

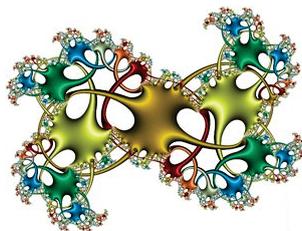
Золотое сечение в классических фракталах

Золотая пуля не обязательно летит в цель

Рассматривая разнообразные фракталы, возникает интуитивное ощущение их красоты и похожести на экзотические природные объекты либо картинки виртуальных миров.

Подобные чувства рождаются и при исследовании разных предметов, в которых присутствуют стройные пропорции.

Фракталы впервые и наиболее полно описаны в книге Бенуа Мандельброта (1924–2010) «The Fractal Geometry of Nature» (1977) [1].



В математическом смысле фракталом обычно называется множество <точек в евклидовом пространстве>, для которого дробная размерность Хаусдорфа-Безикевича¹ D строго больше его целочисленной топологической размерности D_T .

Иначе говоря, фракталы – самоподобные множества нецелой размерности.

Предыстория вопроса и краткий обзор. С начала широкого распространения фракталов в научном сообществе стали высказываться разного рода предположения о тесной их связи с другим феноменом – золотым сечением (ЗС).

Действительно, их структуры самоподобны² и отражают проявления гармонии.

Подобно ЗС размерности фракталов, как правило, выражаются иррациональными числами, в основе которых лежат натуральные логарифмы.

Более того, по мере изучения невольно приходит мысль, что фракталы и золотая пропорция являются следствием некоего общего механизма мироустройства, за которым стоят гармония, согласованность, когерентность и т.п. При этом гармония понимается широко, воссоздавая элементы слаженности, стройности и разные проявления соразмерности: пропорциональности и симметрии, инвариантности и самоподобия.

На таком фоне, казалось бы "единения и благоденствия" абстрактно-математических форм, неожиданно возникают необычные букеты разноплановых наслоений.

В работе [2] обычные корни квадратного уравнения общего вида рассматриваются как обобщение (?) золотого сечения, на основании чего высказывается идея об их *фрактальном строении*, образующем «суть солитонно-подобного Тm-структурогенеза мира». – Здесь бесхитростно переставлены причина и следствие, когда наоборот золотое сечение де-факто было выделено из некоего множества пропорций, включая квадратичные формы.

Это всё равно, что пытаться обобщать число π .

Что касается квадратичного принципа структурирования, то он вполне приемлем в качестве рабочей гипотезы. Но такой подход вовсе не замыкается на квадратном уравнении и включает в себя общность конусных конструкций и их сечений: точек, пересекающихся прямых, окружностей, эллипсов, парабол и гипербол [3, 4].

В основе такого единства лежит базовое тождество (модифицированное равенство Эйлера), объединяющее шесть фундаментальных математических констант: нуль, две единицы (действительная 1, мнимая i) и тройка "квадратичных" чисел ($2\phi = \sqrt{5} - 1, \pi, e$) [4]:

$$e^{i\pi} + \phi(\phi + 1) = 0.$$

¹ http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_fractals_by_Hausdorff_dimension.

² Самоподобный объект (в математике) в точности или приближённо совпадает с частью себя самого. То есть целое имеет ту же форму, что одна или несколько его частей.

В рамках исследования отношений между фракталами и ЗС не обошлось и без эзотерических представлений на основе нумерологического "свертывания" чисел Фибоначчи по теософской редукции. Но «странные *фрактальные характеристики*» [5] на поверку оказались элементарным проявлением давно известных периодических свойств (периоды Пизано) в числовом преобразовании по $(\text{mod } m)$ [6, 7] при $m = 9$.

Фрактальные отблески увидели и в том [8], что объект, создаваемый согласно рекурсии Фибоначчи с её проекцией на область действительных значений аргумента, при начальных условиях $(-\Phi, 1)$ якобы спонтанно разрушается и через 40 циклов переходит в состояние динамического хаоса. Однако было доказано [9], что к этому приводит заурядное накопление ошибок машинного округления в реальных расчетах, которое затем ошибочно истолковывается как спонтанное возникновение бифуркации. Принимаемое по умолчанию представление чисел в ряде вычислительных программных средств ЭВМ с 16 значащими цифрами как раз и предопределяет возникновение точки перехода в диапазоне значений, близких к $n \sim 40$. В то же время нельзя не отметить добротную идею киевских ученых [8] о гипотетическом кодировании-структурировании Вселенной с помощью чисел 1 и Φ .

Труднее всего представить себе «*фрактал золотого сечения*» и особенно его роль в становлении социальных систем [10]. – Но пишут и об этом, что больше напоминает криминально-рыбацкий сленг "ловли на живца" с применением красочного образа.

Осталось не забыть «золотое сечение фрактальной бифуркации хаоса...».

Некоторые авторы [11] пробуют найти признаки золотого сечения в значениях *фрактальных размерностей*.

Действительно, фрактальные структуры априори имеют дробную размерность, которая чаще всего заключена в интервале (1, 2), и часть из них достаточно близка к числу $\Phi \approx 1,618$. Однако какого-либо физического смысла в этом обнаружить не удастся, и можно отнести к простому совпадению с той или иной погрешностью.

В частности, можно предложить фрактально подобное равенство

$$\Phi = \phi^{-1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1 + \frac{\ln 9}{35} = 1 + \frac{2 \ln 3}{\ln 5 + \ln 7} = \psi.$$

Здесь просматриваются не только черты фрактальной структуры, но и сопоставление величины Φ с первой пятёркой несоставных чисел 1, 2, 3, 5 и 7, – с точность до пяти значащих цифр и относительной погрешностью $(1 - \psi/\Phi) \cdot 100 = 0,007\%$.

И хотя «размерности многих классических фракталов с той или иной степенью точности могут быть выражены через золотое сечение» [11], получаемые эмпирические формулы не имеют особого смысла в научном понимании.

Это обычная подгонка результата опытным путём на основе метода проб и ошибок.

Получается приближённое выражение «будь чего» через «будь что».

Так и соотношение $\delta' = \Phi^2 + \Phi^{3/2}$ [11] отражает некую "заоблачную" связь двух констант – золотого сечения Φ и постоянной Фейгенбаума³ $\delta = 4,66921166...$ [12, с. 162].

Относительная погрешность $\varepsilon(\delta') = |\delta'/\delta - 1| \cdot 100 = 0,15\%$ такого приближения считается весьма большой даже для эмпирической формулы.

Так что ни о какой добротной связи говорить не приходится.

Подобные ни к чему не обязывающие соотношения придумываются десятками.

³ Постоянная Фейгенбаума (1975) – универсальная константа, характеризующая бесконечный каскад бифуркаций удвоения периода при переходе к детерминированному хаосу. Физически означает скорость перехода к беспорядку систем, испытывающих удвоение периода.

Меньшую погрешность, например, дают такие "с ходу" синтезированные формулы:

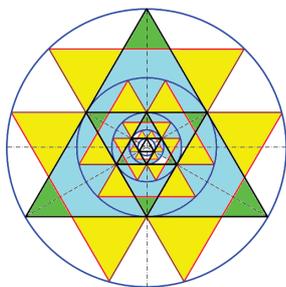
$$\varepsilon (2\pi - \Phi) = 0,09 \%;$$

$$\varepsilon (3 \operatorname{tg} \Phi) = 0,06 \%;$$

$$\varepsilon \left(e + \frac{\pi}{2} + \phi^2 \right) = 0,04 \%;$$

$$\varepsilon \left(e^{\Phi \phi} \right) = 0,02 \%.$$

Несмотря на их визуальную красоту, проку от них всё одно мало.



Довольно отчетливо прослеживается условно генетическая связь «треугольники – матрёшки – фракталы – золотое сечение» [13], которая может стать прообразом развития новых идей.

Во всяком случае, изложенное построение допускает сколь угодно большое вложение самоподобных треугольников с явными признаками в них числовых характеристик золотого сечения (ЗС), образуя самобытную фрактальную мозаику треугольных гармоничных гео-матрешек.

Но о наличии строгого фрактала говорить пока не приходится.

Встречаются исключительно положительные примеры, в частности, по определению центра масс фрактальных структур [14]: кривых Коха и Пеано, треугольника (ковра) Серпинского. Правда, золотого сечения здесь нет. В отличие, скажем, от центра масс плоских тел с самоподобным вырезом, образующих *гамму фракталоподобных геометрических фигур* [15]. Оказывается, что центры масс выпуклых однородных тел (с осевой симметрией и самоподобными вырезами с коэффициентом подобия, равным ЗС) располагаются в точности на границе (поверхности) этих тел.

Постановка задачи. Можно было продолжить литературный обзор-звукоряд "фрактальной золотоносности". Но и на упомянутом материале весьма явственно проясняются общие черты. Имея определённую похожесть внешних проявлений, фракталы и золотое сечение разительны в своём внутреннем обустройстве. Хотя и здесь не всё очевидно.

В этой связи, например, весьма любопытным представляется исследование фрактальных структур в области влияния золотого сечения на предмет их устойчивости, изменения форм, визуального восприятия и т.д.

Конечно, фрактальный мир природы очень широкий.

Попытки его жесткой привязки к золотому сечению, как одному из мерил гармонии, скорее всего, обречены на неудачу.

В то же время уникальность решения гармонической пропорции, в том числе необычность и исключительность самого иррационального из всех иррациональных чисел (в цепных дробях выражается одними единицами), просто не могут не оставить своей след и во фрактальной геометрии природы.

Целью работы является выявление возможной взаимосвязи между фрактальными структурами и золотым сечением и построение простых фракталов, обладающих свойствами гармонической пропорции.

Автор не ставит задачу синтеза необычных фракталов, поскольку их можно в достаточном количестве найти на разных сайтах Интернет.

Да и красота – понятие относительное и более релятивное, чем теория Эйнштейна.

Поэтому более важным представляется иное: на несложных примерах и доступными программными средствами показать роль и область использования золотого сечения во множестве фрактальных объектов и планетарной геометрии.

Излагаемый материал не претендует на полноту представления, а демонстрационный материал является всего лишь полезным дополняющим инструментарием.

