С.Л. Василенко, В.С. Белянин

Негармоничная гармония: по лабиринтам Владимирова–Стахова в среднегармонических оценках золотого сечения, энтропии и рекурсии Платоновых тел

Слова важны, но ещё важнее смыслы

Тандемные истоки. В последнее время в орбиту золотого сечения (ЗС) и математизации гармонии довольно неожиданно, но безапелляционно-уверено ворвался "молодой" тандем двух докторов технических наук.

Молодой, – в смысле совместной работы. У каждого в отдельности за плечами должен быть богатый жизненный путь в полтора века на двоих.

Доктор А.Стахов – автор многочисленных научных работ, патентов и монографий, признанный старожил-абориген в среде "золотосеченцев" или, как их ещё учтиво называют, – "гармонистов", то есть пишущих о гармонии. Доктор В.Владимиров в этой сфере – по его же словам, безотносительный новичок.

Есть в этом и нечто закономерное. Ещё С.Алфёров отмечал [1] «наличие сподвижников или внешних причин на каждом этапе» научной деятельности А.Стахова. То есть каждое новое для себя направление (а их около пяти) он всякий раз начинал с вхождения в тандем-соавторство, видимо, в условиях дефицита собственных разработок. Затем плавно и незаметно переходил на единоличную авторизацию.

Ком первого блина. Уже одна из первых статей тандема [2] привлекла внимание. Ещё бы! Чего стоит только броский подзаголовок о раскрытии тайны (!) золотого сечения. – Что и говорить, сразу впечатляет!

Однако последующее осмысление результатов работы поубавило начальные эмоции.

Притязание на эстетическую оригинальность и создание неожиданного образа в виде "раскрытия тайны" обернулось всего лишь выдуванием золотистоподобного мыльного пузырька[1], хотя статья [2] и написана с претензией на научность и строгость изложения.

Так что заигрывание с читателями в тайны – это первый и главный вымысел.

Хорошо зная самые разные работы и стиль изложения проф. А.Стахова, стало ясно, что материал практически полностью подготовлен его соавтором, а профессор был добавлен, так сказать, для повышения авторитетности... Но не это главное.

В процессе ознакомления с упомянутой работой выявились многочисленные неточности и несуразности. Их количество, можно сказать, намного превысило допустимый уровень шума (в системе сигнал/шум), характерного для подобных никем не рецензируемых статей.

Именно это послужило основной причиной и предметом отзыва [3].

Признаться, мы были немало обескуражены тональностью и сарказмом прозвучавшего ответа [4] на наши замечания, которые, к сожалению, были восприняты исключительно как посягательство на авторскую точку зрения. Похожее прочтение из категории "сам такой" мы видим и в другом поспешном язвительном ответе [5]. Чего стоит только стиль заголовочного обращения доктора наук: «*Ответ дилетанту...*». – Да уж, нравы!

Ну, да ладно. – На то он и первый блин новоявленного золотоискателя.

Кстати, многочисленные дополнительные пояснения и новые литературные источники, прозвучавшие в ответах В.Владимирова, хорошо известны. Но их следовало бы органически вплетать в канву основной статьи [2], а не выпутываться потом "задними" числом, ставя себя изначально в двусмысленное положение.

---

[1] Заметим, что это дело довольно непростое. Здесь важен рецепт мыльного раствора, опыт, сноровка, погода и проч. Известный "Сэмсэм Мыльный Пузырь" (Sam Heath) выдул самый огромный в мире мыльный пузырь. – http://blogs.ipm.ua/2010/04/samyj-bolshoj-v-mire-mylnyj-puzyr/.

Что делать... По ответам стало понятно, что авторский тандем не воспринимает критику и впредь намерен рьяно оберегать каждое написанное им слово. И не важно, что оно несёт: научное знание или нелепые фантазии. Главное стоять на своих, пусть даже ненаучных надуманных позициях.

Такая позиция вызывает улыбку. Тем более, вкупе с последующими публикациями стало проясняться, что в хитросплетениях лабиринтов [2] всё запутано основательно, и простая косметическая прополка авторам уже не поможет.

Жаль только, что их ошибки могут стать в дальнейшем источником-генератором более серьезных просчетов и заблуждений. – Золотоносная пандемия заразительна.

Поэтому мы поставили перед собой довольно простую задачу: на конкретных примерах обозначить вешки тупиков в лабиринтах[2] Владимирова–Стахова (см. заголовок) в их благородном "поиске" новых золотоносных жил.

Выделим несколько основополагающих моментов из процитированных работ наших оппонентов, и попробуем оценить их состоятельность, претендующую на научность.

К уравнению золотого сечения. Читаем [4]: «*Любое характеристическое уравнение вида* $a^2 = \lambda a + \lambda^2$ *отвечает так называемому "гармоническому* <u>*ЗС*</u>*", для которого также соблюдается* <u>*золотая пропорция*</u> *и которому присущи все особенности классического* <u>*ЗС*</u> *с* $\lambda = 1$».

После прочтения этой фразы так и просится что-то ироническое, поскольку перед нами ярчайший образец математического и терминологического манипулирования.

Но воздержимся. Сейчас главное понять логику и уровень мышления авторов.

Для этого несколько перефразируем их высказывание на примере похожего уравнения:

любое характеристическое уравнение вида $2a = \lambda$ *отвечает так называемому "универсальному (гармоническому)* <u>*делению пополам*</u>*", для которого также соблюдается пропорция с* <u>*делением пополам*</u> *и которому присущи все особенности классического* <u>*деления пополам*</u> *с* $\lambda = 1$.

Приведенный пример отчетливо высвечивает демагогическую сущность цитируемого выше утверждения.

Действительно, максимальный по модулю положительный корень приведенного уравнения относительно переменной a равен $a_1 = \lambda \cdot \left(1+\sqrt{5}\right)/2 = \lambda \cdot \Phi$, где Φ – число ЗС.

Рассматривая такое решение, автор [4] пытается создать у читателя иллюзию, будто корень уравнения генерирует золотые сечения. Причём сколько корней (в зависимости от λ), столько и гармонических (?) ЗС. Ему невдомёк, что отрезки, может, и разные, но ЗС одно! Это положение настолько очевидно, что даже неловко объяснять доктору наук.

Следует различать процесс деления произвольного отрезка по золотому сечению, и золотое сечение, как математическую константу Φ. Для этого в математике, не теряя общности рассуждений, обычно оперируют с отрезком единичной длины, поскольку изменение длины отрезка ничего нового в рассмотрение не вносит.

Автор [4] наоборот увидел в этом принципиальную разницу и на этом "сгорает" в своих последующих спорных, а порой и неверных формулировках, что отражается и в его работе с соавтором [2]. Так что непонимание центральных принципов геометрии характерно для обоих докторов наук.

В геометрии существуют аксиомы расстояния, среди которых есть и такая (в изложении без отсылки к другим, связанным с ней аксиомам):

каковы бы ни были две точки M *и* N, *существует единственная функция – расстояние между точками, – принимающая значение* 1 *для точек* M *и* N, *то есть* $|MN| = 1$.

