В.С. Белянин, С.Л. Василенко

Золотоносный песок

Родники мои серебряные,
Золотые мои россыпи!
В.С. Высоцкий. Дом хрустальный.

Исторические изоморфизмы. Золотое сечение (ЗС) напрямую связано с числом пять, более конкретно – с квадратным корнем из пяти.

В геометрическом построении корень из пяти – это путёвка в жизнь золотому сечению.

Так что свойства ЗС могут проявлять лишь числа, производные от $\sqrt{5}$.

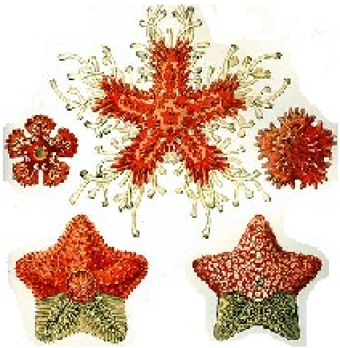
Это непосредственно проистекает из алгебраического решения задачи деления целого в крайнем и среднем отношении.

Естественным образом данная связь-закономерность нашла своё отражение в геометрии правильного пятиугольника, а также фигур и тел, с ним связанных.

Собственно именно отсюда всё и началось.

Во всяком случае, судя по геометрии Евклида.

В его "Началах" деление отрезка в крайнем и среднем отношении выполнено довольно замысловатым способом и не позволяет сразу судить о том, какая причина привела учёных древности к постановке такой задачи.



Однако высока вероятность того, что такое деление было необходимо для построения правильного пятиугольника.

Заметим, что саму пентаграмму особо никто не изобретал.

Человек мог её просто скопировать с натуры, даже, возможно, раньше, чем квадрат или треугольник, которые в природных образованиях встречаются крайне редко.

Зато форму правильной пятилучевой звезды имеют 5-лепестковые цветы многих растений, например, гвоздики пышной[1] (*Dianthus superbus*) или морские звезды, которые наблюдаются людьми уже тысячи лет.

Особенно ярким остаётся впечатление от звезды, оставшейся на песке при океаническом отливе.

Золотые россыпи. За всю свою историю человек добыл на Земле порядка 140 тыс. тонн золота. Собранное в одном месте, оно образовало бы куб с длиной ребра 19,4 м или шар-ядро радиусом 12 м.

Можно сказать, что особо не впечатляет.

Хотя каждая частица – "на вес золота".

Так и всевозможных вариантов сечения отрезка фиксированной длины или какой-либо заданной величины на две неравные части не счесть. Среди них золотое сечение, в силу его определения, – единственное.

Своего рода уникальный "золотой самородок".

Но могут встречаться и самобытные сечения, названные нами "золотыми крупицами", извлекаемыми из "золотоносного песка". – Это особые сечения, которые не связаны напрямую с ЗС, но в своём числовом, формульном или геометрическом выражении содержат число (константу) золотого сечения Φ либо его обратное значение $\varphi = \Phi^{-1}$.

[1] http://ru.wikipedia.org/?oldid=36155113.

Насколько золотые крупицы велики, в каждой конкретной ситуации следует судить отдельно. Не исключено, что в ряде случаев подобная их взаимосвязь с золотым самородком – чисто формальная, не отражающая значимых структурных отношений.

Тем не менее, каждая связь может свидетельствовать о скрытом присутствии золотого сечения в природе, и потому представляет определенный интерес.

Целью настоящей статьи как раз и является описание подобных взаимоотношений между "не золотой задачей" и золотым сечением.

Начнем с небольшого экскурса в историю математики.

1. Пропорциональные деления отрезков

Делить отрезки на разные составные части в определённых отношениях человек научился ещё глубокой древности.

Более двух с половиной тысяч лет назад древнегреческий ученый Фалес Милетский (ок. 625–547 гг. до н.э.) сформулировал теорему [1, с. 105]:

«*если на одной прямой отложить последовательно несколько равных отрезков и через их концы провести параллельные прямые, пересекающие вторую прямую, то они отсекут на второй прямой равные между собой отрезки*».