Исходные предпосылки. Фрактальный принцип позволяет воссоздать всё целое по его доступной части за счёт постоянно сохраняющейся пропорциональности.

Например, сегмент круга "помнит" свой растр независимо от изменения диаметра окружности. Одновременно он содержит информацию, достаточную для восстановления всей окружности заданного радиуса.

В этом контексте число золотого сечения тоже уникально.

Свойство части отражать целое довольно наглядно проявляется в виде «геометрически самоподобной непрерывной дроби для величины ЗС» [16, с. 88].

Что здесь необычного? – Где бы мы мысленно ни отрезали или ни отсекали верхнюю часть многоэтажного формульного каркаса, оставшаяся часть всё равно в точности воспроизведёт значение числа Φ !

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}$$

Заметим, что данное свойство разложения в непрерывную (цепную) дробь характерно не только для числа Φ .

Подобные свойства обнаруживают также иррациональные числа – корни квадратного уравнения $x^2 - mx - q = 0$ откуда $x = m + \frac{q}{x} = m + \frac{q}{m + \frac{q}{m + \frac{q}{m + \dots}}}$

Возможно, именно эту мысль пытался высказать А. Татаренко в своей гипотезе о фрактальной сути солитон-подобного структурогенеза мира [2].

Однако это можно было аргументировать без привнесенных теологических наслоений и искусственного золочения решений анализируемого тринома⁴.

Для конкретизации предмета исследований допустимо выделить следующие элементы фрактальных структур, которые связаны с золотым сечением [17]:

1. Фрактальная размерность D равна числу золотого сечения $D = \Phi$ или другим числам, производным от Φ .
2. Длина векторов выражается через Φ простыми соотношениями.
3. Повороты векторов относительно нулевой точки соответствуют "золотым" углам (табл. 1), кратным $\pi/10$: $18^\circ, 36^\circ, 72^\circ, 108^\circ$ и т.п.

Таблица 1

Значения тригонометрических функций "золотых" углов

Функция	Аргумент α				
	$18^\circ = \pi/10$	$36^\circ = \pi/5$	$54^\circ = 3\pi/10$	$72^\circ = 2\pi/5$	$108^\circ = 3\pi/5$
$2 \sin \alpha$	$\Phi - 1$	$\sqrt{3 - \Phi}$	Φ	$\sqrt{\Phi + 2}$	$\sqrt{\Phi + 2}$
$2 \cos \alpha$	$\sqrt{\Phi + 2}$	Φ	$\sqrt{3 - \Phi}$	$\Phi - 1$	$1 - \Phi$

В частности, чтобы N одинаковых векторов (генерирующих отрезков) образовали фрактал размерностью $D = \Phi$, их размер следует установить равным $r = N^{-1/\Phi}$, тогда

⁴ Трином (греч. *treis* три + *nomos* член) – трехчленное выражение в математике, трехчлен, алгебраическое выражение из 3 величин, соединенных знаками плюс или минус, например $a^2 + 2ab + b^2$ или $x^n - px^m - q$.

$$D = \frac{\ln N}{\ln r^{-1}} = \frac{\ln N}{\ln N^{1/\Phi}} = \Phi.$$

То есть для всех N частей целого применяется один общий коэффициент подобия r .

Кривая Коха с изменяющимся углом. Кривая (снежинка) Коха хорошо известна [12, с. 17–19] и в своем роде уникальна.

Она обладает вертикальной осью симметрии.

Свободно уместаясь на небольшом листе бумаги, имеет в пределе бесконечную длину!

Везде непрерывна. Но нигде к ней нельзя провести касательную.

Развивая представления классических фракталов [18, с. 43] можно организовать кривую Коха с изменяющимся углом (рис. 1).

Система итерированных функций [12, с. 96–126] имеет четыре преобразования $j = \overline{1, 4}$ относительно комплексной переменной z :

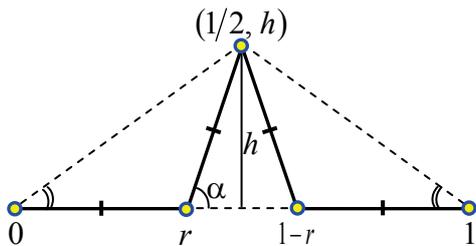


Рис. 1. Генератор для кривой Коха

$$F(z)_j = \{z', z'e^{i\alpha} + r, z'e^{-i\alpha} + 0.5 + ih, z' + 1 - r\}, \quad z' = r \cdot z,$$

где $r = \frac{1}{2(1 + \cos \alpha)}$, $h = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{r - 0,25}$, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Последовательность комплексных чисел, воспроизводящих фрактальную линию, генерируется случайным образом по рекурсивной формуле

$$z_{n+1} = F(z_n)_{1 + [\operatorname{rnd} k]}, \tag{1}$$

где $z_0 = 0$, $n = \overline{0, N}$, $\operatorname{rnd} k$ – случайное число, равномерно (равновероятно) распределенное на интервале $(0, k)$, $[\xi]$ – обозначение целой части от величины ξ . Для лучшей выразительности фракталов количество итераций целесообразно принять $N \geq 5 \cdot 10^4$.

Для двух "золотых" углов 36° и 72° соответственно имеем:

$$\alpha = 36^\circ = \frac{\pi}{5}: \quad \frac{1}{r} = 2 + \Phi, \quad h = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2 - \Phi}{2 + \Phi}}, \quad D = \frac{\ln 4}{\ln(2 + \Phi)} \approx 1,0780.$$

$$\alpha = 72^\circ = \frac{2\pi}{5}: \quad \frac{1}{r} = 1 + \Phi, \quad h = \frac{1}{2} \sqrt{7 - 4\Phi}, \quad D = \frac{\ln 4}{\ln(1 + \Phi)} \approx 1,4404.$$

Фрактальная размерность точно равна числу Φ , если положить:

$$\frac{1}{r} = 4^{1/\Phi}, \quad h = \frac{1}{2} \sqrt{7 - 4\Phi}, \quad \alpha = \arcsin \frac{h}{r} \approx 79,76^\circ, \quad D = \frac{\ln 4}{\ln(4^{1/\Phi})} = \Phi.$$

Характерные варианты кривых (рис. 2) демонстрируют их заметное отличие в зависимости от угла наклона α в центральном треугольнике (см. рис. 1).

Однако даже в пределах отклонений $\pm 2^\circ$ от выбранного характерного угла существенных различий не происходит.

Значит, нет веских оснований утверждать о каком-либо особом влиянии "золотого" угла на формирование фрактала Коха.

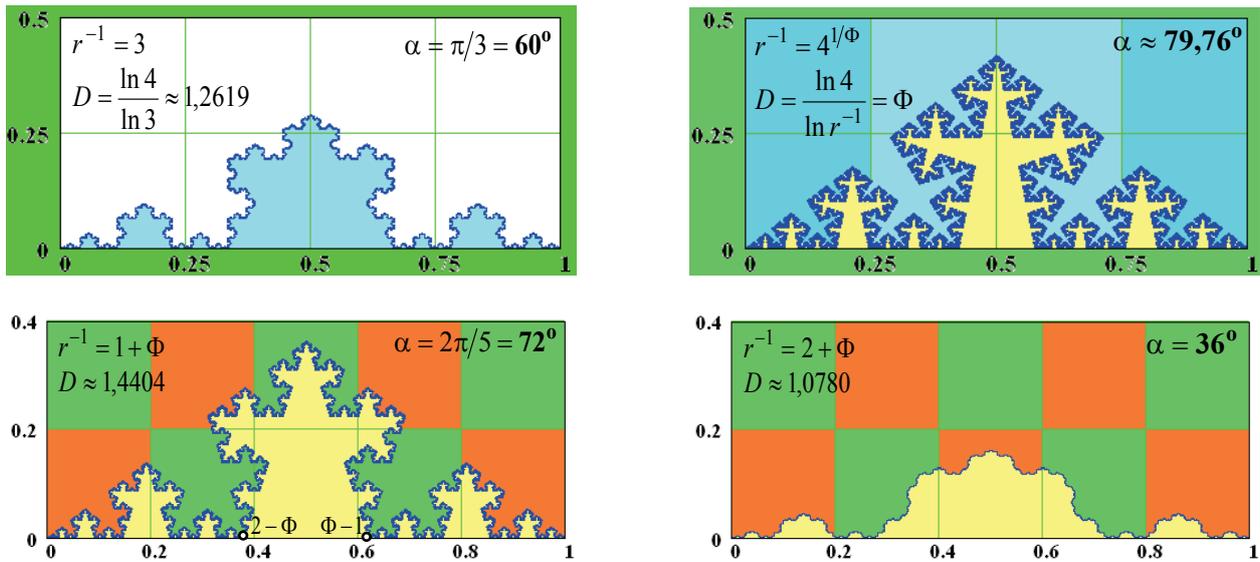
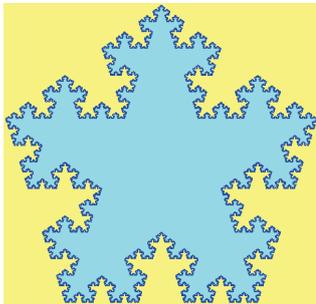


Рис. 2. Кривые Коха, полученные методом случайных итераций системы итерируемых функций (СИФ)

Построив основную кривую $z_{1,n}$ по формуле (1), её можно объединить (совместить) с подобной себе линией со сдвигом и/или поворотом, получая разнообразные причудливые формы (рис. 3, рис. 4). В данном случае хорошо реализуются фрактальные конструкции в виде пятиконечной звезды или снежинки.

$$z_{2,n} = z_{1,n}e^{i\alpha/2}, \quad z_{3,n} = z_{1,n}e^{-i(\pi-\alpha/2)} + 1$$



$$z_{2,n} = z_{1,n}e^{-i\alpha/2}, \quad z_{3,n} = z_{1,n}e^{i(\pi-\alpha/2)} + 1$$