[2] Слово "лабиринт" упоминается как метафора для отражения сложной, неясной и неоднозначной ситуации.

Данная аксиома означает, что метрика однозначно определяется выбором единичного отрезка, и этот выбор может быть произвольным.

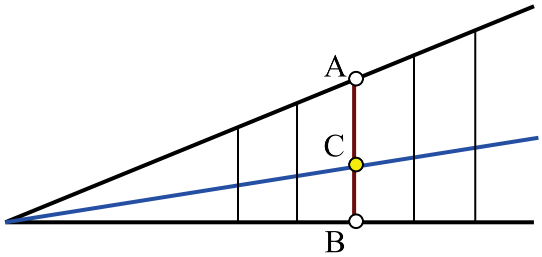
Любой единичный отрезок, умноженный на λ, вновь может быть принят за единичный.

Это тот самый случай, когда в математике обычно говорят: «Без потери общности рассуждений примем за исходный отрезок единичной длины».

Если эту аксиому расстояния не воспринимать, то геометрию лучше навсегда отложить в сторону. И тогда точно не будут рождаться беспочвенные несуразности.

Например, античный циркуль, найденный в Помпеях и ныне хранящийся в музее Неаполя, имеет размеры частей 56 и 90 мм, то есть единичный отрезок в данном случае равен 146 мм. – Ну и что с того?

Из сказанного следует вывод: исходное уравнение авторов $a^2 = \lambda a + \lambda^2$ принципиально не отражает ни гармоническое, ни симфоническое[3] или кордебалетное и ни какое-либо другое ЗС, разве что как плод сильно развитого воображения. Принцип деления (сечения) отрезка остаётся неизменным независимо от варьирования масштаба λ.



Чтобы авторы [2] поняли азбучность своей ошибки, приведем тривиальный геометрический пример с единичным отрезком АВ, разделенном точкой С в золотой пропорции (см. рисунок).

Не будем описывать построение, и не будем его комментировать, а приведем только одно слово, которое в подобном случае писали математики в Древней Индии: «Смотри!».

Каким было золотое сечение по своей сути, таким и остаётся для любого метрического непрерывного отрезка. Поэтому рассмотрение отрезка произвольной длины, в противовес единичному отрезку, – не только слабо аргументированный и, по сути, бессодержательный посыл, но и говорит о математическом нигилизме.

Неплохо было бы авторам задуматься, почему великий математик К.Ф.Гаусс (1777–1855) при делении окружности на 17 равных частей исследовал только окружность радиуса $r = 1$, а не набор окружностей с радиусами λ.

Рассмотрим теперь «проблему двух докторов» с другой стороны.

Любое действительное число b можно представить, как $b = k\cdot\Phi$. Но из этого вовсе не следует, что оно порождается ЗС или имеет к нему какое-либо отношение. Константа золотого сечения Φ как таковая не несёт тут смысловой нагрузки.

Подобным образом каждое число может быть записано через какую угодно константу, например π.

Другими словами, всякое вещественное число u можно выразить через другое произвольное число v с определённым весовым коэффициентом k, то есть $u = k\cdot v$.

Никаких преференций у числа $v = \Phi$ при этом нет. На его месте может стоять любое иное число, не равное нулю.

Из того, что $7 = k\sqrt{2}$, где $k = 7/\sqrt{2}$, вовсе не следует "генетическая" зависимость семёрки от архимедовой константы $\sqrt{2}$.

Итак, на ошибочном и довольно примитивном уровне авторами [2] предпринимается очередная попытка протащить идею множественности золотых сечений (сколько отрезков, столько и ЗС).

В истории ЗС это делается не первый раз.

Но впервые такая попытка осуществляется без понимания или игнорирования элементарных начал математики.

---

[3] Изначально гармония связана с музыкой и считалась в древности четвёртой матемой.

Логически-терминологические лабиринты.

Приведём ещё некоторые фрагменты работы [2], не отмеченные нами ранее.

1) «*Расширено само понятие золотого сечения*: *...если* $b/a = \Phi$, *то Целое, Большее и Меньшее обязательно связаны золотой пропорцией*». – Данное утверждение непосредственно следует из определения золотого сечения без какого-либо дополнительного р а с ш и р е н и я понятия ЗС.

Следуя авторской логике, можно развить это "мудрое" изречение. Например, так: «Расширено понятие равенства: если $a = 2$, то a – число, обязательно равное двум»!

Процитированное выше утверждение должно непременно войти в сокровищницу занимательных цитат-несообразностей «*расширенного золотого сечения*».

2) «*Гармоническое золотое сечение – деление отрезка произвольной длины на части* a *и* $b = a\Phi$*... Классическое золотое сечение – частный случай гармонического золотого сечения, для которого...* $a = \Phi$». – Получается, что "классическое ЗС" авторы строят на отрезке иррациональной длины $c = a + b = \Phi + \Phi^2 \approx 4{,}236$. Весьма странная "классика", если не сказать больше. Кроме того, поскольку "гармоническое ЗС" отличается от классического варианта только длиной исследуемого отрезка, то вся разница сводится к тому, что отрезок длиной 4,236 – частный случай отрезка произвольной длины. – Очень "глубокая" мысль!

3) «*Новая пропорция справедлива для любых положительных ненулевых значений меньшего и большего* (a и b)». – В данном случае авторы ведут речь о тривиальном алгебраическом тождестве $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{b}{b - h/2}$, где $h = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Действительно, $$\frac{a+b}{b} = \frac{b(a+b)}{b^2} = \frac{b(a+b)}{b^2 + ab - ab} = \frac{b}{b - \dfrac{ab}{a+b}} = \frac{b}{b - h/2}.$$

То есть, имеем дело исключительно с тождеством.

И только так следует рассматривать это равенство одного (!) отношения, но записанного различными способами.

Например, отношение 3/5 можно записать через равенства миллионом способов, но это не будут пропорции.

Пропорция в математике обычно составляется для того чтобы, что-то из неё найти, "выудить". Не зря же говорят: "решить пропорцию".

Вспомним ту же золотую пропорцию, после составления и решения которой (через квадратное уравнение), получается константа золотого сечения Φ.

У авторов [2] в их "*новой пропорции*" решать нечего.

Алгебраическое равенство выдаётся за некую пропорцию в расчете на невнимательного или несведущего читателя.

Соотношение справедливо для абсолютно любых чисел, без привязки к задаче деления чего-либо на какие-либо части. Например, a – число людей на Земле, b – число людей, обладающих талантом демагогии или игнорирующих элементарную математику.

Их равенство сродни равенству $\dfrac{a}{1} = \dfrac{a^2}{a}$ (формально вид пропорции), которое вызывает у авторов неподдельную радость от того, что оно выполняется при любом значении a.

Аналогичным образом можно представить, например, разность квадратов двух чисел $\dfrac{a^2 - b^2}{a+b} = \dfrac{a-b}{1}$ и многие другие выражения-тождества.

О термины, о… Терминологические ходы в лабиринтах [2] ещё любопытнее, чем уравнения... Сначала авторы называют исходную пропорцию гармонической только потому, что в ней присутствует величина h. То есть термин «*гармонические уравнения золотого сечения*» им необходим лишь для того, чтобы как-то отличать эти уравнения от "*классического*" золотого сечения. – Уровень логики более-менее понятен.