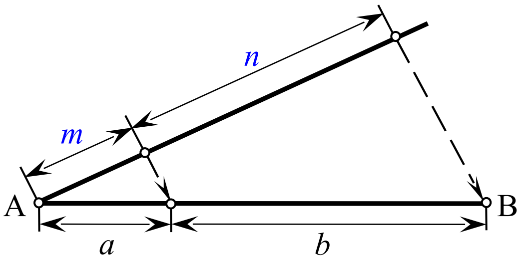


Рис. 1. Деление отрезка *AB* в заданной пропорции $m/n = a/b$

На основании этой теоремы в её обобщении можно геометрически делить отрезки в любых пропорциях (рис. 1).

Это прекрасно умели выполнять древние греки и поныне делают их последователи.

К сожалению, не все хорошо себе представляют, что отрезок можно легко делить в произвольном пропорциональном отношении, как это делалось с незапамятных времен.

Например, в работе [2] авторы честно пишут о своих заблуждениях: «*Первое заблуждение: деление на неравные части в произвольном отношении пропорцию не образует… Это заблуждение мешало развитию теории золотого сечения в приложении к системному синтезу. Однако в* 2010 *году было доказано, что пропорция образуется и при делении целого на две части в произвольном отношении*».

Если бы они освежили свои знания, заглянув, например, в распространённый легкодоступный учебник [1], и ознакомились с теоремой Фалеса, то одним заблуждением стало бы меньше.

Вообще слова «*в* 2010 *году было доказано*» приводят к противоречивой, можно даже сказать, нелепой ситуации. Один из авторов более 25-ти лет тому назад в работе [3] составлял такую пропорцию $\mathrm{CB}/\mathrm{AC} = (\mathrm{AB}/\mathrm{CB})^p$:

«*Зададимся целым неотрицательным числом* p *и разделим отрезок* AB *точкой* C *на две неравные части в такой пропорции, чтобы отношение большей части к меньшей* CB/AC *равнялось бы* p*-й степени отношения всего отрезка к большей части, то есть* $\mathrm{AB}/\mathrm{CB} = x$; $\mathrm{CB}/\mathrm{AC} = x^p$».

Теперь вдруг оказывается, якобы *только* в 2010 г. стало известно, что «*пропорция образуется и при делении целого на две части в произвольном отношении*», и это пишет тот же автор [2].

Справедливости ради следует заметить, что, в свете известной теоремы Фалеса, задачи примитивного деления отрезка в пропорциональных отношениях умы древних греков особо не занимали. Для них более привлекательными были сложные задачи.

Они умели геометрическим путем решать канонические квадратные уравнения вида:

$$ax + x^2 = m^2, \qquad ax - x^2 = m^2.$$

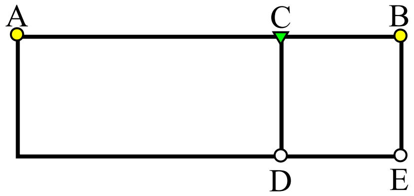


Рис. 2. Пропорциональное деление отрезка AB при заданной площади прямоугольника

Вторая из этих задач могла формулироваться в античности примерно так (рис. 2):

разделить данный отрезок (AB = a) точкой C так, чтобы прямоугольник (AD) был равен заданной площади ($S = b^2$), а оставшаяся часть (CE) полного прямоугольника (AE), была квадратом (CE = x^2).

Из условия задачи возникала такая пропорция

$$\frac{a - x}{b} = \frac{b}{x},$$

которую греки решали геометрически и находили построением отрезок x или, что то же самое, точку C деления исходного отрезка [4, с. 30].

Великий математик древности Архимед (287–212 до н.э.) решал более сложные задачи.

Его сочинение «О шаре и цилиндре» буквально нашпиговано пропорциональными делениями отрезков, но все они служат вспомогательным материалом для поиска ответа на иные проблемные вопросы.

Например, Архимед решает задачу: «*разделить данный шар так, чтобы его сегменты имели друг к другу отношение, равное данному*».

В процессе исследования у него возникла следующая проблема [5, с. 491]:

требуется прямую[2] a рассечь в некоторой точке так, чтобы отношение первого её отрезка $a - x$ к заданной прямой b равнялось отношению заданной площади ap к квадрату второго отрезка x^2.

Поставленное требование деления отрезка приводит к пропорции

$$\frac{a - x}{b} = \frac{ap}{x^2}.$$

Её решение сиракузский математик обещал дать в конце сочинения, но в дошедших до нас текстах его не находится.

Решение было найдено позже Дионисодором (ок. 230 до н.э.), Диоклом (ок. 180 до н.э.) и более поздним комментатором Архимеда – византийским ученым Евтокием (ок. 500 г.).