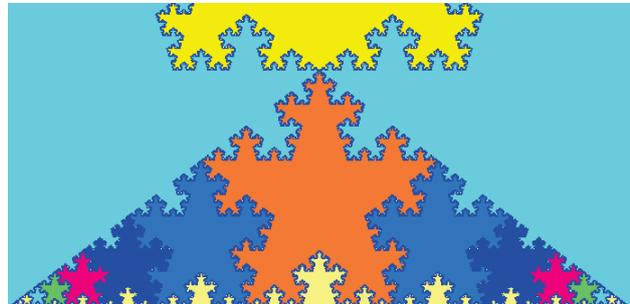
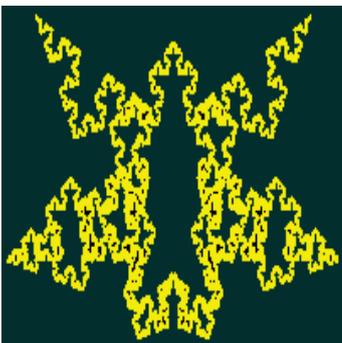


Рис. 3. Совмещение трёх одинаковых кривых Коха со сдвигами и поворотами $-\alpha/2$

$$z_{2,n} = z_{1,n}e^{-i\alpha/3}, \quad z_{3,n} = z_{1,n}e^{i(\pi-\alpha/3)} + 1$$



$$z_{2,n} = z_{1,n}e^{-i\alpha/6}, \quad z_{3,n} = z_{1,n}e^{i(\pi-\alpha/6)} + 1$$

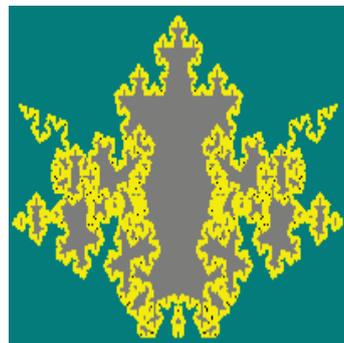


Рис. 4. Совмещение трёх кривых Коха со сдвигами и поворотами $-\alpha/2, \alpha/6$

Понятно, что этим процесс преобразований не заканчивается.

Всё дело в проявлении смекалки и лёгкой фантазии, совмещённой с простыми знаниями на кратность углов поворота и др. (рис. 5, рис. 6).

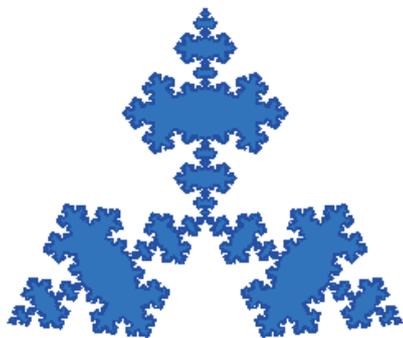


Рис. 5. "Золотой" и вполне обитаемый остров Коха, ориентированный внутрь треугольника

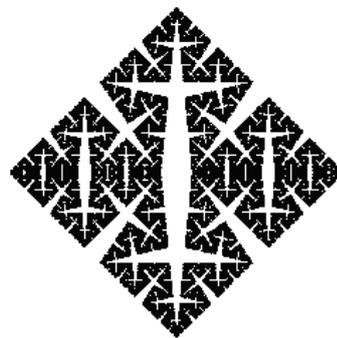


Рис. 6. "Квадрат Малевича", только резанный под углом $\alpha = 85^\circ$

Многоугольники (снежинки) Серпинского. Совокупность векторов на комплексной плоскости, задающих систему итерируемых функций (СИФ) для данного фрактала, описывается соотношением [18, с. 42]

$$F(z)_k = [z + (r-1)v_k]/r,$$

где $v_k = R \cdot i e^{i \frac{2\pi}{K} k}$, $k = \overline{0, K-1}$ – один из способов задания комплексных координат вершин равностороннего K -угольника на описанной вокруг него окружности радиусом R с центром в начале координат (первая вершина начинается с мнимой оси, что соответствует положению часовых стрелок на 12 часов);

$r > 1$ – коэффициент сжатия – некоторое число, выбираемое геометрическим построением так, что следующая точка ставится на расстоянии в $1/r$ от соответствующей вершины, где l – расстояние до неё начальной точки.

В частности, для построения совершенной фрактальной кривой – без самопересечения линий и с одновременным сохранением их непрерывности – коэффициент подобия r следует назначать строго определенным образом [17]:

$$r = 1 + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \beta},$$

где угол сектора сопряжения β и угол поворота α от мнимой оси к точке сопряжения рассчитываются по формулам:

$$\beta = \pi/k, \quad \alpha = 2\beta \cdot (\lceil k/4 \rceil + 1).$$

Пятиугольник Серпинского (рис. 7) состоит из пяти одинаковых частей, которые подобны целому, но имеют в r раз меньший размер, выражаемый через число золотого сечения:

$$r = 1 + \frac{\sin 3\pi/5}{\sin \pi/5} = 1 + \sqrt{\frac{\Phi + 2}{3 - \Phi}} = 1 + \Phi,$$

поэтому его фрактальная размерность равна $D_5 = \ln 5 / \ln(\Phi + 1) \approx 1,6723$.

Примечательно, что шестиугольник Серпинского ($K=6, r=3$), который имеет более отдаленное отношение к золотому сечению, чем правильный пятиугольник, тем не менее, обладает фрактальной размерностью $D_6 = \ln 6 / \ln 3 \approx 1,6309$, которая отличается от Φ только на 0,8 %.

Во всяком случае, шестиугольник к ней более близок, чем «усеянный золотом пятиугольный фрактал» (в смысле наличия в нем множества проявлений золотого сечения): $D_5 - \Phi > D_6 - \Phi$.

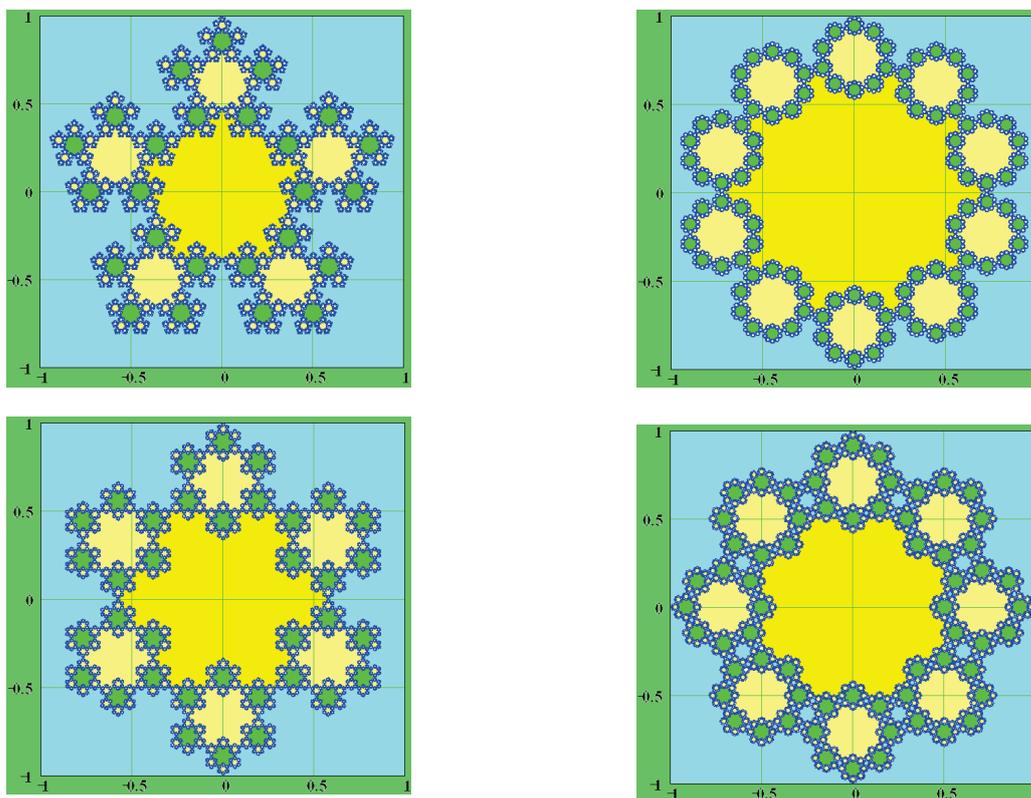


Рис. 7. Салфетки Серпинского, основанные на правильных многоугольниках

В тоже время в расчете фрактальной размерности D_5 число Φ присутствует в явном виде, что указывает на непосредственную связь фрактала с золотым сечением.

То есть визуально определяемая форма фрактала обусловлена наличием "золотых" углов, а его содержание подтверждается дробной размерностью со знаменателем $\ln(\Phi + 1)$. А внутренняя граница данной фигуры представляет собой пятиугольную снежинку Коха.

Десятиугольник характерен тем, что его сторона равна $a = 2 \sin(\pi/10) = \Phi - 1$.

Соответственно коэффициент сжатия $r = 1 + \frac{2}{\Phi - 1} = \Phi^3$, а фрактальная размерность $D_{10} = \ln 10 / (3 \ln \Phi) \approx 1,5950$.

Дракон Хартера–Хейтуя (кривая Пеано, заполняющая плоскость). Фрактальная фигура определяется генерирующим контуром (рис. 8), в котором угол α примем переменным, в отличие от традиционного рассмотрения $\alpha = 45^\circ$.

Генератор – ориентированная ломаная линия, состоящая из N отрезков длиной r .

Фрактальная размерность контура D определяется из уравнения $2r^D + (2r)^D = 1$ или $2(4\cos\alpha)^{-D} + (2\cos\alpha)^{-D} = 1$ (рис. 9). В частности, если угол $\alpha = 45^\circ$, соотношение эквивалентно кубическому уравнению $x^2(x-1) = 2$ для величины $x = 2^{D/2}$ с одним вещественным корнем $\lambda = \frac{1}{3}\left(a + 1 + \frac{1}{a}\right)$, где $a = \sqrt[3]{28 + 3\sqrt{87}}$.

Отсюда находим $D = 2 \frac{\ln \lambda}{\ln 2} \approx 1,5236$.