Но затем слово "уравнение" опускается, и ... остаются только «*гармонические* (?) *золотые сечения*», как деление отрезка произвольной длины на части a и $b = a\Phi$.

Ну, а "гармонические" эпитеты теперь причём? – Немая сцена.

На страницах их статьи можно встретить и другие перлы: «*деление целого на большее и меньшее является золотым гармоническим* (?)». Но и этого мало. "Пошла писать губерния" дальше: «*гармоническому* (?) *золотому сечению соответствует золотая пропорция*».

Так происходит подмена понятий. Уравнение-то может и гармоническое (авторское право называть), но вот само деление отнюдь, – обычное золотое сечение, которое не зависит от конкретных размеров объекта.

Ни в делении величин, ни в золотом сечении отрезка уже нет среднегармонического, зато слово "гармоническое" сыплется налево и направо, как из табакерки.

Хотя деление произвольного отрезка золотым сечением спокойно выполняется без надуманного пафоса вокруг среднегармонического. Следовательно, применение "гармонической" терминологии здесь бессмысленно. Её удел – бритва Оккама.

На этом обсуждение работы [2] и её продолжений-ответов можно было и закончить.

Сдаётся, что совместно с [3] и так уже через край. Буквально энциклопедия простых заблуждений, зато вкупе с демагогическими рассуждениями.

Практически всё изложенное в них теряет смысл, поскольку изначально основано на ошибочных посылах, в том числе ложной значимости влияния длины отрезка в задаче ЗС.

О роли среднегеометрического в теории ЗС. Снова читаем [2] и ещё раз удивляемся: «*само название термина "гармоническое среднее" подсказывало возможность использования его в теоретическом исследовании золотого сечения, как неиссякаемого источника вселенской гармонии*». – Вот оно, оказывается что. Увидели в слове "гармоническое" возможность введения "*гармонического среднего*" в «*теоретическое исследование золотого сечения*».

Но в золотую пропорцию можно "внедрить" не только «гармоническое среднее», но и любое среднее, например, «арифметическое среднее».

Пусть $A = \dfrac{a+b}{2}$ – среднеарифметическое чисел a и b. Тогда золотую пропорцию можно представить в виде

$$\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b} = \frac{2A}{b}.$$

Следуя "логике" авторов [2] после такого преобразования золотое сечение надо называть «арифметическим золотым сечением». При этом появляется возможность напускать словесный "арифметический" туман и строить якобы "обобщающие" теории.

Но вернемся к «гармонии», «гармоническому среднему» и посмотрим, насколько близко отношение упомянутых понятий к ЗС?

Слово "гармоническое" используется в гармоническом или частотном анализе [7] при разложении исходной функции на элементарные составляющие – гармонические колебания $e^{i\omega x}$ с разными частотами ω (преобразование Фурье).

Можно также провести аналогии с музыкальной гармонией в контексте частотных характеристик звуков через сложение обратных величин или путем разложения звуковых колебаний на синусоидальные частоты.

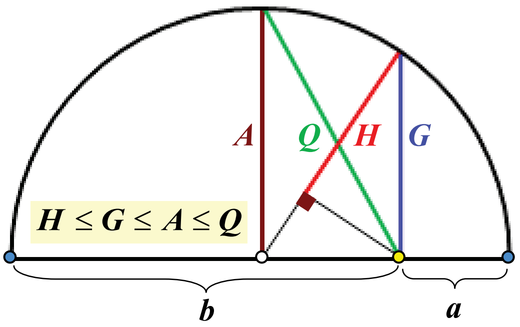
Примеры могут быть продолжены, но наше основное возражение заключено в ином.

"Гармоническое среднее" нескольких величин связано с понятием гармонии в её широком смысле не больше чем среднеарифметическое или среднегеометрическое.

Никаких преференций среднегармоническое для гармонии в её древнегреческом понимании не имеет.

Обратимся к рисунку, где геометрически отображены четыре основных вида средних.

Хорошо видно, что среднегармоническое относится к разряду наиболее сложных геометрических построений.



$H = \dfrac{2}{a^{-1}+b^{-1}} = \dfrac{2ab}{a+b}$ – среднегармоническое;

$G = \sqrt{ab}$ – среднегеометрическое;

$A = \dfrac{a+b}{2}$ – среднеарифметическое;

$Q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ – среднеквадратическое.

Если другие средние образуются в один приём, то величина H – в два.

Сначала нужно построить треугольник со среднегеометрическим. И только потом, опустив перпендикуляр на гипотенузу, найти отсекаемую на ней часть в виде отрезка H.

В виду сложности формирования к среднегармоническому показателю обращаются чаще по необходимости, когда заходит речь об обратных величинах в поисках их среднеарифметического значения.

Если говорить о средних значениях действительных величин (по Колмогорову) [8], то к золотому сечению ближе всего *среднегеометрическое* значение [9]: длина большего отрезка x есть среднее геометрическое, или, как часто говорят, среднее пропорциональное двух длин: всего отрезка c и его меньшей части $x = \sqrt{c(c-x)}$.

Бритва Оккама. Уйдём от ненужных сущностей в виде среднегармонических значений, искусственно привнесенных в работе [2] и только заводящих в тупик.

Начнём с самого начала.

Пусть задан отрезок произвольной длины c. Мы специально априори выбираем неединичный отрезок, чтобы показать, что это не влияет на конечный результат.

Разделим отрезок на две части $a+b=c$ в отношении $a/b = \lambda \le 1$.

Находим параметры $(a \quad b) = c\left(\dfrac{\lambda}{1+\lambda} \quad \dfrac{1}{1+\lambda}\right)$.

Исходя из решения квадратного уравнения общего вида, одна из формальных двучленно-аддитивных рекурсий, сходящихся к аттрактору A, равному a или b, имеет вид:

$$f_{n+1} = A\phi \cdot f_n + (A\phi)^2 f_{n-1}. \qquad (1)$$

В частности, для золотого сечения: $a/b = \phi = \Phi^{-1}$, $(a \quad b) = c(\phi^2 \quad \phi)$.

Заметим, что здесь нет никакого гармонического, а есть обыкновенное золотое сечение.

Терминология со словом "гармоническим", которую авторы [2] искусственно "подгоняют и подтягивают" под несуществующую "математику гармонии", автоматически подпадает под бритву Оккама.

Наше изложение очень простое, без всяких среднегармонических и прочих нагромождений. Более того, теперь у нас для обеих частей a и b, одна общая запись разностного уравнения (1), вместо двух [2].

В связи с этим попросту нельзя не вспомнить патетическую самооценку [2]:

«*И только в* 2010 г.[4] *была установлена взаимосвязь между переменными* (?) *коэффициентами рекуррентного уравнения и параметрами произвольного сечения*».

Что тут устанавливать? – В уравнении (1) всё элементарно, как на ладони.

Кстати, несмотря на произвольные значения параметров (a, b), в ходе выполнения рекурсии (1) они постоянны! Иначе возможна потеря сходимости.

