные тенденции по узурпации единоличных мнений вперемешку с яркой нетерпимостью к деловой критике – необходимом атрибуте научной литературы.

Гармоничная тема золотого сечения, в угоду личностным амбициям превращается в догматизм заскорузлых архаических мыслей и приобретает явные оттенки невежественно-нигилистического пренебрежения основами основ математики и естественных наук.

Информационное поле буквально накрыла волна-цунами низкопробных материалов на тему гармонии и золотого сечения, доходящих порой до абсурда. – Как-то в виде склеенных на быструю руку образцов типа: «рекурсия правильных многогранников», «энтропия Платоновых тел», «энтропия рекурсии», «гармоническая гипербола», «гармоническое золотое сечение», «золотая революция» и другие подобные терминологически-вычурные фантазии, если не сказать, выкрутасы.

Но что изумляет больше всего, буквально ошеломляя, так это научный нигилизм и признаки элементарного невежества. Порой создаётся впечатление, что кругом исчезли разом все справочники и учебники, где можно почерпнуть или обновить знания по излагаемому предмету. Будь-то математика, физика или другие сферы знания.

Попытки внесения корректировок и налаживания конструктивного диалога наталкиваются на глухую стену непонимания. Любое критическое высказывание вместо естественной благодарности воспринимается как посягательство на авторское мнение.

Участь подобного развития событий хорошо известна.

*Всему есть конец, – даже концу.*

Поэтому без тени сожаления, но с чувством глубочайшего оптимизма мы воспользовались представленной нам возможностью опубликовать электронную версию на данном сайте. – С пожеланием ему творческого развития, совершенства и разнообразия продуктивных идей.

По сути, мы продолжаем открытие новых страниц в формировании современных представлений в области золотого сечения, основанных на строгой приверженности к фундаментальным физико-математическим представлениям, чёткой научной терминологии и критическому осмыслению-анализу предшествующих работ.

Будем искренне рады любому полезному сотрудничеству с авторами, развивающими собственные оригинальные разработки в данном направлении независимо от их "мировоззренческой установки".

**У нас всё получится!**

И пусть это будет нашей путеводной звездой к новым знаниям на тернистом пути познавательной деятельности.