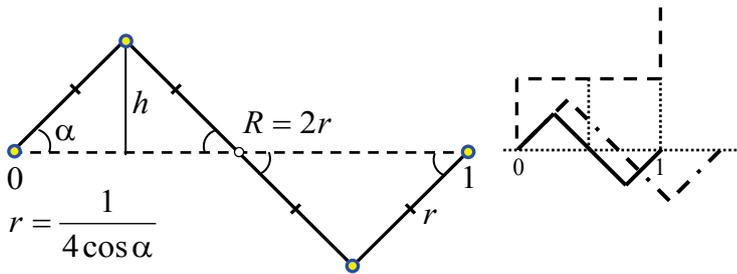


Рис. 8. Генератор контура: угол $\alpha = 45^\circ$ соответствует "двойному дракону"

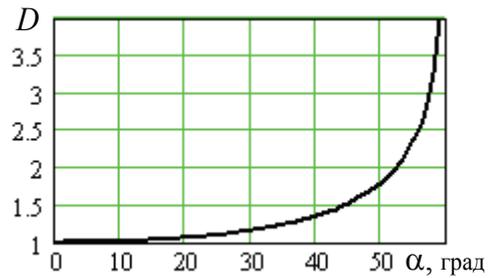


Рис. 9. Фрактальная размерность

Так, для "золотого" угла $\alpha = 36^\circ$ фрактальная размерность составляет $D \approx 1,2610$.

Исходя из общих правил, изложенных, например, в работе [18, с. 46], система итерируемых функций (СИФ), осуществляющая преобразование единичного отрезка $(0, 1)$ в выше обозначенный генератор, выглядит так:

$$F(z)_j = \left\{ z'e^{i\alpha}, 2z'e^{-i\alpha} + 0,25 + ih, z'e^{i\alpha} + 0,75 - ih \right\}, z' = l \cdot z,$$

где $l = \frac{1}{4\cos\alpha}$, $h = \frac{\text{tg}\alpha}{4}$.

В частности, для традиционного угла $\alpha = \pi/4$ можно использовать модифицированный генератор только с вертикальными и горизонтальными отрезками (см. рис. 8, справа), дополнив их последующим общим поворотом по часовой стрелке и сжатием в $\sqrt{2}$ раз (для приведения к единичному отрезку), с простой СИФ:

$$F(z)_j = \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{2}} \{ zi, 2z + i, zi + 2 + i \}.$$

Если теперь методом случайных итераций выбирать эти преобразования с одинаковой вероятностью (равной $1/3$), то результирующее множество точек воссоздаст на плоскости контур, граница которой фрактальна и имеет дробную размерность.

Варианты построения контура двойного дракона (рис. 10) для разных углов наклона направляющих отрезков высвечивают каких-либо особенностей "золотых" углов. Образуемые фигуры естественно разнятся. Но переходы осуществляются настолько плавно, что конкретики какого-либо отдельного угла совершенно не проявляется.

Используя известный подход [18, с. 46], можно определить СИФ для самого дракона Хартера–Хейтуя, как плотного заполнения некоторой ограниченной области

Нас интересует некоторая изменяющаяся структура, каковой может стать генераторы контура шкуры дракона с переменным углом α (рис. 11).

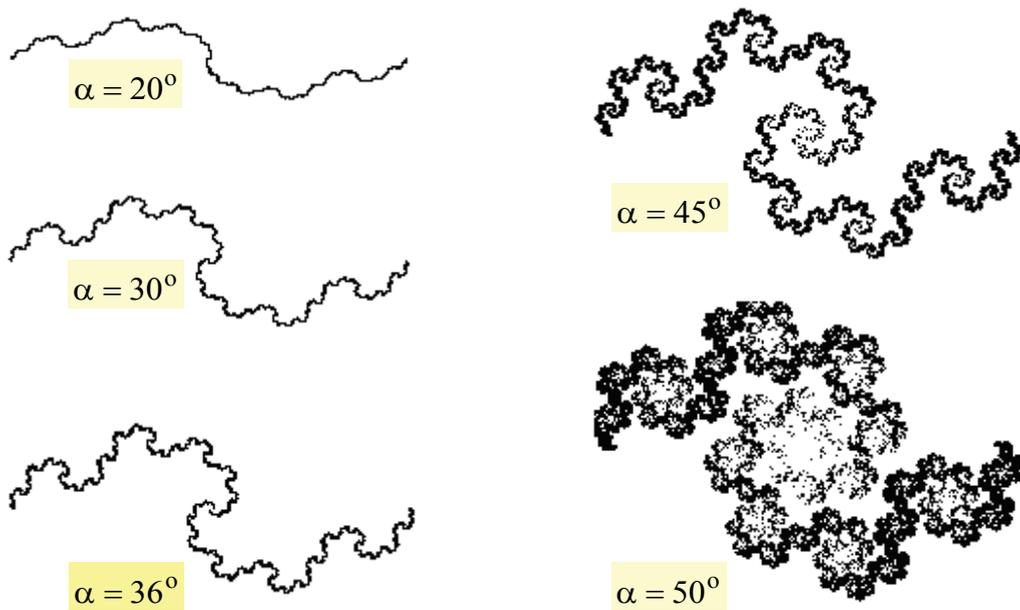


Рис. 10. Варианты построения контура двойного дракона для разных углов наклона направляющих отрезков

Первое преобразование переводит $\triangle AOC \rightarrow \triangle ADO$. Причем вершины треугольников переходят по правилу: $A \rightarrow A$, $O \rightarrow D$, $C \rightarrow O$. Данная операция соответствует повороту $\triangle AOC$ вокруг начала координат (точки O) по часовой стрелке на угол α (OC ложится на вещественную ось x), сжатую вдоль осей x и y в $2/a$ раза и трансляции на d влево.

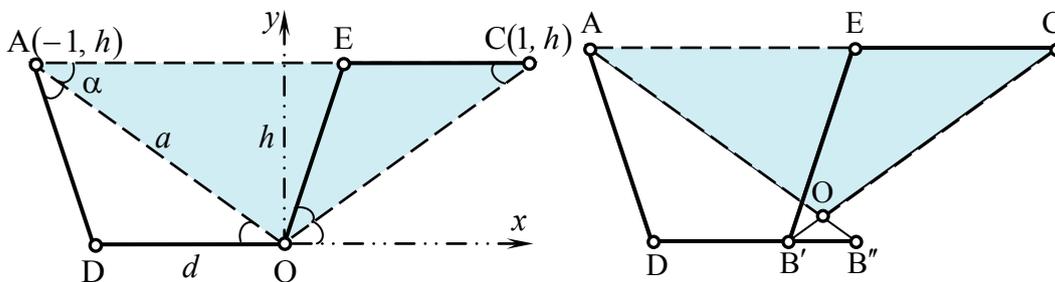


Рис. 11. Генераторы контура шкуры дракона с переменным углом α

Второе преобразование переводит $\triangle ACO \rightarrow \triangle COE$, причем вершины треугольников переходят по правилу: $A \rightarrow C$, $C \rightarrow O$, $O \rightarrow E$. Оно соответствует повороту $\triangle ACO$ вокруг начала координат (точки O) по часовой стрелке на угол $\pi - \alpha$ (OA ложится на вещественную ось x), сжатую вдоль осей x и y в $2/a$ раза и последующему сдвигу на h вверх в положительном направлении оси y и вправо на $(1-d)$.

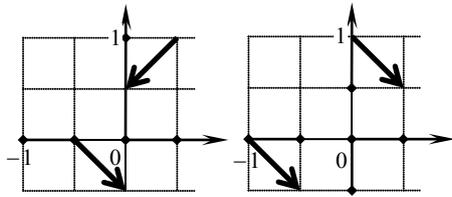
Эти два линейных комплексных преобразования и составляют систему итерируемых функций, аттрактором которой является модифицированный нами дракон

$$F(z)_j = \left\{ kze^{-i\alpha} - d, kze^{-i(\pi-\alpha)} + 1 - d + ih \right\},$$

где $h = \operatorname{tg} \alpha$, $d = \cos \alpha \cdot r/2$, $r = \sqrt{1+h^2}$, $k = r/2$ – коэффициент сжатия.

Таким образом, в основе двойной шкуры дракона лежит генератор, представляющий собой два параллельных однонаправленных вектора на комплексной плоскости.

Аналогичным образом простая шкура формируется двумя перпендикулярными векторами. Причем их месторасположение особого значения не имеет, поскольку приводит к одной и той же геометрической фигуре, только с разными размерами и ориентацией относительно начала координат.

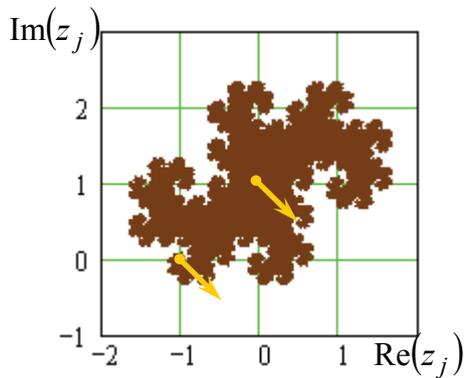
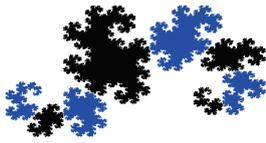


В то же время длины векторов очень важны

Для угла $\alpha = 36^\circ$ сжатие пропорционально $k = \Phi^{-1}$, другие параметры равны $r = 2\Phi^{-1}$, $h = \Phi^{-1}\sqrt{3-\Phi}$.

При $\alpha = 45^\circ$ имеем $r = \sqrt{2}$, $k = 1/\sqrt{2}$, $d = h = 1$.

Выбирая эти два преобразования случайным равновероятным образом методом случайных итераций, получим множество точек (рис. 12), воспроизводящее картину шкуры двойного дракона.



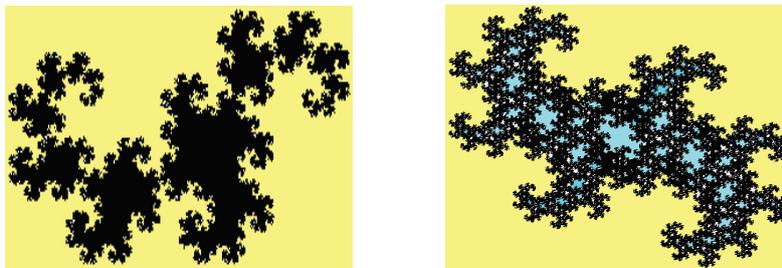
$$p := \frac{e^{-i \cdot \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} \quad n := 0..100000$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \text{rnd}(1) \\ \text{if}(\xi_n \leq 0.5, p \cdot z_n - 1, p \cdot z_n + i) \end{pmatrix}$$

Рис. 12. Шкура "двойного дракона": функция rnd a воспроизводит случайные числа, равномерно распределенные на отрезке (0, a); альтернативное формирование двумя векторами

Характерно, что построенное таким способом изображение гораздо точнее и гармоничнее передает образ дракона, чем исходное преобразование с углами в 45° и 135° .