Поэтому в математике выражение типа (1) называется линейным однородным разностным (возвратным) уравнением 2-го порядка <u>с постоянными коэффициентами</u> [10, гл. 5; 11, 12, 13], а не переменными, как упорно и ошибочно утверждает доктор В.Владимиров.

Псевдовероятности. Выделим опять-таки формально два числа p_1 и $p_2 = 1 - p_1$:

$$f_{n+1} = p_1 \cdot \frac{A\phi}{p_1} f_n + p_2 \cdot \frac{(A\phi)^2}{p_2} f_{n-1}. \tag{2}$$

Можно, конечно, абстрактно рассуждать о каких-либо событиях, привязанных к числам p_1 и $p_2 = 1 - p_1$, которые не возбраняется даже называть вероятностями.

Только непонятно, – вероятностями ЧЕГО, каких СОБЫТИЙ?

Из-за невнятности, рассуждения авторов трудно интерпретируемы и представляют собой хороший пример того, как опасно увлекаться трактовкой математических преобразований, не давая себе ясного отчета в их значении.

И уже совсем получается "несъедобная каша" или "куча-мала", если перейти в работе [2] к истолкованиям такой псевдовероятностной рекурсии на языке информации, энтропии и/или негэнтропии. Да и само шараханье от энтропии к негэнтропии напоминает косметический ремонт в старой запущенной квартире, когда покраска не скрывает трещины в стенах, готовых рухнуть.

Если уж и связывать между собой понятия энтропии и рекурсии, то можно вести речь о минимуме энтропии и наибольшей информационной насыщенности "золотой модели" [3]:

двучленно-аддитивная рекурсия с единичными коэффициентами обеспечивает минимум метрической и динамической энтропии в достижении золотого сечения независимо от случайного выбора начальных условий.

Хотелось бы напомнить авторам [2] основные правила расчета вероятностей, часто повторяемые студентам:

- рассуждения должны быть последовательны;
- рассуждения не должны противоречить здравому смыслу.

Кривое зеркало. Интересен также пример на тему ксерокса. Читаем [2]:

«*Аттрактор рекурсии или просто – аттрактор – таким коротким термином теперь всё чаще называют максимальный по модулю корень характеристического уравнения рекурсии. К значению этого корня в пределе (при n→∞) стремится, согласно теореме Бернулли, отношение последующего элемента к предыдущему элементу рекуррентного ряда чисел... Отметим, что ранее аттракторами называли только точки, к которым стремятся траектории развивающихся динамических систем*».

В целом всё правильно. И откуда всё это взято?

А заимствовано всё это бесцеремонно из работ С.Василенко. Именно он впервые[5] предложил называть аттрактором максимальный по модулю корень характеристического

[4] Надо полагать, эта дата сопряжена со знаменательным вхождением В.Владимирова на орбиту золотого сечения и установлением им гипотетической связи, о которой идёт речь.

[5] Во всяком случае, среди авторов в области исследования гармонии и золотого сечения.

алгебраического уравнения. В первый раз [6] в золотоносной среде прозвучали ссылки и на добротные работы А.Утешева [11, 12], о существовании которых исследователи ЗС просто не догадывались, и под каждое характеристическое уравнение бессистемно городился свой огород рекурсии.

Понятие аттрактора в науке используется давно, как правило, для анализа состояния переменных. С.Василенко предложил называть аттрактором также отношение (!) соседних значений рекурсии, для которой значения образуемого ряда обычно стремятся к бесконечности и не имеют общепринятого конечного аттрактора.

Но это ещё "необъезженное" суждение, не нашедшее пока широкого распространения в математических кругах.

И очень хорошо, что его поддерживает доктор В.Владимиров. Просто замечательно!

Но ссылка была желательна не с точки зрения «*упоминания имён великих людей*», о чём он напрасно иронизирует, а чтобы лучше понять авторскую логику использования этого термина в новом для него приложении.

Да, и научная этика упоминать предшественников того требует.

Кстати аттракторы, которые согласно ответу [5] терминологически упоминал Э.Сороко, невыразимо далеки от обсуждаемых конструкций. Рекурсии, адекватные его характеристическому уравнению $y^s + y - 1 = 0$ сходятся к отрицательным значениям, которые не имеют чёткого содержания. То есть нужное нам положительное решение в этом случае не совпадает с аттрактором (по рекурсии) и определяется только алгебраическим путём. Вследствие этого сама самоорганизация (по Э.Сороко) на физическом уровне ставится под сомнение, именно из-за невозможности движения к аттрактору через рекурсию.

Аттрактор – часто используемое слово. Но здесь важны не просто слова, а смыслы.

С.Василенко как раз предложил новое смысловое наполнение-расширение.

Доктор В.Владимиров этот смысл разрушает. В одной модели у него одновременно появляются меньший и больший аттракторы, которые он умудряется ещё и делить друг на друга. Хотя по исходному замыслу аттрактор аддитивной рекурсии всего один. Другой аттрактор получится, если мы выйдем за пределы рассматриваемой модели.

Вот для этого и нужны упоминания первоисточников.

Пока же де-факто получается, что убеленный сединами доктор В.Владимиров, откровенно пренебрегая должными ссылками, не только откровенно "списывает" чужые мысли, но вдобавок их "перекраивает", бездумно искажая на свой лад.

Второй "блин комом"? Второму блину предшествовала небольшая перезагрузка.

Используя статус руководителя виртуального «Института ЗС», директор А.Стахов после появления статьи [3] нескрываемо рассердился и решительно призвал оградить его от всякой критики собственных работ. Оппонентам немедля "перекрыли кислород" с принудительным отлучением от электронного ресурса, где велась дискуссия.

Директор, пригрозивший было уйти целиком в англоязычную среду, где русскоязычный читатель – редкий гость, тем временем спокойно "запустил" очередную статью [14] и, надо полагать, сегодня весьма доволен собой: если в науке "по воде вилами", то по административной части еще что-то получается.

Сценарий тривиален и легко узнаваем, а отдельные персонажи до боли напоминают унтера Пришибеева, который тоже был охвачен манией запретительства.

Именно так активизируют узурпацию единоличных мнений вперемешку с нетерпимостью к деловой критике – необходимому атрибуту истинно научной литературы.

Но это к слову. Чтобы стало понятным разнесение вопросов-ответов по разным ресурсам.

Поправка-уточнение. Если быть точными, то исходя из знания работ, предшествующих статье [2], справедливости ради следует говорить преимущественно о глухих лабиринтах доктора В.Владимирова.

Ибо А.Стахов – больше выглядит как примкнувший профессор, решивший просто побродить по этим лабиринтам, видимо ради любопытства, правда с известным риском для научной репутации.

Тем не менее, во второй статье [14] им написана часть о Платоновых телах, которая хорошо известна, поскольку уже неоднократно приводилась в разных изданиях.

Особых претензий к ней нет. Всё достаточно лаконично, патетично и экспансивно. Хорошо корреспондируется с другими литературными источниками: справочниками и учебными пособиями.

