ТАИНСТВО ЧИСЕЛ ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ

3. Секрет золотого полюса

В предыдущих частях работы [1, 2] говорилось о необычных свойствах золотых чисел, об их расщеплении и порождении удивительной числовой последовательности. Настоящая работа посвящена геометрическим примерам, иллюстрирующим органическую связь новых иррациональных чисел с особыми точками геометрических фигур.

«Если кто-нибудь намерен аплодировать, – сказал Иа, прочитав всё это, – то время настало»
А..А. Милн «Винни Пух и все-все-все» [1]

14. Среди крупнейших мыслителей XVI столетия, уделявших много внимания проблемам гармонии, был выдающийся немецкий художник и теоретик искусства Альбрехт Дюрер (1471-1528). В своем творчестве он никогда не упускал из виду математику, о чем можно судить по заметной соразмерности и геометрически правильному пространственному изображению предметов на его картинах, гравюрах и рисунках. Об этом говорят и его рассуждения в дневниках, письмах, подготовительных набросках к задуманным произведениям и в печатных трудах.

Увлекаясь теоретическими проблемами искусства, Дюрер задумал обобщить накопленные знания в грандиозной книге о живописи. Однако быстро завершить столь значительный труд у Дюрера возможности не было, и он для начала ограничился трактатом о пропорциях. Сохранился «Набросок введения к трактату о пропорциях» (1512), в котором можно прочитать примечательные слова:

«Остерегайся чрезмерного. Соразмерность одного по отношению к другому прекрасна» [3, с.325].

Спустя 16 лет, вскоре после смерти Дюрера, вышел труд «Четыре книги о пропорциях человеческого тела»[2] (1528), который наряду с двумя другими законченными и изданными ранее сочинениями свидетельствовал о его глубоких математических познаниях. В этой книге нашло отражение его систематическое изучение пропорций, понятие о которых он продолжает дополнять понятием о соразмерности:

«В подобных вещах я считаю соразмерные предметы самыми красивыми. Хотя иные, отступающие от меры предметы и вызывают удивление, все же не все они приятны» [3, с.336].

Дюрер полагал, что поиски надлежащей соразмерности и свободной от недостатков пропорции достигаются во многом с помощью геометрии:

«И многое в своей работе сможешь доказать с помощью геометрии…» [3, с. 342].

Эти слова он написал в «Эстетическом экскурсе в конце книги III» труда «Четыре книги о пропорциях человеческого тела». При этом он хорошо понимал, что в искусстве художник не должен полностью полагаться на геометрию (математику), так как меру соразмерности определяет еще и жизненный личный опыт, отсутствие которого сводит на нет все пропорции и расчеты. Дюрер не рассматривал соразмерности и гармонию в неопифагорейском духе, у представителей которого «*гармония доведена здесь до такой степени, что прямо можно говорить о каком-то идолопоклонстве перед нею*» [4, с.30].

Понимание искусства и математики без их фетишизации перекликается с теми поисками теоретического обоснования учения о гармонии, которые можно найти и у Леонардо да Винчи (1452–1519), и у Федериго Цуккаро (ок. 1542–1609), и у ряда других видных живописцев эпохи зрелого Возрождения. В природе всё обязательно гармонично, но при её осмыслении нельзя игнорировать достижения науки, специфические ситуации и объективные условия жизни.

---

[1] Милн А.А. Винни Пух и все-все-все. – М.: Правда, 1985. с. 642.

[2] Пространное по обычаям того времени полное название книги «Hierrin sind begriffen vier bucher von menschlicher Proportien durch Albrechten Dürer von Nürenberg erfunden und beschriben zu nutz allen denen, so zu diser kunst lieb tragen» можно перевести следующим образом: «Здесь заключены четыре книги о пропорциях человеческого тела, найденных и описанных Альбрехтом Дюрером из Нюрнберга на пользу всем любящим таковую науку».

Стоит отметить, что все завершенные и опубликованные сочинения Дюрера оставили значительный след в истории математики. А его заслуги в теории кривых настолько велики, что он по праву считается одним из основателей этого раздела геометрии.

Перейдем теперь от соображений Дюрера относительно соразмерности непосредственно к гармонии в геометрии.