Этот характерный пример позволяет нам составить некоторое представление о разнообразных вопросах пропорциональных делений отрезков, ответы на которые искали математики далекого прошлого.

Задачи, приводящие к кубическим уравнениям, говорят о достаточно высоком уровне их знаний, если учитывать геометрическую специфику (направленность) античной математики того времени.

Факт деления отрезка на две неравные части не в золотой пропорции, а в других пропорциональных отношениях, использовался при решении различных задач и в работах средневековых арабских учёных.

В начале XI века Абу-л-Джуд Мухаммад ибн Лейс дал построение корня числового уравнения

$$x^3 - 10x^2 + 13{,}5x + 5 = 0 \quad \Leftarrow \quad x^2 + (10 - x)^2 + \frac{10 - x}{x} = 72,$$

как выражение задачи деления 10 на две части так, чтобы сумма их квадратов и частного от деления большей $10 - x$ на меньшую x равнялась 72 [6, с. 388]. Здесь $x = 2$.

Многие из арабских математиков занимались вопросами музыкальной науки и поиском пропорциональной связи высоты тона с длиной порождающей его струны.

[2] Фиксированный отрезок прямой античные ученые называли просто "прямой".

Не углубляя эту тему, приведем лишь слова великого мыслителя и энциклопедиста средневекового Востока – Абу Насра аль-Фараби (870–950) [7, с. 85]:

«*Отношение между тонами различной степени будет таким же, как отношение между длинами порождающих их струн*».

Мы привели только несколько примеров из необъятного множества задач далекого прошлого, свидетельствующих вовсе не об элементарных делениях отрезков на пропорцию.

Поиски среди них "золотых крупиц" необходимо продолжить и пополнить ими сокровищницу золотого сечения.

2. Пропорция Гетальди

Задачи пропорционального деления отрезков были предметом рассмотрения и математиков эпохи Возрождения, среди которых отметим известного итальянского математика Б. Кавальери (1598–1647) и менее именитого сербохорватского математика М. Гетальди (1566–1627).

Последний был хорошим знатоком научного творчества греческих авторов и занимался приложениями алгебраических методов в геометрии.

Мастерски решая задачи на построения, в книге «О математическом анализе и синтезе» он рассмотрел ряд тематических задач на деление отрезков и, в частности, такую нетривиальную проблему [8]:

разделить данный отрезок так, чтобы прямоугольник, построенный на частях, равнялся квадрату, построенному на разности частей.

Нахождение точки сечения отрезка длиной l при этом сводилось к решению геометрической пропорции $(l-x)x=(l-2x)^2$.

Но что любопытно, не имея прямого отношения к ЗС, ответ здесь, тем не менее, содержит число ЗС:

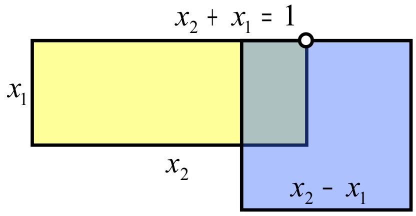


Рис. 3. Решение геометрической пропорции Гетальди:

$$x^2-lx+l^2/5=0; \qquad (1)$$

$$x_{1,2}=\frac{l}{2}\left(1\mp\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\ \Rightarrow\ \frac{l}{2+\Phi},\ \ \frac{l}{2-\phi},$$

$$\text{где}\ \Phi=\frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \ \phi=\Phi^{-1}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Площади прямоугольника и квадрата равны $l^2/5$.

Приняв без потери общности длину отрезка $l=1$, исходное уравнение можно записать в виде пропорции

$$\frac{x}{1-2x}=\frac{1-2x}{1-x}\ \Rightarrow\ \frac{x}{\Delta}=\frac{\Delta}{1-x},$$

где $1-2x=(1-x)-x=\Delta$ – разность между б*о*льшим $1-x$ и меньшим x отрезками.

Мы пришли к следующей интерпретации пропорции Гетальди:

меньшее так относится к разности между целым и удвоенным малым,
как эта разность – к б*о*льшему.

Возможно и альтернативное, более наглядное истолкование пропорции Гетальди:

меньшее так относится к разности между б*о*льшим и меньшим,
как эта разность – к б*о*льшему

То есть в роли средних членов пропорции выступает разность между двумя частями. Крайними членами являются сами части.