Заодно А.Стахов вытянул на белый свет запылённую и давно не воспринимаемую всерьез учеными гипотезу Прокла Диадоха (5 век) – яростного неоплатоника и последнего руководителя Платоновской Академии. Будто все 12 книг Начал Евклида написано ради того, чтобы в последней 13-й книге изложить теорию Платоновых тел[6].

И давай вперёд-назад к Платону! С призывом вершить "золотую революцию".

Что и говорить, профессорская наивность и эмоциональность по-доброму умиляют.

Лучше бы сначала почитать самого Евклида вместо постоянного использования прошедших через десятые руки формулировок не первой свежести или выдавать эрзацы вместо текстов Евклида, о чём уже отмечалось в работах [15, 16].

После чего полезно обратиться к основательной работе видного украинского ученого О.Кедровского, который, обстоятельно анализируя методологические установки «Начал» Евклида, пишет [17, с. 114]:

«*Расположение учения о правильных многогранниках в конце «Начал» не доказывает, что их построение было конечной целью Евклида. Если бы он действительно ставил конечной целью именно это, то ограничился бы только материалом, который необходим для построения правильных многогранников, однако "Начала" содержат значительно более широкий материал. Достаточно взять учение о многогранниках и, постепенно переходя к предыдущим книгам, вплоть до аксиоматики и определений* 1*-й книги, оставить только тот материал, на котором базируется это учение, как из «Начал» придется удалить* 12*-ю книгу и основные части всех предыдущих книг. В результате большая часть сочинений Евклида окажется не соответствующей конечной цели*».

Не будем утяжелять свою работу схожими мнениями других современных ученых, давно уяснивших необъективность Прокла в оценке философских позиций своих предшественников.

Проклу проклово, но чем не угодил Эйлер...

Опуская повторения проф. А.Стахова и без того хорошо известной теории Платоновых тел, остановимся лишь на том, что в работе [14] можно как-то отметить знаком новизны.

Основное внимание сосредоточено вокруг формального равенства:

$$h(p, q) = h(P, 2), \tag{3}$$

где p – число сторон у грани; q – число рёбер, примыкающих к вершине; В, Р, Г – соответственно число вершин (vertices), рёбер (edges) и граней (faces) правильного многогранника; $h(a, b) = 2ab/(a + b)$ – гармоническое среднее двух чисел a и b.

---

[6] Хорошо известно, что в Началах Евклида скомпилировано несколько работ других древнегреческих учёных. Порой бессистемно и без должной увязки отдельных книг и их частей. Нечто Библии. Но уже сам факт собрания разноликих творений с достаточно мощным структурированием и собственным изложением многих тез даёт право называть Евклида выдающимся учёным всех веков и народов. Последняя книга о Платоновых телах оказалась заключительной не потому, что она главная. К этому неизбежно подвела сложность излагаемого материала. Не рассказав всё о плоскостной геометрии, трудно рассчитывать на понимание стереометрии. По такому принципу построено изложение любой теории. На окончание остаются наиболее трудные для понимания и осмысления разделы.

Очевидно, что сказать нечто новое в области многогранников сегодня не так просто. Для этого нужно как минимум переключаться на непростую в понимании общую топологию. Кстати, пара чисел $\{p, q\}$ – символ Шлефли – топологическая характеристика, применяемая в математике для описания правильных многоугольников и n-многогранников (n – размерность евклидового пространства).

Теория Платоновых тел тем более исхожена вдоль и поперёк.

Что делают авторы? – Путём несложных арифметических преобразований выуживается соотношение (3), записанное для правильных многогранников с использованием так полюбившегося ими показателя (функции) – среднегармонического $h(a, b)$.

Хорошо это или плохо? – А ровным счётом никак.

Поскольку исходная формула Эйлера $\text{В} + \text{Г} = 2 + \text{Р}$ [18, 19], на основе которой получено равенство (3), до безумия лаконична и совершенна, как впрочем, и многое другое у гениального математика.

На первый взгляд, запись соотношения (3) создаёт иллюзию некоей дополнительной гармоничности правильных многогранников. Одновременно создаётся благоприятная почва для формирования ошибочных или "произрастания" легковесных интерпретаций.

На самом деле никаких добавочных последствий гармоничности из равенства (3) не возникает, поскольку фактически оно является видоизменённой "перезагрузкой" формулы Эйлера. Причём "перезагрузкой" в худшем виде, ибо полученное равенство несёт в себе элементы искажения.

Формула Эйлера справедлива для любого выпуклого многогранника – тела, располагающегося по одну сторону от плоскости каждой из его граней.

Равенство (3), с учётом дуальных отношений гексаэдра–октаэдра и додекаэдра–икосаэдра, в том числе через числа $\{p, q\}$, ограничено в своём применении исключительно тремя правильными многогранниками.

То есть, равенство (3) есть весьма ограниченное утверждение, справедливое всего-то для трёх тел. Оно настолько слабое, что даже как-то неудобно говорить об этом всерьёз.

Да и в теорию Платоновых тел ничего не привносится.

Можно сказать, рядовая запись-концентрация символов, которая не демонстрирует какие-либо особые свойства в предметной области.

Если уж и велико стремление использовать понятие среднегармонического значения (правда, абсолютно не понятно, для чего?), то желательно обобщить, ну, по крайней мере, на выпуклые многогранники произвольной конфигурации.

Так, абстрагируясь от символики Шлефли, справедливой лишь для правильных тел, можно легко выйти на обобщённый вариант для любого многогранника, эйлерова характеристика которого равна $\chi = \text{В} - \text{Р} + \text{Г} = 2$.

В частности, мы легко составили такое более универсальное демонстрационное тождество

$$2h\left(\frac{\text{Р}}{\text{В}}, \frac{\text{Р}}{\text{Г}}\right) = h\left(\frac{2\text{Р}}{\text{В}}, \frac{2\text{Р}}{\text{Г}}\right) = h(\text{Р}, 2).$$

Оно формулируется в следующем виде: для многогранника с эйлеровой характеристикой $\chi = 2$ среднегармоническое удвоенного числа рёбер относительно граней и вершин равно среднегармоническому числа рёбер и двух.

Действительно, с учётом формулы Эйлера $\text{В} + \text{Г} = 2 + \text{Р}$ имеем

$$h\left(\frac{2\text{Р}}{\text{В}}, \frac{2\text{Р}}{\text{Г}}\right) = 2 \cdot \frac{2\text{Р}}{\text{В}} \cdot \frac{2\text{Р}}{\text{Г}} \Bigg/ \left(\frac{2\text{Р}}{\text{В}} + \frac{2\text{Р}}{\text{Г}}\right) = 2\frac{2 \cdot \text{Р}}{\text{В} + \text{Г}} = 2\frac{2 \cdot \text{Р}}{2 + \text{Р}} = h(\text{Р}, 2).$$

Данное соотношение справедливо, прежде всего, для выпуклых многогранников, и вообще для многогранников, топологически эквивалентных сфере [20], – моносфероидальных многогранников. Их мысленным надуванием можно превратить в шар[7].