Неплотности в заполнении также напоминают мини-драконов и обусловлены "расползанием" точки O на рис. 11 в золотой треугольник $\Delta OB'B'$ с тупым углом в 108° .



Векторно-генераторное воспроизводство шкуры демонстрируется на рис. 13.

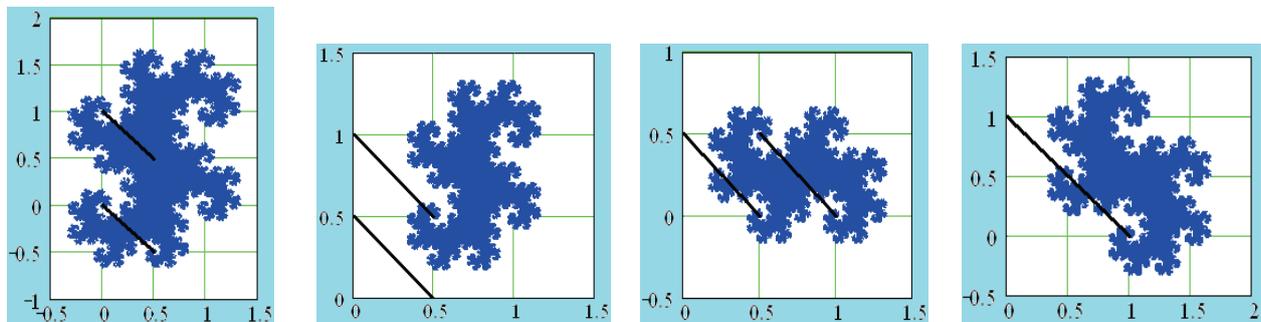


Рис. 13. Шкура двойного дракона: воспроизводится генератором из двух параллельных векторов

В зависимости от длины r и угла наклона α образующих векторов получаем различные варианты шкуры дракона (рис. 14, рис. 15).

Некоторые из них специально подобраны так, что имеют дробную размерность в точности равную числу золотого сечения $D = \Phi$.

Структурные формы естественно видоизменяются.

Но чёткие границы-отличия "золотых" от "не золотых конструкций" отсутствуют.

То есть в шкурах дракона явные признаки золотого сечения не наблюдаются. В том числе, с точки зрения гармоничного восприятия форм.

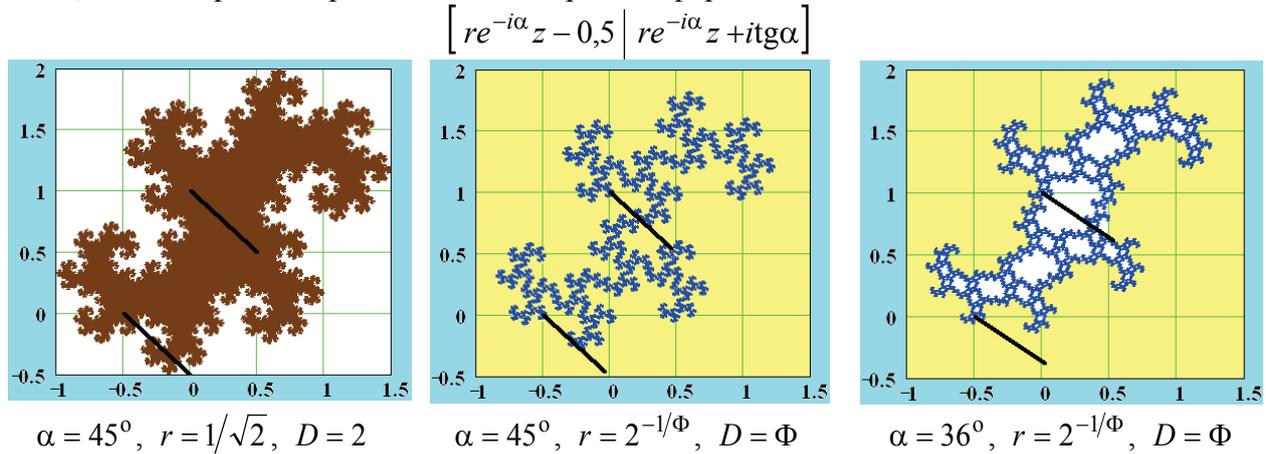


Рис. 14. Варианты шкуры дракона в зависимости от длины r и угла наклона α образующих векторов

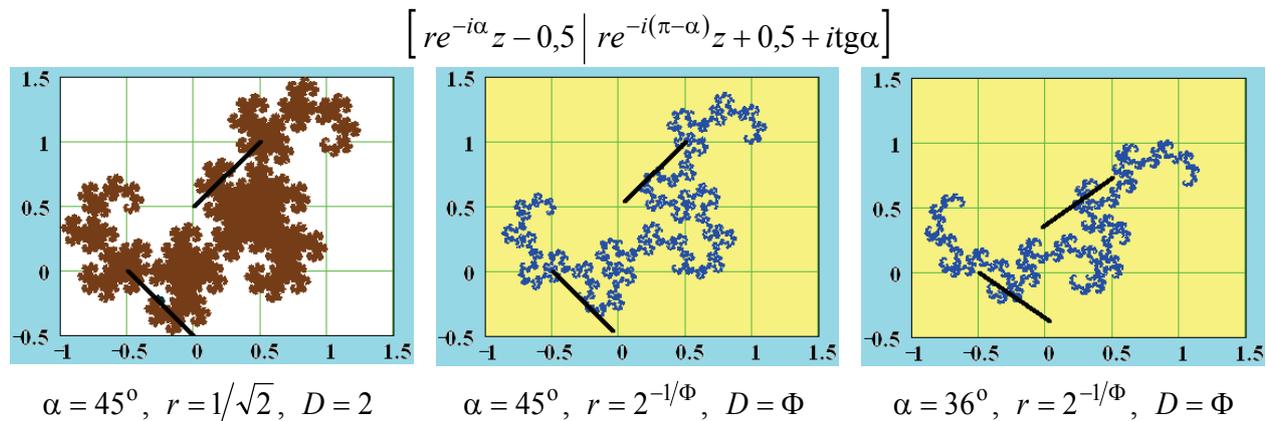


Рис. 15. Варианты шкуры дракона в зависимости от длины r и угла наклона α образующих векторов

Зато отчётливо проявляются иные закономерности.

Если длина вектора $r < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$, что соответствует $D < 3/2$, то кривая прерывается, превращаясь в пыль.

Если длина вектора $r > \frac{1}{\sqrt[4]{4}}$, что соответствует $D > 2$, то нарушается полное наполнение дракона и появляются незаполненные области.

Это действительно специфические свойства данного фрактала. Но, как видим, без присутствия золотосных признаков.

Хорошо это или плохо? – Скорее всего, никак. Разве что вызовет некоторое разочарование активных апологетов ЗС.

Но, как говорится, истина дороже.

Аффинные преобразования. Рассмотренные выше линейные преобразования на комплексной плоскости являются частным случаем более общего аффинного преобразования плоскости [18, с. 49]

$$\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e, \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f, \end{cases}$$

где четыре числа (a, b, c, d) задают линейное преобразование при неизменном положении начала координат, а пара чисел (e, f) характеризует обычную трансляцию.

```

v := (p1 p1 + p2 p1 + p2 + p3)T      N := 200000
XY := (xN ← rnd(1) yN ← rnd(1))
for n ∈ 2..N
  g ← rnd(1)
  j ← if(g ≤ v1, 1, if(g ≤ v2, 2, if(g ≤ v3, 3, 4)))
  xn+1 ← aj·xn + (bj·yn + ej)
  yn+1 ← cj·xn + (dj·yn + fj)
(x y)
    
```

Программирование здесь не сложное.

Зато существенно расширяются возможности манипулирования параметрами, добиваясь самых разных причудливых форм.

В качестве примера приведены фракталы с использованием четырех сжимающих аффинных преобразований (рис. 16).

Слева на этом рисунке представлен классический вариант "листа папоротника" (М. Барнсли),

построенного на базе исходных данных [18, с. 55]. Другие два рисунка сгенерированы согласно заданным параметрам (табл. 2). Золотые углы не имеют особых предпочтений.

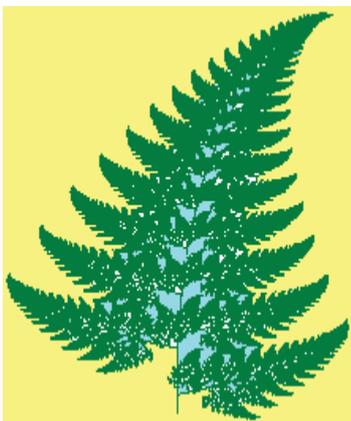
Таблица 2

Системы итерируемых функций из четырех сжимающих аффинных преобразований

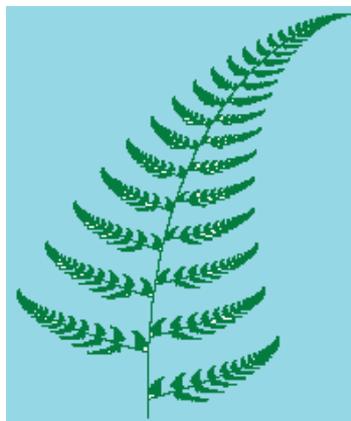
$$A = \cos(\alpha)/3, \quad B = \cos(\beta)/3$$

a	b	c	d	e	f	p
0	0	0	0.16	0	0	0.01
0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
A	-B	B	A	0	1.6	0.07
-A	B	B	A	0	0.44	0.07

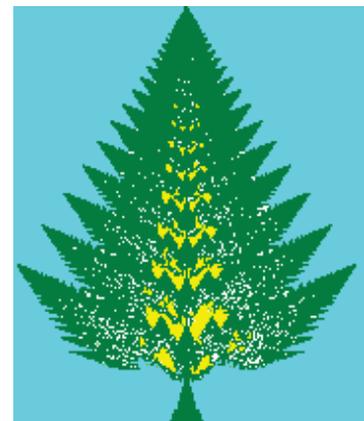
a	b	c	d	e	f	p
0.1	0	0	0.16	0	0	0.01
0.85	0	0	0.85	0	1.6	0.85
A	-B	B	A	0	1.6	0.07
A	B	-B	A	0	1.6	0.07



$\alpha = \beta = 72^\circ$



$\alpha = 72^\circ, \beta = 36^\circ$



$\alpha = \beta = 36^\circ$

Рис. 16. Демонстрация СИФ из четырех сжимающих аффинных преобразований с использованием "золотых" углов в качестве изменяемых параметров

Салфетка Серпинского. Три параллельных горизонтально-направленных вектора длиной $r = 0,5$ приводят к салфетке Серпинского с фрактальной размерностью $D = \ln N / \ln r^{-1} = \ln 3 / \ln 2 \approx 1,5850$.