Возвращаясь к корням $x_{1,2}$ квадратного уравнения, заметим, что для единичного отрезка величины $x_1 = \phi/\sqrt{5} \approx 0{,}2764$ и $x_2 = \Phi/\sqrt{5} \approx 0{,}7236$, а сторона квадрата $x_2 - x_1$ равна $1/\sqrt{5} \approx 0{,}4472$.

Эти три числа являются начальными членами золотой последовательности *ФG*, приведенной в работе [9].

Возвратное уравнение, эквивалентное рассматриваемой задаче, имеет вид (n = 1, 2, 3…)

$$f_{n+1} = f_n - f_{n-1}/5 .$$

Соответствующая рекуррентная последовательность независимо от начальных условий приводит к аттрактору – большему по модулю корню x_2 характеристического уравнения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1}{2-\phi} = \frac{\Phi}{\sqrt{5}} \approx 0{,}7236 .$$

Итак, "золотая крупица", описанная в этом разделе и найденная благодаря пропорции Гетальди, вполне может располагаться рядом с "золотым самородком" – золотым сечением.

3. Еще одна пропорция из «золотых крупиц»

Рассмотрим пропорцию, которая приводит к видоизмененному уравнению, полученному из пропорции Гетальди.

Наша задача: определить физический смысл уравнения, похожего на выше рассмотренный трином (1), с измененным в нём знаком свободного члена на минус: $x^2 - x - 1/5 = 0$ или в общем виде $x^2 - x - 1/q = 0$, где q – произвольное число.

При этом можно перейти от геометрического толкования к некоторому абстрактному объекту и сформулировать свойство пропорции для любого заданного значения q.

Свойства сечения, вытекающего из данного уравнения, наглядно видны на примере геометрического сопоставления частей линейного отрезка, в частности при q = 5 (рис. 4).

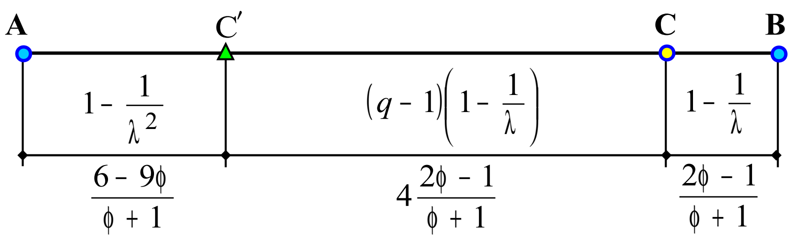


Рис. 4. Деление отрезка AB сечением:

Отрезок AB единичной длины делится точкой C на две в общем случае неравные части AC и CB, с дополнительной точкой C′ такой, что $C'B = q \cdot CB$.

Пусть x – отношение целого AB к одной из своих частей AC.

Разделим отрезок так, чтобы выполнялась следующая пропорция:

$$x = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{q \cdot CB} \equiv \frac{AC/q}{CB} .$$

Выполнив преобразования, получаем:

$$x = \frac{AC + CB}{AC} = 1 + \frac{1}{\dfrac{AC}{CB}} = 1 + \frac{1/q}{x}\ .$$

Положив, в частности $q = 5$, получаем квадратное уравнение общего вида:

$$x^2 - x - 1/5 = 0\,.$$

Это уравнение отличается от уравнения, полученного из пропорции Гетальди только знаком свободного члена и имеет следующие корни $x_1 = \Phi^2/\sqrt{5} = \dfrac{1+\phi}{2-\phi} \approx 1{,}171$ и $x_2 = \phi^2/\sqrt{5} = \dfrac{1-2\phi}{2-\phi} \approx -0{,}171$.

Величины x_1 и $-x_2$ являются членами "золотой" последовательности ΦG [9].

Переходя от геометрического толкования к некоторому абстрактному объекту, можно сформулировать свойство пропорции при $q = 5$:

целое так относится к своей одной части, как она – к увеличенной в пять раз другой части

Возможно альтернативное прочтение:

целое так относится к большему, как большее – к пяти меньшим

Единственное отличие от классической формулировки золотой пропорции состоит в замене слов "к меньшему" на слова "к пяти меньшим", что вполне естественно и отвечает начальным условиям.

Радует, что решение пропорции привело к корням, связанным с числами ЗС.

Поэтому предложенная в этом разделе задача вполне может считаться "золотой крупицей" и располагаться рядом с "золотым самородком" – золотым сечением.