Для произвольного многогранника в общем случае с эйлеровой характеристикой $\chi = \text{В} - \text{Р} + \Gamma$ можно записать обобщённое тождество:

$$\chi \cdot h\left(\frac{\text{Р}}{\text{В}}, \frac{\text{Р}}{\Gamma}\right) = h\left(\frac{\chi\,\text{Р}}{\text{В}}, \frac{\chi\,\text{Р}}{\Gamma}\right) = h(\text{Р}, \chi). \tag{4}$$

Это действительно универсальное тождество, справедливое для любого многогранника.

Оно увязывает численные значения количества вершин, рёбер и граней через усредненные характеристики среднегармонического.

Однако вспомним наш неслучайный эпиграф: «*Слова важны, но ещё важнее смыслы*».

В самом деле, формулу (4) в виде математических знаков (слов) мы записали.

Но её смысл по сравнению с исходной формулой Эйлера, можно сказать, затуманился настолько, что практическая ценность сползла к нулю.

Так что, несмотря на применение математического понятия среднегармонического, ничего гармоничного в общепринятом контексте здесь нет.

Слова и знаки сплошь гармонические, а сама гармония, допустим, в смысле некоей эстетики форм, не просматривается.

Эдакая алогичная или негармоничная гармония. – Сродни естественному недоумению известного детского персонажа Вовочки: «Слово есть, а попы нет».

Это примерно, то же самое, если формулу Эйлера, разделив почленно на два, записать через функцию среднеарифметического $A(a, b) = (a + b)/2$:

$$A(\text{В}, \Gamma) = A(\text{Р}, 2).$$

Ни смысла, ни логики или полезности в таких формульных манипуляциях нет.

Они полностью подходят под известную гидравлическую оценку «переливания из пустого в порожнее». Или, как часто говорят в таких случаях, "ни уму, ни сердцу".

Промежуточное резюме. Какой здесь напрашивается главный вывод?

Среднегармоническое значение параметров многогранников никоим образом не связано с предустановленной гармонией тел, понимаемой в смысле симметрии, соразмерности и т.п.

Это совершенно разные математические образования.

Для самых уродливых и неэстетичных форм многогранников формула (4) сохраняется.

Это означает, что "среднегармоническое тождество" никак не отражает истинную гармонию тел. А значит, его применение при анализе малопродуктивно.

Ну, есть тождество. И что с того? – Такая себе, негармоничная гармония.

Гармония в смысле строгой упорядоченности единого целого (геометрического тела) есть. Но гармоничность, например, в смысле эстетической привлекательности, может совершенно отсутствовать.

Что же касается Платоновых тел, то давно всё проверено, соразмерено, меряно-перемерено и без тождества (3). Эти геометрические объекты красивы, имеют множество симметрий. Первые исследователи древности буквально зачаровывались прекрасной симметрией правильных многогранников и думали, что в них сосредоточена тайна космоса.

С тех пор много утекло воды, наука далеко шагнула вперёд.

Платоновы тела заняли свое почётное место как экспонаты музеев и школьные пособия.

В наше время исключительное заклинивание на Платоновых телах алогично и вредно.

---

[7] Сюда, в частности, не подходят тела в виде двух тетраэдров, склеенных по ребру или имеющих общую вершину. Подобных неэйлеровых многогранников гораздо больше эйлеровых с условием В + Г = 2 + Р.

Хотя они и способны порой преподносить человеку сюрпризы.

В частности, из работы [21] следует, что наибольшая плотность конусной упаковки евклидова пространства соответствует двенадцати направлениям додекаэдра и выражается через число золотого сечения:

$$\rho = 6(1 - \sin \operatorname{arctg} \Phi) \approx 89{,}6\ \%.$$

Кстати, несмотря на наличие дуальных признаков, для разных Платоновых тел плотность упаковки конусов, вписанных в грани многогранников, различна и равна [21]:

$$\rho = \frac{\Gamma}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\Gamma\Omega}{4\pi},$$

Много-гранник	В	Г	Плотность упаковки, ρ (%)
Икосаэдр	**12**	**20**	65,83
Октаэдр	**6**	**8**	73,40
Тетраэдр	**4**	**4**	84,53
Куб	**8**	**6**	87,87
Додекаэдр	**20**	**12**	**89,61**

где $\Omega = 2\pi\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)$ – телесный угол одного конуса, Г – число граней, θ – двугранный угол между смежными гранями многогранника.

Привели это мы в качестве демонстрации существенности пространственного различия Платоновых тел, невзирая на некоторые похожести в их дуальном анализе.

А это, в свою очередь, косвенно подтверждает надуманность или хотя бы ставит под сомнение само понятие и сущность «*энтропии Платоновых тел*» [14] с её одинаковыми характеристиками для дуальных пар: икосаэдра–додекаэдра и куба–октаэдра.

Продолжение следует. Заметим, в работе [14] продемонстрированы также склеенные на быструю руку новоиспечённые образцы терминологического словотворчества в виде «*рекурсии правильных многогранников*», «*энтропии Платоновых тел*», «*энтропии рекурсии*», «*гармонической гиперболы*» и т.п.

Сделаны даже попытки их записать с использованием отдельных математических символик, хотя к самой математике они имеют отдалённое отношение, если вообще имеют.

Так, сначала составляются маловразумительные рекурсии для Платоновых тел.

Что они конкретно выражают или отражают физически, не поясняется.

Да, видимо, подобное невозможно как-то научно истолковать (см. эпиграф).

Затем на основе этих фантомов-рекурсий вычисляются некие оценки информационной энтропии, в интерпретации которых авторы подолгу блуждают, как в тёмном лабиринте без малейшего лучика света.

Оказывается, «*икосаэдр и додекаэдр – это наиболее сложные дуальные Платоновы тела, имеющие по* 30 *рёбер, и в их конструкции заложена большая информация*», *а значит «энтропии икосаэдра и додекаэдра очень близки к единице, то есть к максимальному значению энтропии рекурсии* 2*-го порядка*» [14].

Такое слабо систематизированное нагромождение научных терминов встречается нечасто и заслуживает особо бережного к ним отношения.

Зато становится понятным, почему Адам не дотягивал до единичной энтропии, израсходовав одно ребро на Еву. Ведь «*единичное значение энтропии характерно лишь для гармонического* "*золотого сечения*"». – И это для идеальной и гармоничной конструкции ЗС, для которой энтропия (как мера беспорядка системы) по логике наоборот должна стремиться к нулю, поскольку о системе известно практически всё.

Вопреки здравому смыслу на страницах [14] читаем: «*Чем сложнее конструкция тела, тем большему хаосу оно отвечает, и тем большая информация кроется в его конструкции*».

Выходит так, что хаос прямо пропорционален количеству информации.

Воистину, ни уму, ни сердца, ни рассудительности или разумения.

Авторы элементарно запутались между «*конструкцией тела»* – упорядоченной системой, и «*хаосом*» – полным беспорядком, неразберихой. Такое произвольное толкование общепринятых понятий сводит на нет смысл и истину в их тексте.

Это тот самый случай, когда вольное и малосодержательное жонглирование со среднегармоническими числами создало благоприятную почву для порождения и формирования ошибочных выводов и интерпретаций. А также откровенных фантомов в виде рекурсии и энтропии Платоновых тел – 100-процентно упорядоченных геометрических образований.