15. Приведенные выше слова Дюрера о соразмерности оттеняют «золотую середину», находящуюся между слишком большими или слишком малыми соотношениями величин. Они в полной мере относятся и к истинно геометрическим фигурам, среди которых существует множество соразмерных и изящно выглядящих. На звание гармоничной фигуры, которая хорошо "смотрится" и вызывает ощущение покоя, не в последнюю очередь претендует прямоугольник, стороны которого *a* и *b* получаются в результате решения золотой пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}. \qquad (1)$$

Такой прямоугольник называют *золотым прямоугольником* и его стороны соответствуют соразмерностям

$$a / b = \Phi \quad \text{или} \quad b / a = \varphi.$$

Большое и малое золотые числа Φ = 1,618033… и φ = 0,618033… иррациональные и не могут являться отношением действительных чисел *a* и *b*. Поэтому, если одна из сторон прямоугольника равна рациональному числу, то другая сторона с неизбежностью будет равна иррациональному.

Следовательно, с точки зрения алгебры построение золотого прямоугольника можно выполнить лишь приближенно. Для такого построения удобнее всего воспользоваться отношениями чисел Фибоначчи, дающими последовательные все более точные приближения к значению большого золотого числа Φ:

1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, 13/8, 21/13, 34/21, 55/34, … (2)

где многоточие заменяет отношения чисел более высокого порядка. Обратные значения отношений чисел в (2) дают последовательные приближения к значению малого золотого числа φ.

Проблема геометрического построения золотого прямоугольника более проста и может быть решена без непосредственного использования языка алгебры.

Отношение 1/1 в последовательности (2) символизирует квадрат. С этого и начнем, – построим единичный квадрат OABC со стороной OA = *b* = 1 (**рис.1**). Затем найдем точку F середины отрезка AB. Из этой точки, как из центра окружности, проведем дугу CD радиусом FC до пересечения с продолжением стороны AB в точке D. После этого завершим построение прямоугольника OADE. Отношение его сторон AD/OA = *a/b* соответствует соразмерности Φ/1, поэтому он является золотым прямоугольником.

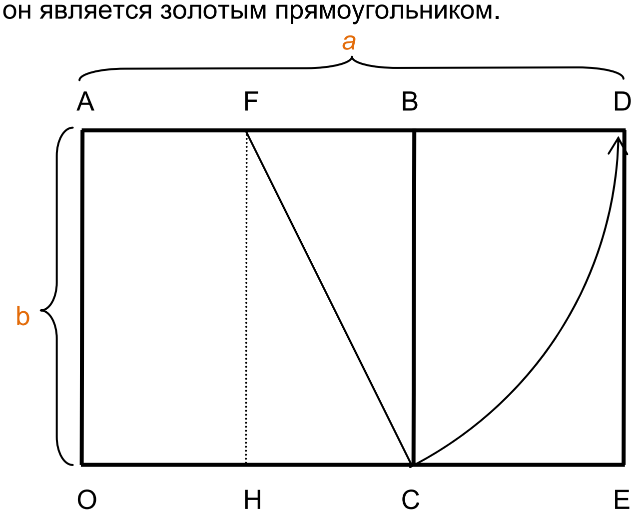


Рис. 1. Построение золотого прямоугольника *a/b* = *Φ/1*.

Итак, золотой прямоугольник OADE построен. Его стороны соответствуют золотой пропорции (1). Если ее записать в эквивалентном виде

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b},$$

то легко заметить, что прямоугольник CBDE также является золотым прямоугольником. Геометрически новый прямоугольник легко получается путем отделения от исходного золотого прямоугольника OADE наибольшего квадрата OABC.

Следовательно, если и дальше применять подобную процедуру отделения квадратов, то будут получаться новые и новые золотые прямоугольники. Факт достаточно занятный и попробуем им воспользоваться.

Поступим с вертикально расположенным золотым прямоугольником так же, как с исходным, горизонтально расположенным, – отделим от его верхней части наибольший квадрат со стороной *a* – *b* (**рис. 2**). В нижней части останется новый, горизонтально расположенный золотой прямоугольник. Можно и далее двигаться аналогичным образом по ходу часовой стрелки и по очереди отделять наибольшие квадраты от прямоугольников. Получающиеся при этом новые прямоугольники будут подобны исходному золотому прямоугольнику. Поэтому диагонали всех горизонтально расположенных золотых прямоугольников будут совпадать с диагональю AE, а диагонали всех вертикально расположенных прямоугольников – с диагональю CD. Углы прямоугольников, которые не лежат на диагоналях AE и CD, будут лежать на прямых ON и BK.