На физическом уровне она получается последовательным вырезанием центральных равносторонних треугольников [18, с. 20].

Если положить $r = 3^{-1/\Phi} \approx 0,5071$, то получим условно "золотую" салфетку, у которой фрактальная размерность равна $D = \Phi$. Она практически не отличается от исходной структуры, незначительно изменяясь по высоте.

Традиционно СИФ задается функцией $F(z)_j = 0,5 \{ z, z + 1, z + 0,5 + i\sqrt{3}/2 \}$.

Смена направлений этих же векторов изменяет картину с превращением треугольника на снежинко-подобные образования (рис. 17). При этом взаимное расположение самих векторов на плоскости принципиального значения не имеет, поскольку происходит простое "скашивание" углов геометрических фигур.

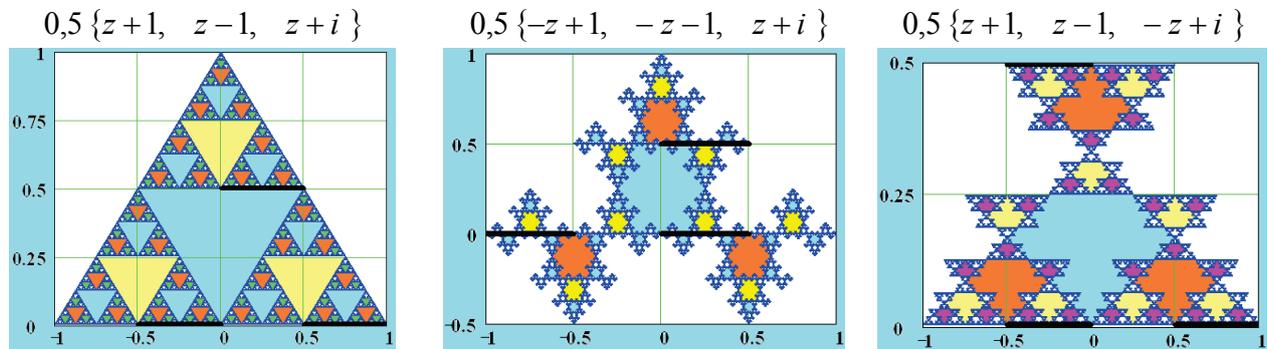
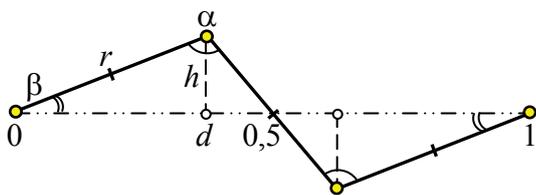


Рис. 17. Модификации салфетки Серпинского в зависимости от расположения трёх векторов

Примечательно, что салфетка имеет нулевую площадь, поскольку в процессе её построения исключается площадь, равная площади исходного треугольника. Мы наблюдаем только бесконечное множество точек, которые не образуют замкнутую фигуру.

Произвольные генераторы. Рассмотрим следующий генератор № 1В, симметричный относительно центра.



Согласно теореме косинусов для треугольника из уравнения $0,5^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 - 2r\frac{r}{2}\cos\alpha$ находится величина $r = \frac{1}{\sqrt{5-4\cos\alpha}}$ – коэффициент сжатия

единичного отрезка. Аналогично по теореме синусов из уравнения $\frac{r/2}{\sin\beta} = \frac{1/2}{\sin\alpha}$ определяется угол $\beta = \arcsin(r \sin\alpha)$ и далее $d = r \cos\beta$, $h = r \sin\beta$.

В частности, для угла $\alpha = 120^\circ$, адекватному правильному шестиугольнику, $\cos\alpha = -0,5$ и отрезок $r = 1/\sqrt{7}$, что соответствует варианту В. Госпера [1, с. 75].

СИФ имеет вид: $F(z)_j = \{ re^{i\beta}z, re^{-i(\pi-\alpha-\beta)}z + d + ih, re^{i\beta}z + 1 - d - ih \}$.

Фрактальная линия генерируется случайным образом по рекурсивной формуле (1) $z_n = F(z_{n-1})_{\lceil \text{rnd } 3 \rceil}$. Объединив вместе четыре фрактальные линии $z_n, z_n e^{-i\frac{\pi}{2}}, z_n e^{-i\frac{\pi}{2}} + 1, z_n - i$, получим некое подобие замкнутых областей (рис. 18).

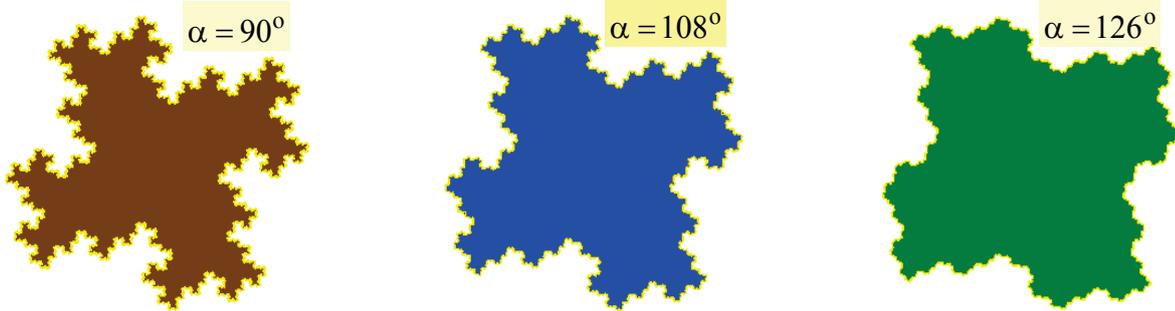
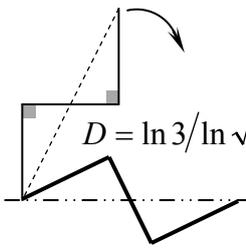


Рис. 17. Модификации фракталов с генератором № 1В

Обратим внимание, что в рассматриваемом случае прямой угол $\alpha = 90^\circ$ дает величину $M = 3$ $1/r = \sqrt{5} = 2\Phi - 1$, которая так или иначе связана с золотой пропорцией. При этом генератор строится упрощенным способом только вертикальными и горизонтальными отрезками, последующим их общим поворотом по часовой стрелке на угол $\arctg 2 = \arcsin(2/\sqrt{5}) \approx 63,4^\circ$ и сжатием в $\sqrt{5}$ раз (для приведения к единичному отрезку) с простой СИФ:



$$M = 3$$

$$1/r = \sqrt{5},$$

$$D = \ln 3 / \ln \sqrt{5} \approx 1,365$$

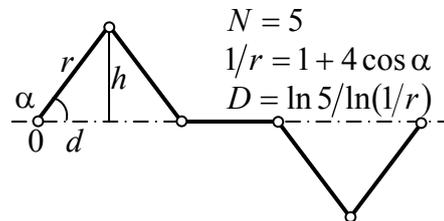
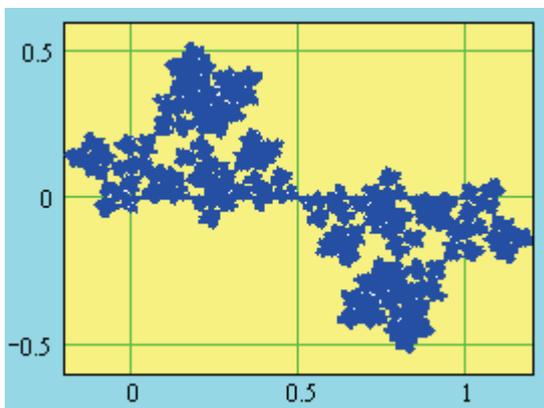
$$F(z)_j = \frac{e^{-i \arctg 2}}{\sqrt{5}} \{ z_i, z + i, z_i + 1 + i \}.$$

Пожалуй, это одно из немногих проявлений золотого сечения. Но не по визуализации, а численному определению параметров.

Представляет интерес другой генератор № 2В, имеющий такую форму СИФ:

$$F(z)_j = \{ z\rho_1, z\rho_2 + d + ih, (1 - 4d)z + 2d, z\rho_2 + 1 - 2d, z\rho_1 + 1 - d - ih \},$$

где $1/r = 1 + 4 \cos \alpha,$ $d = r \cos \alpha,$ $h = r \sin \alpha,$ $\rho_1 = re^{i\alpha},$ $\rho_2 = re^{-i\alpha}.$



Примечательно, что фрактальная размерность, характеризующая размерность подобия рассматриваемой фигуры, для "золотого" угла $\alpha = 72^\circ$ выражается целым числом $D = \ln 5 / \ln(1 + 4 \cos 72^\circ) = 2.$

В качестве примера рассмотрим ещё три генератора (рис. 18).