На поле случайных событий. Вернёмся к формальному равенству (3). Его уровень обобщения несравненно ниже уровня охвата исходной формулы Эйлера. То есть выполненные выкладки для пяти тел менее информативны, чем исходный посыл Эйлера в виде его простой и наглядной формулы.

Спрашивается, для чего тогда нужны все эти манипуляции с потерей информативности, ни на толику не приближающие нас к новым знаниям? – Похоже, что именно для этого понадобилась авторам энтропия, наводящая на мысль о новизне. Только надо было считать не эфемерную энтропию[8] Платоновых тел, а энтропию авторского хаоса, вносимого в полную и совершенную упорядоченность правильных геометрических форм.

В теории вероятностей прямое сложение вероятностей справедливо лишь для несовместных попарно не пересекающихся событий, которые, не появляются одновременно в результате испытания. В противном случае следует применять формулу полной вероятности интересуемого события через его условные вероятности.

В случае рекурсивного представления числовых рядов любые пары элементов (за исключением начальных условий) взаимозависимы и полностью определены исходными числами и, значит, совместны в вероятностном смысле.

Поэтому в рекурсиях типа (2) числа p_1 и p_2 связаны между собой не только рекурсивно, но и аналитически, а значит, не могут являться вероятностями событий.

В частности, вероятность чисел Фибоначчи – бессмысленное понятие.

Даже при условии чёткого определения вероятностей в привязке к элементам рекуррентной последовательности, наступление очередного события во временном аспекте дискретного n должно осуществляться на основе его условных вероятностей при условии, что более ранние события уже произошли.

Так что все авторские выкладки [2, 14] по рекурсивным вероятностям и связанной с ними энтропией – скорее плод буйной фантазии и апперцепции, чем обусловленная достигнутыми результатами исследований необходимость. – Видимо, это связано с психологической подосновой в виде продуктивной силы воображения (produktive Einbildungskraft, *Иоганн Фихте*) по образованию субъективных понятий–представлений и заманчивого желания внести собственные революционные трансформации в сферу знаний о золотом сечении.

И дело здесь не в почтенном возрасте докторов (всего лишь полтора века на двоих), а установленной ими же планке, характеризующей уровень знаний в предметной области.

Учите мат. часть! (*не путать с бранью*). Хорошо известно, что в математической статистике среднее гармоническое применяется в случае, когда наблюдения, для которых требуется получить среднее арифметическое, заданы обратными величинами[9].

Например, сюда хорошо подходит частотное разложение сигналов.

---

[8] Откуда взяться энтропии в совершенных правильных геометрических формах?

[9] В ряде случаев, например, в электротехнике и теории автоматического регулирования, это бывает достаточно эффективно, – чисто в вычислительном плане.

Ещё раз обратим особое внимание на физическую реализацию: речь идёт о среднеарифметическом значении обратных величин. В то же время формула Эйлера увязывает (там, где она работает) три натуральных числа и двойку в виде прекрасной и одновременно простой арифметической формы В + Г = Р + 2.

Спрашивается, зачем ей дополнительно "выкручивать руки"? Какой смысл переходить от натуральных чисел к их обратным значениям?

Искусственная обратимость этих чисел с последующим вычислением средних гармонических значений лишена здравого смысла и, как мы убедились, служит источником трудно вылавливаемых ошибок и ложных формулировок.

И это всего-то для пяти геометрических тел, а с учётом двух пар дуальных, итого трёх.

Воистину человеческая изобретательность не знает границ. Тем более, когда она основана на весьма сомнительных исходных посылах.

Краткие выводы. Честно говоря, нет особого желания-вдохновения формулировать какие-то заключительные положения в части проанализированного материала.

Тем не менее, это необходимо сделать хотя бы во имя экономии времени тех читателей, которым не с руки следить за фабулой повествования.

Итак, характерные тупики лабиринта Владимирова–Стахова:

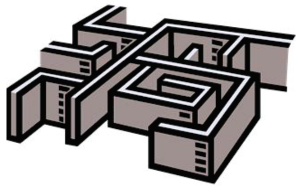
1-*й тупик*. Известная со школьной скамьи возможность представления всякого действительного числа a через любое другое число с определённым весовым коэффициентом λ, в частности $a = \lambda \cdot \Phi$, направило исследования по ложному следу формирования неких псевдогармоничных золотых сечений вида $\lambda \cdot \Phi$.

В равной степени слова "золотое сечение" здесь адекватно заменяются на любую математическую или физическую константу: число π, скорость света, количество атомов во Вселенной и т.д.

Это нисколько не влияет на направление к очередному тупику и лишь сказывается на времени подхода к нему.

Злую шутку с авторами сыграло принципиальное на их взгляд разграничение единичного отрезка, принятого в математике, и отрезка длиной $\lambda(\Phi+\Phi^2)$. В результате образовался очередной тупик: якобы каждому отрезку соответствует своё <гармоническое> золотое сечение. В философском аспекте деление целого в виде единицы на две части – просто эффектно! (см. приложение).

2-*й тупик*. Жонглирования среднегармонической величиной ни на йоту не улучшают оценку-описание гармонии. В этих разноплановых понятиях имеет место обычная тавтологическая игра слов-омонимов, но без видимой связи и взаимного смысла-пересечения. Поиск света в таком тоннеле обречён на неудачу. Что-то вроде корпускулярно-волновой теории света без наличия надёжного источника. Либо волна, либо частица, а в итоге ни то, ни другое.



3-*й тупик*. Перезапись В. Владимировым формулы Эйлера для пяти Платоновых тел в понятиях среднегармонического двух чисел бесперспективна. Даже наш собственный вариант подобного математического преобразования, справедливого для любого (!) многогранника, считаем малоэффективным, никак не связанным с гармонией тел, которая определяется совершенно иными свойствами, характеристиками и критериями. Но данный тупик не безысходен, поскольку очень легко просматривается дорога назад. Просто «не следует множить сущее без необходимости» (бритва Оккама).

4-*й тупик*. «Рекурсии правильных многогранников», «энтропии Платоновых тел» – математические фантомы, и этим всё сказано. Ничем помочь, к сожалению нельзя. Имеем полностью неремонтопригодное пространство состояний. Вирус не лечится. Нужна полная перезагрузка.

5-*й тупик*. Конфронтация, политика "затыкание рта" оппоненту, оперативная преемственность авторских форм выражения мыслей без ссылок (ПКВ[10]) и другая подобная эквилибристика безнадёжно приводят в глухой угол. Но ситуация небезнадёжна и сравнительно легко поддаётся распутыванию. Достаточно иметь большое желание к диалогу, толерантность и умение вслушиваться.

Надежный выход из лабиринта как всегда на его входе.

Бывают также случаи, когда автор просто отзывает свою фамилию с малопродуктивных псевдонаучных материалов. И тогда он в одночасье становится не только *человеком науки* (ошибающимся), но и *человеком настоящей науки* (признающим свои ошибки).