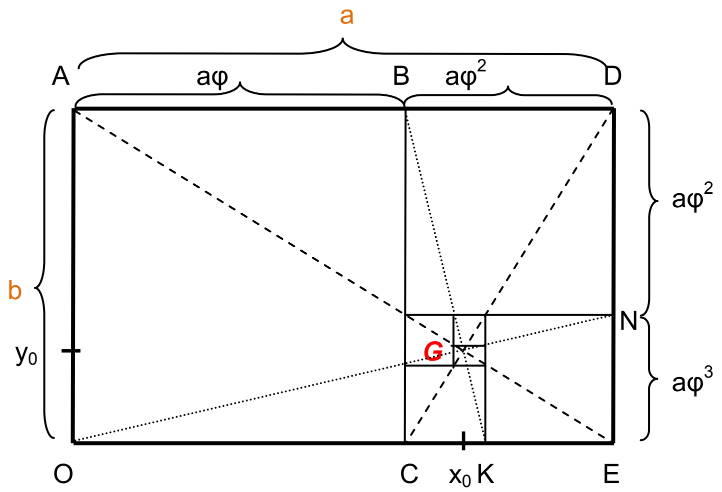


Рис. 2. Деление золотого прямоугольника на подобные прямоугольники.

Процесс отделения квадратов можно продолжать неограниченно долго и в результате получать последовательности всё уменьшающихся золотых прямоугольников.

Последовательность какого-либо линейного размера этих прямоугольников дает пример переменной величины, которая в процессе её изменения неограниченно приближается к нулю. Поэтому процесс отделения квадратов асимптотически стремится к завершению в некоторой *особой точке G*, принадлежащей всем золотым прямоугольникам.

Для определения значений абсциссы x_0 и ординаты y_0 этой точки $G(x_0, y_0)$ поместим начало координат в левый нижний угол прямоугольника, в точку O. Тогда координаты будут иметь следующие значения:

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} a\Phi = a\Phi_1, \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{5}} a\varphi^2 = a\Phi_{-2}.$$

Если величина $b = 1$, то $a = \Phi$ и координаты точки $G(x_0, y_0)$ имеют значения

$$x_0 = \frac{\Phi^2}{\sqrt{5}} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} = \Phi_2 = 1{,}170820..., \qquad y_0 = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10} = \Phi_{-1} = 0{,}276393...$$

Если величина $b = \varphi$, то $a = 1$ и координаты точки $G(x_0, y_0)$ имеют значения

$$x_0 = \frac{\Phi}{\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10} = \Phi_1 = 0{,}723606..., \qquad y_0 = \frac{\varphi^2}{\sqrt{5}} = \frac{-5+3\sqrt{5}}{10} = \Phi_{-2} = 0{,}170820...$$

По поводу особой точки $G(x_0, y_0)$ сделаю два замечания.

Все внутренние золотые прямоугольники можно получать из исходного путем его последовательного вращения на 90^0 вокруг точки $G(x_0, y_0)$ и выполнения преобразования подобия с коэффициентом φ.

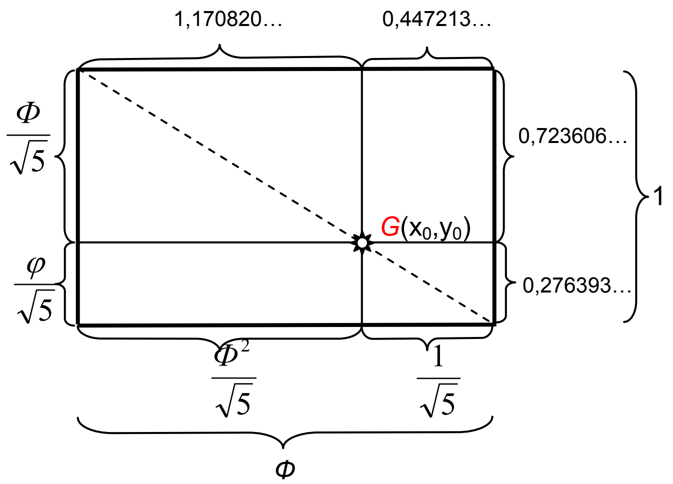
Для любой прямой, проходящей через точку $G(x_0, y_0)$ и пересекающую две противоположные стороны, отрезки этой прямой, находящиеся внутри прямоугольника, делятся в отношении Φ^2. Например, $AG/GE = BG/GK = DG/GC = OG/GN = \Phi^2$.