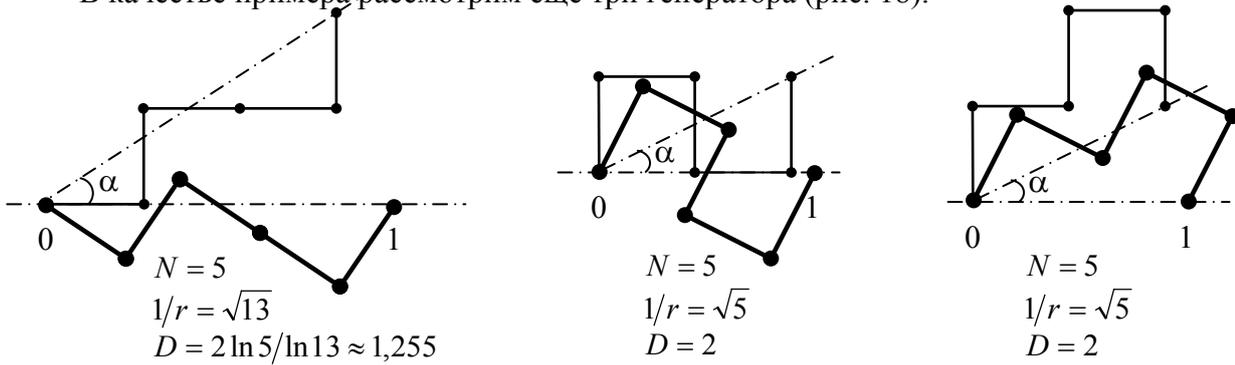


Рис. 17. Генераторы фракталов №№ 3В – 5В

СИФ соответственно имеют вид:

$$F(z)_j = \rho \{ z, zi+1, z+1+i, z+2+i, zi+3+i \}, \quad \rho = e^{-i \arctg \frac{2}{3}} / \sqrt{13};$$

$$F(z)_j = \rho \{ zi, z+i, -zi+1+i, z+1, zi+2 \}, \quad \rho = e^{-i \arctg \frac{1}{2}} / \sqrt{5};$$

$$F(z)_j = \rho \{ zi, z+i, zi+1+i, z+1+2i, -zi+2+2i \}, \quad \rho = e^{-i \arctg \frac{1}{2}} / \sqrt{5}.$$

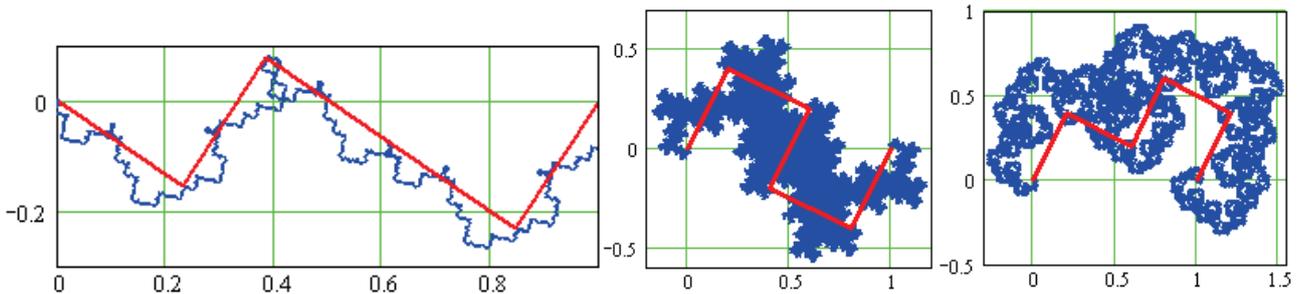
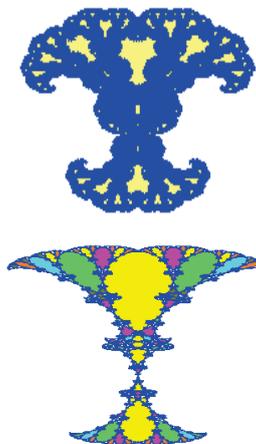
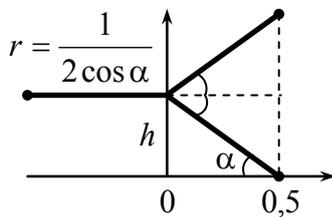


Рис. 18. Фракталы с генераторами №№ 3В – 5В

Разнообразим наши фракталы дополнительной подборкой:



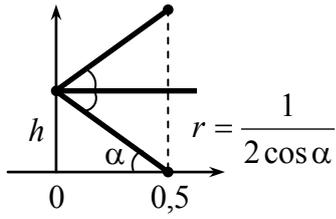
$$\alpha = 36^\circ, \quad N = 3, \quad 1/r = \Phi$$

$$D = \ln 3 / \ln \Phi \approx 2,283$$

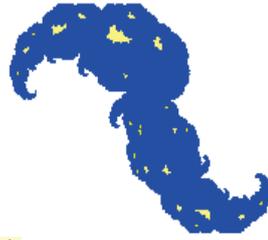
$$\{ re^{i\alpha} z + ih, \quad re^{-i\alpha} z + ih, \quad -rz + ih \}$$

$$\alpha = 18^\circ, \quad N = 3, \quad 1/r = \sqrt{2 + \Phi}$$

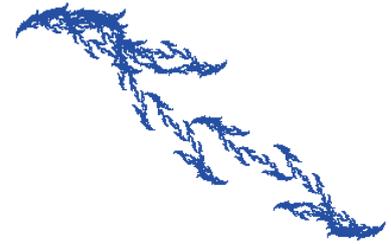
$$D = 2 \ln 3 / \ln(2 + \Phi) \approx 1,709$$



$$\{ re^{i\alpha}z + ih, re^{-i\alpha}z + ih, -rz + r + ih \}$$



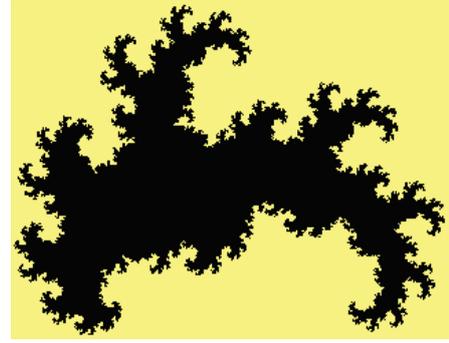
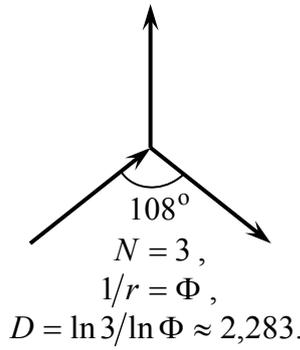
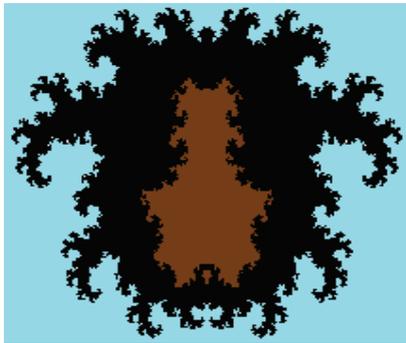
$\alpha = 36^\circ$



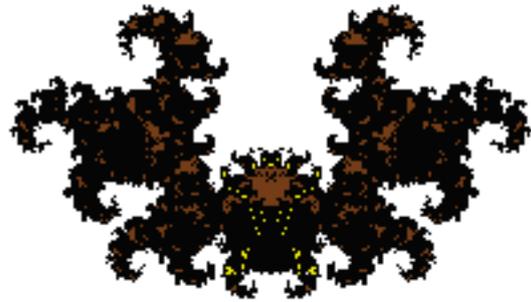
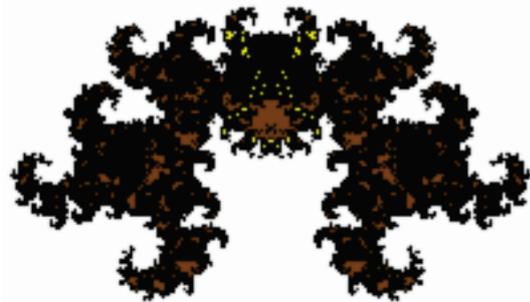
$\alpha = 18^\circ$

$$F(z)_j = \left\{ \frac{z}{\Phi} e^{i\pi/5}, \frac{z}{\Phi} e^{-i\pi/5} + \frac{1}{2} + ih, \frac{1}{\Phi} zi + \frac{1}{2} + ih \right\}$$

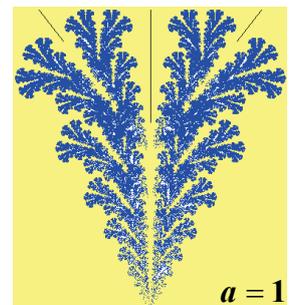
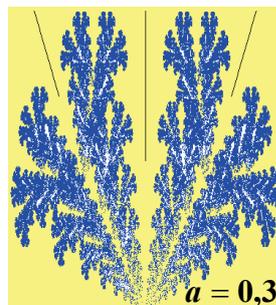
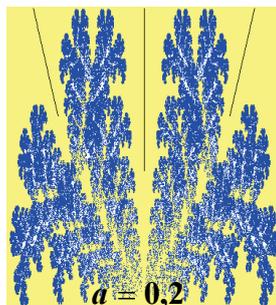
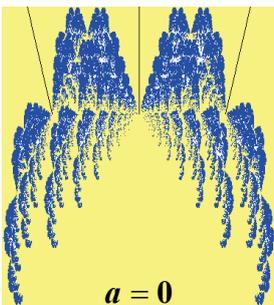
$$h = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4} - \Phi}$$



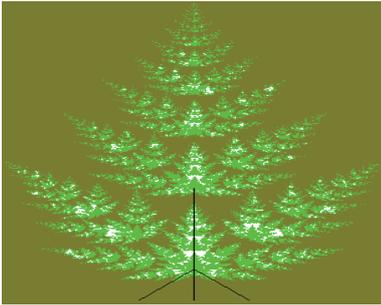
$$F(z)_j = \{ re^{i\alpha}z, re^{-i\alpha}z + 0.5 + ih, irz + 0.5 + ih \}$$



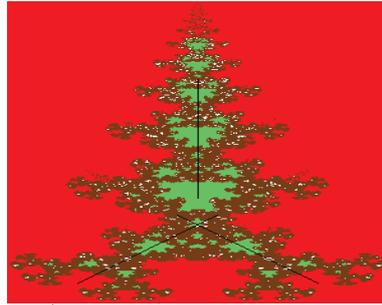
$$0,5 \{ z \rho_1 z + i, z \rho_2 z - i, z - a \}, \rho_{1,2} = e^{\pm i\pi/5}$$