Резюме-обобщение. Нужно искать смыслы, слова сами потом найдутся. И беда, когда слова опережают смыслы-мысли. Не минула сия чаша даже первопроходцев Библии.

Ведь понятно, что вначале была мысль (замысел), идея или смысл. А уже потом Слово.

Но поскольку первичные размышления не доступны для стороннего наблюдателя, первым явилось миру Слово. Но Слово обдуманное, которому предшествовал заложенный в него смысл. Что, правда, осталось за кадром.

Человеку в этом смысле, несомненно, легче.

Слова и мысли у него сосредоточены в одном месте.

Задача состоит только в том, чтобы правильно этим распорядиться.

Литература:

1. *Алферов С.А.* О "бронзовости" и не только // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15332, 10.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0021/001a/00211106.htm.
2. *Владимиров В.Л.*, *Стахов А.П.* Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16523, 22.05.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321199.htm.
3. *Василенко С.Л.*, *Белянин В.С.* Золотоносные наносы (сокрытие тайны "экстремальной" энтропии) // Академия Тринитаризма. М.: Эл. № 77-6567, публ.16577, 21.06.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161845.htm.
4. *Владимиров В.Л.* Еще раз об энтропии золотого сечения (ответ на полемическую статью С.В. Василенко и В.С. Белянина «Золотоносные наносы: сокрытие тайны "экстремальной" энтропии») // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.16597, 30.06.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321205.htm.
5. *Владимиров В.Л.* Ответ дилетанту А.В. Никитину по вопросу «сокрытия тайны экстремальной энтропии» // Академия Тринитаризм. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16615, 06.07.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0021/001a/00211126.htm.
6. *Василенко С.Л.* Гармоническая пропорция в линейных разностных уравнениях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15330, 09.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321111.htm.
7. *Гельфанд И.М.*, *Виленкин Н.Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 472 с.

[10] ПКВ – поиск, копирование, вставка.

8. *Колмогоров А.Н.* Математика и механика // Избранные труды. – М.: Наука, 1985. – Т. 1. – С. 136–138.

9. *Бендукидзе А.Д.* Золотое сечение // Квант. – 1973. – № 8. – С. 22–27.

10. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.

11. *Утешев А.Ю.* Разностное уравнение и рекуррентная последовательность. – http://pmpu.ru/vf4/recurr.

12. *Утешев А.Ю.* Полиномы и алгебраические уравнения от одной переменной. – http://pmpu.ru/vf4/polynomial.

13. *Сушкова М.В.* Приложения Жордановой нормальной формы // Математика в ВУЗе / Интернет-журнал СПбГТУ. – 2002. – № 2. – http://www.spbstu.ru/public/m_v/index.html.

14. *Стахов А.П.*, *Владимиров В.Л.* Платоновы тела (их энтропия, рекурсии, симметрия, связь с "золотым сечением", исключительная роль в науке прошлых веков и в современной науке) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16623, 09.07.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321206.htm.

15. *Белянин В.С.* К вопросу об исторической теме при изучении золотой пропорции. – 2006. – http://www.a3d.ru/architecture/stat/183.

16. *Василенко С.Л.* "Золотой разговор" с Евклидом // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm.

17. *Кедровский О.И.* Взаимосвязь философии и математики в процессе исторического развития. От Фалеса до эпохи Возрождения. – Киев, Изд-во киевского ун-та, 1973. – 213 с.

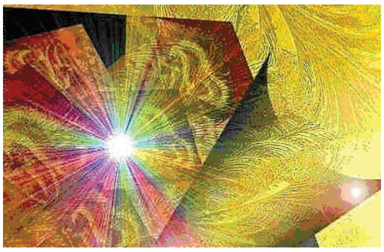
18. *Долбилин Н.* Три теоремы о выпуклых многогранниках // Квант. – 2001. – № 5. – С. 7–12. – http://kvant.mccme.ru/pdf/2001/05/kv0501dolbilin.pdf.

19. *Шашкин Ю.А.* Эйлерова характеристика. – М.: Наука, 1984. – 94 с. – http://ilib.mccme.ru/plm/ann/a58.htm.

20. *Лакатос И.* Доказательства и опровержения. Как доказываются теоремы: Пер. с англ. – М.: Наука, 1967. – 152 с.

21. *Василенко С.Л.* Золотые купола в задаче конусной упаковки евклидового пространства // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве.

http://www.artmatlab.ru/



Приложение 1

Золотое сечение отрезка произвольной длины

Рассмотрим прямолинейный отрезок произвольной длины $c = a + b$, составленный из двух частей: малой a и большой b.

При золотом сечении (делении) отрезка c соблюдается пропорция $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$.

Приняв в качестве неизвестной переменной $x = b$ длину большего отрезка, получаем $\frac{c}{x} = \frac{x}{c-x}$, откуда следует квадратное уравнение $x^2 + cx - c^2 = 0$, дающее положительное решение – длину большего отрезка $b = c \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} = c \cdot \phi$.

Альтернативный вариант. Приняв в качестве неизвестной переменной отношение большего отрезка к меньшему $z = b/a$, получаем $z = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{a+b}{b} = \frac{1}{z} + 1$, откуда следует уравнение $z^2 - z - 1 = 0$ с положительным решением – отношением $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$.

Естественно, о множественности золотых сечений здесь говорить не приходится в виду обычного масштабирования с единственной константой ЗС, равной $\Phi = \phi^{-1} \approx 1{,}618$.

<u>Замена переменных</u>: $(a, b) \Rightarrow (d, h)$: $d = b - a$, $h = \frac{2ab}{a+b}$.

Заметим, что метод замены переменных (метод постановки), в частности в интегральном исчислении, часто приводит к желаемым результатам.

За счёт введения новой переменной интегрирования заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нем сводящимся.

Обратный переход $(d, h) \Rightarrow (a, b)$ осуществляется согласно решениям квадратных уравнений относительно a и b (*В.Владимиров*):

$$a^2 - (h - d)a + 0{,}5hd = 0, \qquad b^2 - (h + d)b - 0{,}5hd = 0.$$

В случае дополнительного условия в виде золотого сечения одна степень свободы уходит, и пара параметров (a, b) находится только по величине h из уравнений ($d = 0{,}5h$):

$$a^2 - da - d^2 = 0, \qquad b^2 - 3db + d^2 = 0.$$

Однако в целом такая замена малопродуктивна и только усложняет вычисления.

Всё выглядит достаточно просто и без этого.

Например, пусть $c = 9$. Тогда $(a, b) = \left(c\phi^2, c\phi\right) \approx (3.44, 5.56)$.

Формальное уравнение рекурсии, выводящей на аттрактор a, имеет вид:

$$f_{n+1} = a\phi \cdot f_n + (a\phi)^2 f_{n-1} \approx 2{,}125 f_n + 4{,}514 f_{n-1}.$$

Аналогично для параметра b получаем:

$$f_{n+1} = b\phi \cdot f_n + (b\phi)^2 f_{n-1} \approx 3{,}438 f_n + 11{,}82 f_{n-1}.$$

Формально вроде всё верно.

Но в целом чистая и ясно сформировавшаяся теория золотого сечения попросту затуманивается малопонятными преобразованиями.