16. На **рис. 3** представлены два золотых прямоугольника и на них обозначены особые точки $G(x_0, y_0)$. Координаты этих точек содержат описанные в предыдущих частях работы величины Φ_{-2}, Φ_{-1}, Φ_0, Φ_1 и Φ_2 , полученные в результате расщепления большого и малого золотых чисел Φ и φ.

Напомню, начало золотой последовательности *ΦG*, составляют числа

…, 0,105572..., 0,170820..., 0,276393…, **0,447213…,** 0,723606…, 1,170820…, 1,894427…, …

Результат, полученный для золотого прямоугольника, является неожиданным, свидетельствующим о существовавшей до настоящего времени его «скрытности». В недрах этого прямоугольника имеется особая точка $G(x_0, y_0)$, координаты которой связаны с «ядром» чисел золотой пропорции, то есть с величиной $1/\sqrt{5}$ = 0,447213…, и с другими начальными числами золотой последовательности *ΦG*.



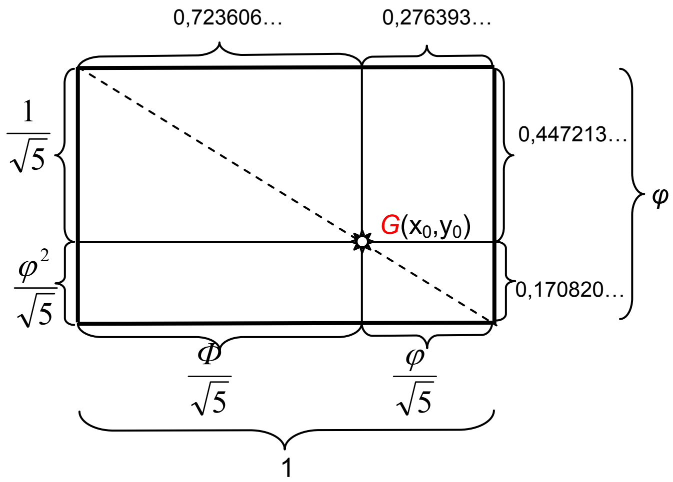


Рис. 3. Деление золотого прямоугольника на три подобных ему прямоугольника

Обратим внимание на еще один интересный факт. Если провести через точку $G(x_0, y_0)$ две линии, параллельные сторонам золотого прямоугольника, то они выделят в исходном золотом прямоугольнике три новых золотых прямоугольника, которые подобны друг другу с коэффициентом подобия φ. Больший из этих внутренних прямоугольников подобен исходному золотому прямоугольнику с коэффициентом подобия $\Phi/\sqrt{5}$. В остающемся нижнем левом углу прямоугольнике можно также выделить два новых горизонтально расположенных золотых прямоугольника и квадрат.

Представленное деление золотого прямоугольника на три новых золотых прямоугольника является нетрадиционным и, вполне вероятно, таит в себе еще не раскрытые математические сюрпризы.

17. Займемся теперь поиском особых точек в равнобедренных золотых треугольниках. На **рис. 4** приведен остроугольный золотой треугольник ABC с углами при основании 72^0 и при вершине 36^0. Отношения его боковых сторон к основанию соответствует большому золотому числу: AB/AC = BC/AC = *Ф*. Этот треугольник является одним из элементов звездчатого пятиугольника и правильного десятиугольника.

Если провести биссектрису AD, то получим: AC = AD = BD и AB/AC = AC/DC = BD/DC = *Ф*, потому что треугольник ACD подобен треугольнику ABC. На рисунке показаны последовательные дальнейшие этапы вписывания в исходный треугольник подобных ему треугольников. Если процесс повторять сколь угодно раз, то легко обнаружится положение особой точки *G*, принадлежащей всем треугольникам.