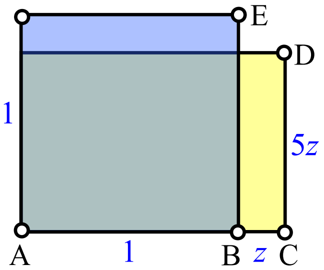


Рис. 5. Решение геометрической пропорции:

Представленную выше задачу можно сформулировать несколько иначе (рис. 5):

приложить к данному отрезку AB = 1 в его продолжении такой отрезок BC = z, чтобы площадь прямоугольника $S_{AD} = 5z \cdot (1+z)$ была равна площади квадрата на исходном отрезке $S_{AE} = 1 \cdot 1$.

Из данного условия имеем пропорцию $\dfrac{1+z}{1} = \dfrac{1}{5z}$, которая приводит к квадратному уравнению $z^2 + z - 1/5 = 0$ с положительным корнем $z_1 = \dfrac{2\phi - 1}{2-\phi} \approx 0{,}171$.

Данная задача эквивалентна предыдущей.

Только здесь мы искали не отношение целого к его части, а целое плюс приращение к целой части. Поэтому $x_1 = 1 + z_1$.

Заметим, что ещё в Древней Греции был распространен способ продления исходного отрезка на некоторую величину или приложения к нему квадратов либо прямоугольников заданной площади.

В качестве примера обратимся к Предложению 6 кн. II "Начал" Евклида [10, с. 67]:

«*Если прямая линия рассечена пополам и к ней "по прямой" приложена какая-либо другая прямая, то прямоугольник, заключенный между всей прямой с приложенной…*».

Метод "приложения" к отрезку другого отрезка по прямой линии позволял древнегреческим математикам решать задачи, сводящиеся к линейным, квадратным и даже кубическим уравнениям.

В этом смысле в принцип формулировки задачи нами ничего принципиально нового практически не добавлено.

Новой является постановка задачи, которая в своём решении привела к числу ЗС.

4. Не пропорцией едины...

Обратим внимание на один аспект.

Задачи, подобные вышеописанным конструкциям, не обязательно сочиняются специально или возникают из практических соображений только на языке пропорции.

Они могут быть составлены также напрямую, путём формулировки выполнения тех или иных императивных действий или быть получены, как некоторая игра ума.

1) Например, решим задачу представления двойки в виде суммы двух чисел: самого числа и ему обратного.

Здесь легко составляется алгебраическое уравнение $2 = x + 1/x$, из которого следует единственное решение $x_1 = x_2 = 1$.

Если попытаться разделить аналогичным образом тройку, то приходим к уравнению $3 = x + 1/x$ или $x^2 - 3x + 1 = 0$, откуда $x_1 = 1 - \phi$, $x_2 = 1 + \Phi$.

То есть здесь получаются уже "золотоносные" корни.

2) "Золотоносные" корни свойственны не только отдельным уравнениям, но и системам уравнений, в частности:

$$\begin{cases} x^2 + y = 2, \\ y^2 + x = 2. \end{cases}$$

Её решения очевидны: (1; 1), (–2; –2), (Ф; –ф), (–ф; Ф).

И подобным задачам и золотоносным вариациям нет конца...

5. Обобщение модели квадратных уравнений

От геометрических задач деления отрезков в пропорциональных отношениях, практиковавшихся в основном в далеком прошлом, перейдем к более современным алгебраическим "золотоносным" задачам.

Известно, что числа Люка описываются в аналитическом виде

$$L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}. \quad (2)$$

Обозначив $x = \Phi^n$ и умножив равенство (2) на x, приходим к квадратному уравнению общего вида:

$$x^2 - L_n x + (-1)^n = 0. \quad (3)$$

Таким образом, числа Люка являются формообразующим рядом образования целых степеней чисел золотого сечения с реализацией через квадратное уравнение.

Подобные выкладки можно осуществить и для чисел Фибоначчи $F_n = \dfrac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$.

$$x^2 - F_n x - (-1)^n/5 = 0, \qquad x = \Phi^n/\sqrt{5}; \tag{4}$$

$$x^2 - 5F_n x - 5(-1)^n = 0, \qquad x = \Phi^n\sqrt{5}; \tag{5}$$

где $\sqrt{5} = \phi + \Phi = 2\Phi - 1 = 2\phi + 1$.