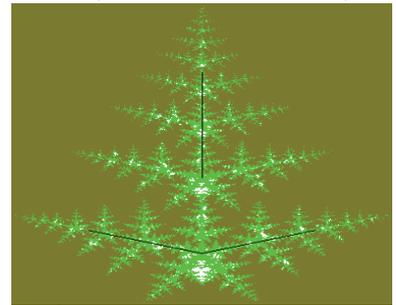
$$0,5 \{ z\rho_1, z\rho_2, 1.4z-1 \}$$



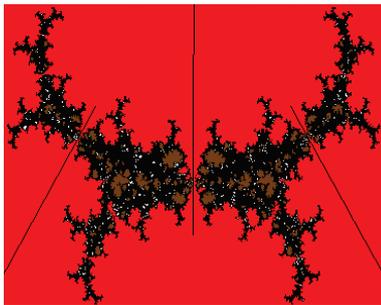
$$0,5 \left\{ z\rho_1 - \frac{i}{2}, z\rho_2 + \frac{i}{2}, 1.4z+1 \right\}$$



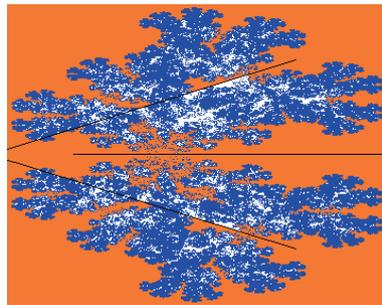
$$0,5 \{ z\rho_1^2, z\rho_2^2, 1.4z+1 \}$$



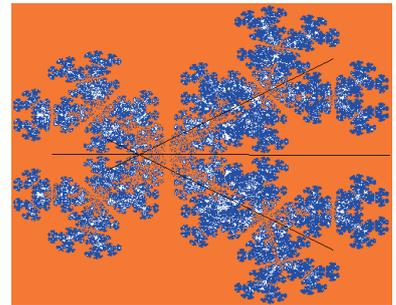
$$0,5 \left\{ z\rho_1 + \frac{i}{2}, z\rho_2 - \frac{i}{2}, \frac{1}{2} - 1.4z \right\}$$



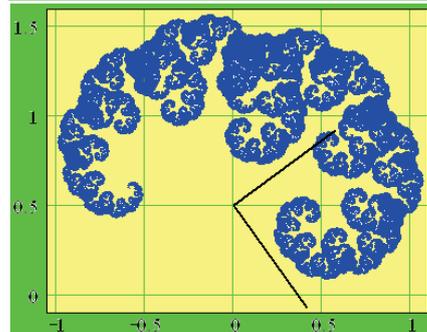
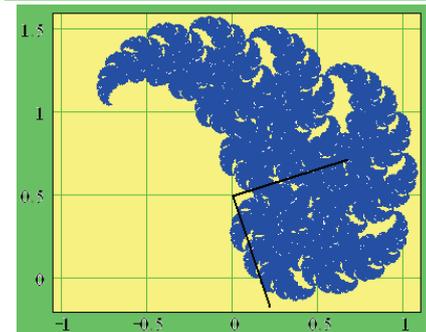
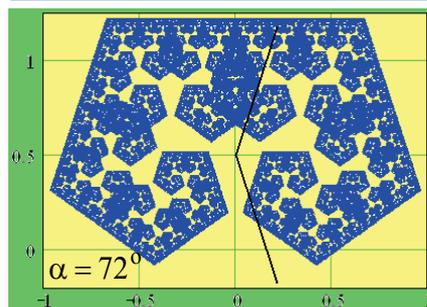
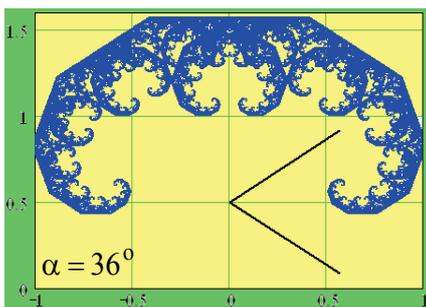
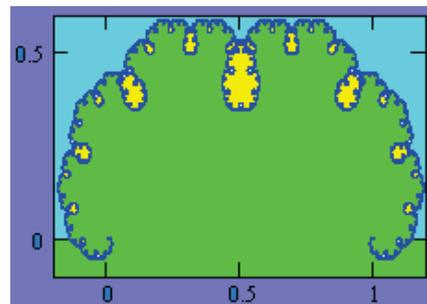
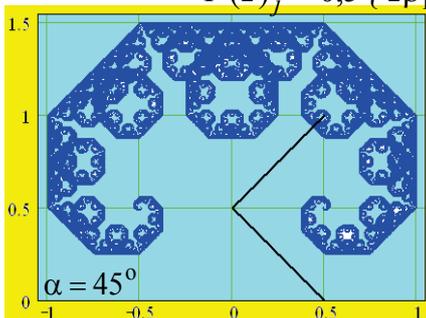
$$0,5 \left\{ z\rho_1 - \frac{i}{2}, z\rho_2 + \frac{i}{2}, \frac{1}{2} - 1.4z \right\}$$



$$0,5 \left\{ z\rho_1 - \frac{i}{2}, z\rho_2 + \frac{i}{2}, 1 - 1.4z \right\}$$



$$F(z)_j = 0,5 \{ z\rho_1 + i, z\rho_2 + i \}, \rho_{1,2} = \sqrt{2} e^{\pm i\alpha}$$



Вместо заключения. Итак, проанализированы наиболее распространенные формы классических фракталов, являющихся прообразами более сложных структур.

В качестве переменных выбирались линейные и/или угловые параметры, определяющие золотое сечение.

Каких-либо предпочтений ЗС в наблюдаемых графических построениях не отмечено.

Можно сказать, что в пределах исследованных фрактальных структур золотое сечение особым образом себя не проявляет.

Сдаётся, что это малопродуктивный путь поиска общностей в связке "фракталы – ЗС".

Мало пользы искать золото во фракталах, которого там, скорее всего, нет. Не это является приоритетом "золотоносности" фракталов.

Равно как нет особой необходимости специально внедрять ЗС во фракталы.

ЗС и фракталы и без этого достаточно близкие структуры.

Нужно искать не возможные проявления числа Φ во фракталах, а сходные проявления и общность свойств на общетеоретическом уровне, что гораздо существеннее и весомее.

Та же *рекурсия или непрерывная цепь самоподобна, как и фрактал*. С какого бы места не начали отсчёт, всё время будем приходить к числу Φ . Это и есть действительное совпадение целого с частью себя самого.

То есть формирование числа золотого сечения уже фрактально подобно!

Образование самой гармонической пропорции также несёт в себе проявление фрактальности.

Что-то ещё более значительное в отношении "фракталы – ЗС", вероятно, трудно найти.

Во всяком случае, проведенные исследования это подтверждают.

Что ж, отрицательный результат – тоже результат.

Если и говорить о взаимосвязи размерности "вселенских" фрактальных множеств с золотым сечением, то это лишь зыбкое предположение.

Никаких аргументированных оснований для его фетишизации на сегодня нет.

Литература:

1. *Мандельброт Б.Б.* Фрактальная геометрия природы: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 656 с.

2. *Татаренко А.А.* Золотые Тm-гармонии и Dm-фракталы – суть солитонно-подобного Тm-структурогенеза мира // Академия Тринитаризма. – М.: Элю № 77-6567, публ.12691, 09.12.2005. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320010.htm>.

3. *Василенко С.Л.* Триномиально-квадратичный код мироздания // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15995, 12.07.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161675.htm>.

4. *Василенко С.Л.* Базовое тождество математических основ гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16069, 10.09.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm>.

5. *Каменская В.Г., Зверева С.В.* Ряд Фибоначчи и его странные свойства: фрактальные и нумерологические характеристики // Сознание и физическая реальность. – 2001.– № 5. – С. 17–30. – <http://www.numbernautics.ru/content/view/314/35/>.

6. *Wall D.D.* Fibonacci Series Modulo m // American Mathematical Monthly. – Vol. 67 (1960), 525–532.

7. *Василенко С.Л.* Циклические структуры и сокрытые периодичности суммирующих рекурсий // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15756, 17.01.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161603.htm>.

8. *Сокольчук К.Ю., Остапович В.В.* Золотая пропорция, фракталы и хаос в связи с некоторыми представлениями о мироздании // Клуб константа. – Киев, 2007. –

<http://314159.ru/mathematics.htm> / Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.16576, 20.06.2011. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321201.htm>.

9. *Василенко С.Л.* Бифуркации в нелинейной динамической модели на основе золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15232, 14.04.2009. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322037.htm>.

10. *Харитонов А.С.* Становление социальных систем и фрактал "золотого сечения" // Научно-методолог. сборник факультета социального управления. – М., 2008.– С. 77–82.

11. *Шипицын Е.В., Попков В.В.* Двойственность и золотое сечение в теории фракталов и хаоса // Вестник Международного института А. Богданова. – 2001. – № 2(6). – С. 5–27 / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.11073, 18.03.2004. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001a/00160023.htm>.

12. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. – М: Постмаркет, 2000. – 352 с.

13. *Василенко С.Л.* Математические начала гармонии: русская матрешка в геометрических образах гармонической пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15978, 04.07.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161668.htm>.

14. *Байрашев К.А., Рекотов Р.А., Байрашева В.К.* Определение центра масс фрактальных структур // Фундаментальные исследования. – 2006. – № 7 – С. 18–19. – www.rae.ru/fs/?section=content&op=show_article&article_id=2278.

15. *Василенко С.Л., Белянин В.С., Радзюкевич А.В.* Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей (Фибоначчи, Трибоначчи ...) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16023, 30.07.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161684.htm>.

16. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528 с.

17. *Василенко С.Л.* Фрактальные многоугольники и золотое сечение // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15108, 21.02.2009. <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321095.htm>.

18. *Божокин С.В., Паршин Д.А.* Фракталы и мультифракталы: Учеб. пособ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.

© ВаСиЛенко, 2011 