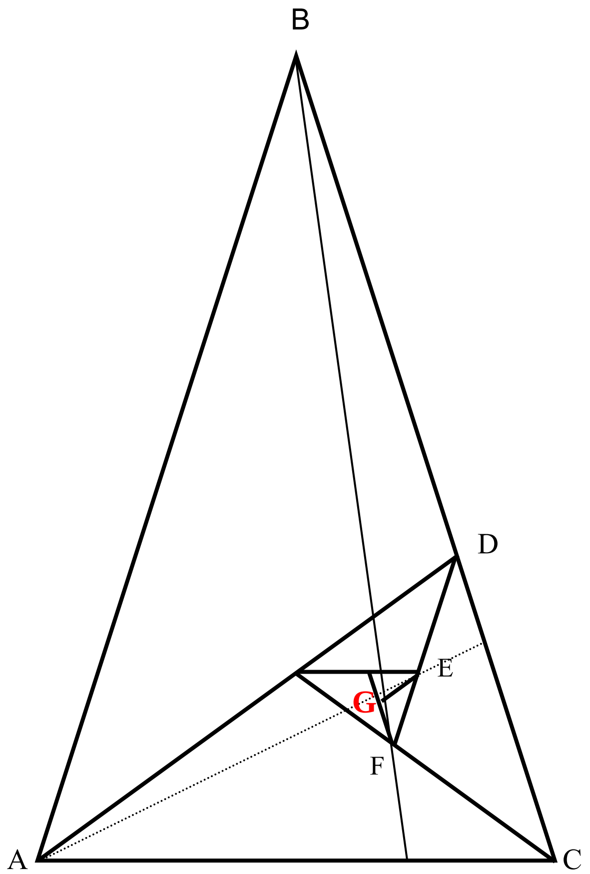


Рис. 4. Последовательные этапы нахождения золотой точки остроугольного золотого треугольника ABC

При этом создается впечатление, что треугольники, поворачивающиеся против часовой стрелки на 108^0 вокруг этой точки и уменьшающиеся при каждом повороте в *Ф* раз, как бы вкручиваются в неё. Точка *G* является точкой пересечения прямых, соединяющих соответствующие вершины треугольников, повернутых на 540^0 относительно друг друга и имеющих коэффициент подобия k = 5*φ*.

Координаты особой точки $G(x_0, y_0)$ можно определить и аналитически. Если принять за начало координат вершину A исходного треугольника, а длину стороны AC равной единице, то абсцисса и ордината точки $G(x_0, y_0)$ будут иметь следующие значения

$$x_0 = \frac{3-\varphi}{6-4\varphi} = 0.675186\ldots \qquad y_0 = \frac{\sqrt{2-\varphi}}{6-4\varphi} = 0.333224\ldots$$

18. Но самое удивительное при исследовании особой точки $G(x_0, y_0)$ заключено в другом. Проведем через вершины исходного треугольника и особую точку $G(x_0, y_0)$ три прямые линии до их пересечения с его сторонами в точках A', B' и C' (**рис. 5**).

Точки A’ и B’ делят соответственно стороны треугольника BC и AC на отрезки в отношении 1:Φ^2, а точка C’ – сторону AB на отрезки в отношении 1:1 (линия CC’ – медиана). Если считать основание треугольника AC равным единице, то придем к следующим равенствам для отрезков:

$$AB' = \Phi^1/\sqrt{5}, \quad B'C = \Phi^{-1}/\sqrt{5}, \quad CA' = \Phi^0/\sqrt{5} = 1/\sqrt{5}, \quad A'B = \Phi^2/\sqrt{5}, \quad BC' = C'A = \Phi/2.$$

Налицо начальные члены из «ядра» золотой последовательности *ΦG*.

Проводя через особую точку $G(x_0, y_0)$ подобные линии в уменьшающихся остроугольных треугольниках, получим на сторонах этих треугольников отрезки, равные по величине членам золотой последовательности *ΦG* с отрицательными индексами Φ_{-n} (n = 2,3,…).