Итак, получены семейства квадратных уравнений общего вида $x^2 - mx - q = 0$, которые при определённых значениях коэффициентов (m, q) дают нам россыпи "золотоносного песка" – решения, основанные на целочисленной степени числа золотого сечения Φ.

К ним можно отнести и уравнение $x^2 - \frac{x}{k} - \frac{1}{k^2} = 0$ с корнем $\lambda = \frac{\Phi}{k}$.

Особо подчеркнём, что речь идёт исключительно о квадратных уравнениях или в переводе на эквивалентные разностные либо возвратные аналоги – о двухчленно-аддитивных рекурсиях вида $f_{t+1} = mf_t + qf_{t-1}$.

Например, для фиксированного значения *n* из (3) следуют такие рекурсии (по *t*):

$$f_{t+1} = L_n f_t + (-1)^n f_{t-1}.$$

Заметим, мы обобщили подход (задачу) и соответствующие решения, наглядно полученные в общем виде.

Ни о каком обобщении самого золотого сечения речи нет и быть не может.

Равно как и о множественности золотых сечений (Стахов, Сороко, Владимиров и др.).

Подобные измышления – свидетельство явной лингвистической безграмотности и математического нигилизма. Фундаментальные константы не обобщаются в принципе!

6. Равносильные переходы степеней

Хорошо известна формула [11, с. 39], устанавливающая зависимость степени золотого сечения через самоё себя и числа Фибоначчи

$$\Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}. \tag{6}$$

Примечательно, в этой формуле число золотого сечения Φ присутствует с обеих сторон равенства.

Заметим, что формула (6) неожиданно объявляется [12], как «новый результат в области теории чисел Фибоначчи», полученный в статье [13] в 2006 г., то есть с разницей в двадцать лет (!) после публикации в одном из первоисточников [11].

Кроме того, де-факто эффектная формула (6), а она действительно привлекательна, вовсе не выведена в [13, № 28].

Она там просто продемонстрирована на нескольких начальных примерах, что, конечно же, не является подтверждением её правомерности в общем случае.

Разве что как некая рабочая гипотеза.

Но никак не новый результат. Да ещё дублируя вдобавок уже известные знания.

Хотя с учётом формулы Бернулли–Бине[3] $F_n\sqrt{5} = \Phi^n - (-\Phi)^{-n}$ [14, с. 90] доказательство (6) несложно:

---

[3] Эту формулу опубликовал в 1732 г. великий швейцарский математик Даниил I Бернулли (1700–1782). Она была забыта более чем на столетие (!) до 1843 г., когда вновь была выведена французским математиком Жаком Бине (1786–1856). В литературе её чаще связывают только с его именем, хотя ради исторической справедливости, следует называть, по меньшей мере, формулой Бернулли–Бине.

$$F_n\Phi + F_{n-1} = \frac{\Phi^{n} - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}\Phi + \frac{\Phi^{n-1} - (-\Phi)^{-n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^{n+1} + \Phi^{n-1}}{\sqrt{5}} = \Phi^{n}\cdot\frac{\Phi + \Phi^{-1}}{\sqrt{5}} = \Phi^{n}.$$

В связи с этим вызывает удивление одно высказывание по этому поводу [12]: «*Я считаю, что отсутствие ссылки на статью* [13] *является существенным недостатком статьи С.Л. Василенко*». – Скорее наоборот.

Описанный факт следует отнести к достоинству работы упомянутого автора. Ибо в материале [13], к которому всех торопят обращаться за новыми знаниями (?), не только с опозданием в 20 лет повторяется известная формула, но ещё и принимается попытка её бесцеремонной приватизации.

Хотя авторы статьи [13] даже не удосужились либо просто не сумели показать справедливость тождества в общем виде.

На основе уравнений (3)–(5) можно сравнительно легко получить и другие несложные степенные формулы числа ЗС, выраженные только через числа Фибоначчи или Люка.

Так, формула с использованием чисел Фибоначчи имеет вид:

$$\Phi^{n} = \frac{F_n\sqrt{5} + \sqrt{5F_n^2 + 4(-1)^n}}{2}. \tag{7}$$

Целочисленная n-я степень числа ЗС также выражается только через числа Люка или одновременно через числа Люка и Фибоначчи:

$$\Phi^{n} = \frac{L_n + \sqrt{L_n^2 - 4(-1)^n}}{2} = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}. \tag{8}$$

Отдельные частные случаи описанных формул можно найти в работе [15].

Представленные в данном разделе соотношения в разных интерпретациях можно встретить в литературе по последовательностям Фибоначчи.