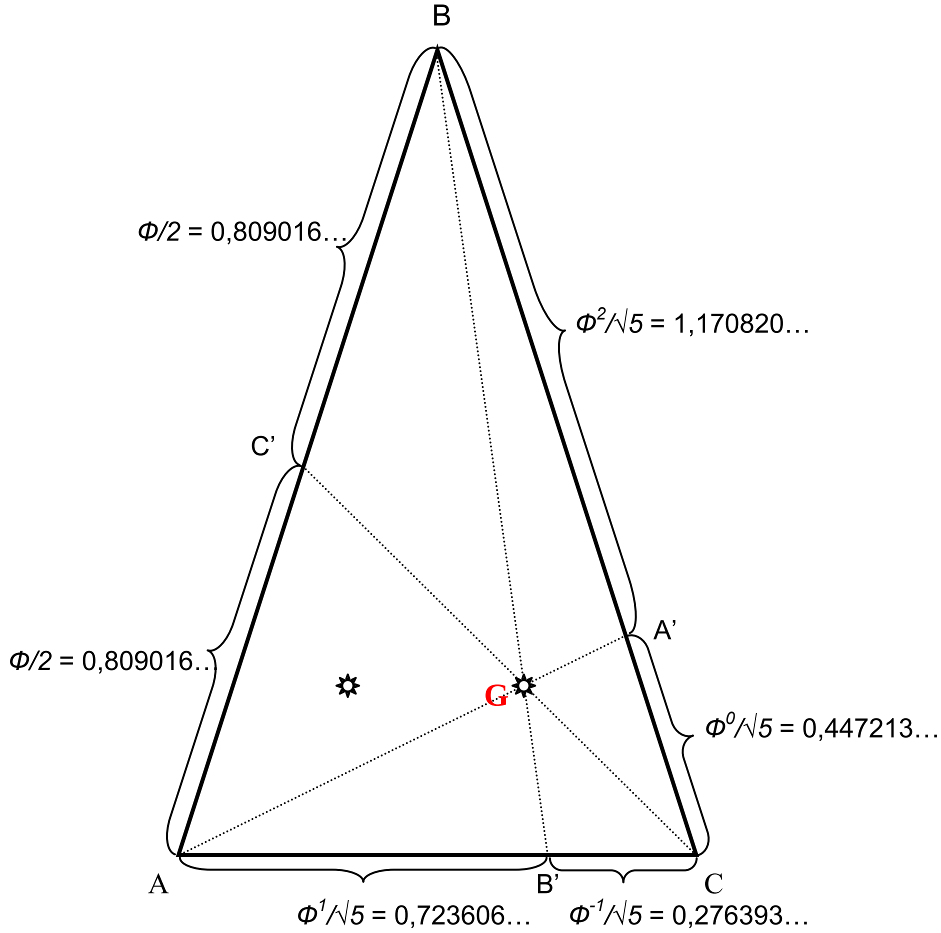


Рис. 5. Связь членов золотой последовательности *ΦG* с разбиением сторон остроугольного золотого треугольника через особую точку *G*.

Если рассмотреть процесс раскручивания треугольников по часовой стрелки каждый раз на 108^0 вокруг особой точки $G(x_0, y_0)$ исходного треугольника, то есть процесс как бы «вырастания» треугольников из исходного золотого треугольника с увеличением их при каждом повороте в *Φ* раз, то на сторонах таких треугольников аналогично можно получить отрезки, равные по величине членам золотой последовательности *ΦG* с положительными индексами Φ_n (n = 2,3,…).

Итак, мы убедились, что золотым треугольникам присущи особые замечательные точки $G(x_0, y_0)$, которые имеют непосредственную связь с членами золотой последовательности *ΦG*.

Очевидно, что у остроугольного золотого треугольника существует вторая особая точка $G(x_0, y_0)$, которая получается аналогично описанной выше. Взятые вместе, они образуют симметрично расположенную пару и обладают одинаковыми функциями в структуре треугольника. Обе точки показаны на рис. 5.

Две особые точки $G(x_0, y_0)$ имеются и у тупоугольного золотого треугольника с углами 36^0 у основания и углом 108^0 при вершине. Они также связаны с членами золотой последовательности *ΦG* (**рис. 6**).

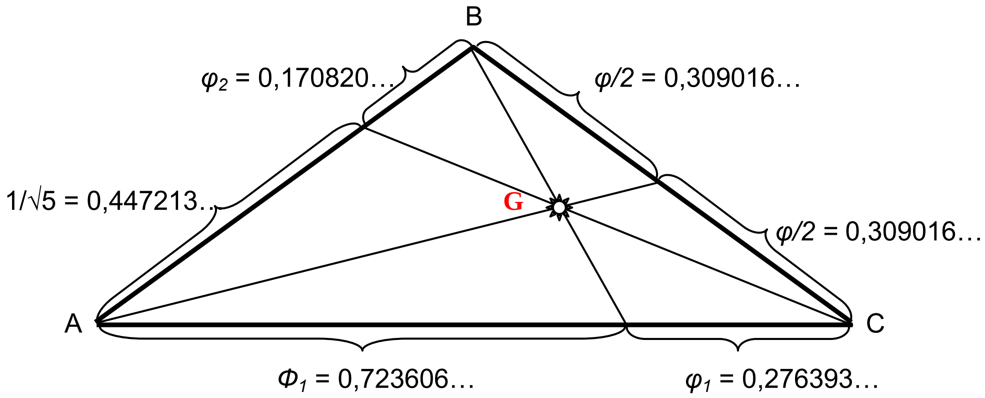


Рис. 6. Связь членов золотой последовательности *ΦG* с разбиением сторон тупоугольного золотого треугольника через особую точку *G*.

19. Подведем итог проведенному исследованию. В любом произвольном треугольнике имеется много замечательных точек, например, точка пересечения высот, точка пересечения медиан, центры описанной и вписанной окружностей. Есть и множество других замечательных точек, носящих имена математиков, исследовавших их свойства: точка Брокара, точка Торричелли, точка Лемуана, точка Ферма и другие.

Замечу, что в остроугольном золотом треугольнике точка $G(x_0, y_0)$ совпадает с первой точкой Брокара, так как углы GAC, GCB и GBA равны между собой.

В тупоугольном золотом треугольнике равны между собой углы GCA, GAB и GBC и поэтому точка $G(x_0, y_0)$ совпадает со второй точкой Брокара[3].

Упомянутые точки названы в честь французского математика Анри Брокара (1845–1922), автора наиболее полного справочника по замечательным кривым.

Факт совпадения особой точки $G(x_0, y_0)$ в золотых треугольниках с точками Брокара будет подвергнут анализу в последующих публикациях.

Сейчас же только отмечу, что точки Брокара и особые точки $G(x_0, y_0)$ в золотых треугольниках имеют смысловое различие.

Точки Брокара имеют смысл только как точки пересечения особым образом проведенных трех линий в треугольниках.

Положение особых точек $G(x_0, y_0)$ определяется в общем случае путем обусловленного вращения фигур, подобных исходной фигуре с некоторым коэффициентом подобия, связанным с золотыми числами. Особые точки $G(x_0, y_0)$, взятые произвольно на плоскости могут порождать увеличивающиеся в размерах определенные «золотые фигуры» путем заданных алгоритма вращения и коэффициента подобия.

Таким образом, вращаясь вокруг особых точек $G(x_0, y_0)$ фигуры могут сохраняя подобие или исчезать, уменьшаясь в размерах, или наоборот, возникать из этих точек, увеличиваясь в размерах.

В этом смысловое отличие этих точек от точек Брокара, но, как и последние они могут определяться в фигуре пересечением некоторых прямых.

20. Точки, подобные особым точкам $G(x_0, y_0)$ имеются и у многих других геометрических фигур. Они имеются у равностороннего треугольника или прямоугольника с определенным соотношением сторон, не равным золотым числам.

Поэтому в общем случае такую точку, связанную с вращением фигуры можно было бы назвать ***полюсом***.

Распознать полюс, увидеть его на рисунках, как пересечение некоторых прямых можно в отдельных немногочисленных работах, например, [5, 6]. В работе [5] увидеть полюс можно на рисунках витых фигур. Однако ни в этой, ни в других работах полюс как таковой не исследовался.

Теперь становится понятным, почему полюс до сих пор не привлекал внимание исследователей, почему его координаты не определялись, особые свойства не выявлялись и не анализировались. Прежде чем увидеть в этой точке что-либо особенное, надо сначала открыть необычную золотую последовательность *ΦG*. А так как это было сделано только в работе [2], то и увидеть какие-либо особенности в полюсе возможности ни у кого не было.

[3] Доказательства этого и некоторых других, приведенных выше утверждений, у автора имеются.

В связи с этим напрашивается одна аналогия. Часто бездоказательно утверждается, что пифагорейцы знали золотое сечение, так как символом их братства была пятиконечная звезда. Но… Никто ещё не доказал, что она была у них правильная, и никто не знает, как она ими строилась. Пока одни догадки. Главное же заключено в том, что как и в случае с полюсом, рисовать пятиконечную звезду можно [4], но узнать смысл отношений различных линий в ней, можно только после того, как становится известным золотое сечение отрезка. До Евклида ни один древней документ не приводит способа построения правильного пятиугольника, а значит и построения правильной пятиконечной звезды.