Наша задача состояла продемонстрировать аналитические взаимосвязи любой целочисленной степени числа золотого сечения с числами Фибоначчи и Люка.

Следует отметить, что зависимости (7)–(8) обязательно содержат корень из пяти и/или квадратный корень из этих чисел.

Это и не удивительно, поскольку речь идет о производном от √5 числе золотого сечения или о соотнесении между собой целых и иррациональных чисел.

7. Взгляд на малоизвестное в общеизвестном

Говоря о пропорциональности, нельзя не вспомнить знаменитую теорему Пифагора для прямоугольного треугольника: $c^2 = a^2 + b^2$.

Не представляет особого труда переформулировать её в терминах пропорции.

Действительно, $c^2 - a^2 = (c-a)\cdot(c+a) = b\cdot b \;\Rightarrow\; \dfrac{c+a}{b} = \dfrac{b}{c-a}$.

Суть записанного равенства такова:

если сумма двух сторон треугольника так относится к третьей, как третья относится к разности первых двух, то треугольник прямоугольный.

А теперь вспомним хорошо известное [16; 17, с. 52] соотношение между длинами и сторон правильных пятиугольника a_5 и десятиугольника a_{10}, вписанных в единичную окружность ($R = 1$): $a_5^2 = a_{10}^2 + 1$.

Сторона правильного n-угольника в общем случае равна $a_n = 2R\sin(\pi/n)$.

Для произвольного радиуса $a_5 = R\sqrt{3-\Phi}$, $a_{10} = R\sqrt{2-\Phi}$, $a_6 = R$.

Приведенное соотношение между сторонами трёх правильных многоугольников позволяет записать отношение:

$$\frac{a_5 + a_{10}}{a_6} = \frac{a_6}{a_5 - a_{10}},$$

которое корреспондируется с соответствующей записью теоремы Пифагора.

Для единичного радиуса окружности имеем:

$$\frac{\sqrt{2-\phi} + \sqrt{2-\Phi}}{1} = \frac{1}{\sqrt{2-\phi} - \sqrt{2-\Phi}}.$$

Итак, сумма длин сторон правильных пяти- и десятиугольника так относится к длине стороны правильного шестиугольника как она к их разности.

Приведенное отношение не является пропорцией, поскольку решать здесь нечего. Всё определено. Мы просто фиксируем готовое решение в виде элегантного тождества-отношения, которое содержит числа золотого сечения ϕ и Ф.

Задачу можно было сформулировать изначально в общем виде: определить, стороны каких трёх правильных многоугольников удовлетворяют соответствующему соотношению.

Примечание. Интересная и разнообразная подборка естественного присутствия чисел 5 и 10 в золотом сечении приведена в работе [18, п. 5.8].

В частности, любопытно соотношение между числами Фибоначчи [19]:

$$F_n - F_{n-5} = 10F_{n-5} + F_{n-10}.$$

8. От квадратичных форм к цепным дробям

Запишем квадратное уравнение (3) как $\Phi^n \equiv x = L_n - \dfrac{(-1)^n}{x}$ и продолжим его в виде бесконечной цепной (непрерывной) дроби $[L_n ..]$, совместив с формулой (6):

$$F_n\Phi + F_{n-1} = L_n - \cfrac{(-1)^n}{L_n - \cfrac{(-1)^n}{L_n - \cfrac{(-1)^n}{L_n - \dots}}} = L_n - [L_n ..].$$

С учётом известного равенства $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ окончательно находим:

$$\Phi = \frac{F_{n+1} - [L_n ..]}{F_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{1}{F_n}[L_n ..]. \qquad (9)$$

Так мы весьма просто пришли к многовариантному разложению (для разных n) числа золотого сечения Ф в виде множества цепных дробей, впервые описанных в работе [20].

При $n = 1$ имеем $L_1 = F_1 = F_2 = 1$, и получается обычное разложение числа ЗС только через одни единицы, которое имеет наименьшую скорость сходимости среди всех мыслимых иррациональных и трансцендентных чисел. Действительно, в этом случае «*из всех иррациональностей оно обладает, очевидно, наименьшими возможными элементами... и потому хуже всех аппроксимируется рациональными дробями*» [21, с. 49].

Согласно теории цепных дробей степень приближения рациональной дробью оценивается как $\delta \sim q_n^{-2}$, где q_n – знаменатель подходящей дроби порядка n [21, с. 40].