Резюме: факт рисования пятиконечной звезды ничего не говорит о знании золотого сечения. Открытие золотого сечения должно предшествовать узнаванию способа построения пятиконечной звезды. Только при такой последовательности открытий, можно понять заключенные в пятиконечной звезде особенности.

21. Учитывая непосредственную связь полюса или особой точки $G(x_0, y_0)$ различных геометрических фигур с числами золотой последовательности *ФG,* эту особую точку можно назвать ***золотым полюсом*** соответствующих фигур.

Золотой полюс найден у квадрата, у золотого прямоугольника и двух золотых треугольников.

Таким образом, теория золотой пропорции обогащается новым понятием – ***золотой полюс*** геометрической фигуры.

Эта точка характерна для любой геометрической фигуры, так или иначе связанной с золотой пропорцией. Золотому полюсу свойственна глубокая связь не только с золотыми числами Φ и φ, но и с числами, на которые они расщепляются: Φ_n, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Получается, что золотая пропорция, золотые числа и некоторые геометрической фигуры, хранящие в своих недрах *золотой полюс*, обладали на протяжении столетий совместной «*тайностью*» и сберегали свои замечательные взаимопроникающие особенности вплоть до начала XXI века.

22. В начале статьи говорилось о замечаниях Дюрера, занимавшегося поисками соразмерностей и пропорций с помощью геометрии. Большая или меньшая соразмерность смеси элементов в различных предметах говорит о проявлении определенной гармонии в них.

На средневековом Востоке мыслители при изложении своих эстетических взглядов говорили не только о соразмерности и гармонии предметов, но и об их совершенстве.

Приведу слова великого среднеазиатского ученого-энциклопедиста Абу Али ибн Сины (Авиценны) (980–1037), который в своём самом крупном произведении «Книга знания» в разделе «Метафизика» писал [8, с.160]:

«Всякую вещь, у которой сразу есть всё, что у неё должно быть, так что ничего больше не надобно, чтобы вещь была осуществлена в полной мере, называют совершенной».

Есть работы, в которых золотые прямоугольники и треугольники называют совершенными [5]. В свете высказывания Ибн Сины такие утверждения вряд ли можно было до сих пор считать справедливыми. Этим предметам, фигурам недоставало золотого полюса, который у них имелся, но был скрыт.

Теперь эти фигуры, дополненные знаниями о золотом полюсе, кажутся более уравновешенными и для признания их совершенства имеются более основательные причины.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белянин В.С.* Таинство чисел золотой пропорции. 1. Тонкая структура // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2011. http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=18&sm=2

2. *Белянин В.С*. Таинство чисел золотой пропорции. 2. Удивительная числовая последовательность // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2011. http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=21&sm=2

3. *Альбрехт Дюрер.* В кн. «Мастера искусства об искусстве». Т. 2. Эпоха Возрождения. – М.: «Искусство», 1966.

[4] В повести А.П.Гайдара «Тимур и его команда» ребята на воротах опекаемых ими дворов ставили знак пятиконечной звезды. Интересны слова Тимура [7, с.108]: «*Да там на воротах ещё третьего дня наш знак поставлен… Так почему же у тебя верхний левый луч звезды кривой, как пиявка? Взялся сделать – сделай хорошо*». Вряд ли рисуя пятиконечную звезду, которая была, кстати, вышита и на «*синей безрукавке*» Тимура, ребята догадывались о скрытых в этом знаке золотых соотношениях.

[5] Следует заметить, совершенства как такового не существует. Имеется лишь стремление к совершенству.

4. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Поздний эллинизм. – М.: «Искусство», 1980.

5. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

6. *Хэмбидж Д.* Динамическая симметрия в архитектуре. – М.: Изд-во Всесоюзной академии архитектуры, 1936.

7. *Гайдар А.П.* Тимур и его команда. Собр. соч. в 4-х тт. Т.3. – М.: Гос. изд-во детской лит-ры, 1956.

8. *Ибн Сина (Авиценна).* Избранные философские произведения. – М.: Наука, 1980.

9. *Белянин В.С., Романова Е.Н.* Золотая пропорция. Новый взгляд //Наука и жизнь, 2003, № 6.