Тогда с учётом априори выбираемой в (9) конечной "этажности" k цепной дроби порядок приближения числа золотого сечения можно выразить формулой

$$\delta = \left|\Phi - \hat{\Phi}_n\right| \approx L_n^{-2(k+1)},$$

где $\hat{\Phi}_n$ – оценка иррационального числа золотого сечения Φ с использованием n-го целого числа Люка L_n.

Например, для L_{50}=17393796001 и всего лишь 5-кратной "дроби-этажерки" ($k = 5$) получаем порядок приближения $\delta \sim 10^{-123}$.

Сходимость цепных дробей (9) просто потрясающая.

С каждым очередным "этажом" цепной дроби точность аппроксимации увеличивается на величину $\sim L_n^{-2}$.

Задавая достаточно большие взаимосвязанные числа Люка и Фибоначчи и количество членов k цепной дроби $[L_n ..]$, можно достичь невероятно огромных скоростей приближения к числу золотого сечения Φ.

Так, для $n = 40$ и $k = 5$ имеем:

$$\frac{102334155 + \cfrac{1}{141422324 + \cfrac{1}{141422324 + \cfrac{1}{141422324 + \cfrac{1}{141422324 + \cfrac{1}{141422324}}}}}}{63245986} - \Phi \approx 10^{-98}.$$

Такое впечатление, что сходимость бьёт все рекорды.

Воистину от "*малого до великого*" один шаг.

Это ещё одна, пока малознакомая и слабоизученная грань золотого сечения, осмыслить которую ещё предстоит.

Если классическое представление ЗС в виде математической пропорции условно отражает статику, то в соотношении (9) сокрыта динамическая составляющая золотого сечения, перекрывающая теоретически весь диапазон возможных скоростей: от минимальной до максимальной.

Здесь прослеживается связь с описанием многих моделей: Большой взрыв, развитие раковых клеток, ядерная цепная ядерная реакция деления тяжёлых ядер и др.

9. Некоторые итоги

а) Найдены соотносимые с золотым сечением «золотые крупицы» не в природе или в творениях рук человеческих из далекого прошлого, что всегда спорно (так как к одному и тому же результату можно придти разными способами), а исключительно в недрах математики. Причем затронуты различные её разделы: геометрия, алгебраические уравнения, возвратные последовательности, цепные дроби.

b) Показано, что деление отрезка в пропорциональных отношениях, берущее начало в глубокой древности, было продолжено в последующие века с всё возрастающим уровнем сложности.

Среди задач деления отрезка имеются такие, которые приводят в своем решении к числам золотого сечения. Продемонстрирована одна подобная задача, позаимствованная из творчества математика Гетальди.

На её основе предложена и решена новая задача, которая, несомненно, войдет в фонд «золотых крупиц».

c) Продемонстрировано на конкретных примерах, что не только пропорции, но и всевозможные математические задачи могут приводить к золотым числам Ф и ф.

d) Рассмотрены различные семейства квадратных уравнений, решения которых приводят к целочисленным степеням числа золотого сечения ϕ^n.

Показано, что с числами Фибоначчи и Люка связано не только число золотого сечения Ф, но и его целочисленные степени.

Это уже примеры «золотых крупиц», выходящие за рамки геометрии.

e) Обнаружено, что соотношение между сторонами правильных пяти–, шести– и десятиугольника может быть записано изящным образом благодаря выражению сторон пяти– и десятиугольника через числа золотого сечения ϕ и Ф.

f) Уточнены детали полученного ранее одним из авторов разложения числа золотого сечения в виде цепной дроби. Приведенный пример демонстрирует потрясающую скорость приближения к числу золотого сечения Ф. На наш взгляд, это одна из самых ярких «золотых крупиц» последнего времени.

Литература:

1.*Геометрия*. 7–9 классы: учебник для общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

2.*Владимиров В.Л.*, *Стахов А.П.* Энтропия золотого сечения (раскрыта еще одна тайна золотого сечения) / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16523, 22.05.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321199.htm.

3.*Стахов А.П.* Коды Золотой Пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.

4.*Рыбников К.А*. История математики (В 2-х томах) Т.1. – М.: Изд. МГУ, 1960. – 192 с. – http://lib.mexmat.ru/books/14651.

5.*Архимед*. Архимед. Сочинения / Перевод и комментарии И.Н. Веселовского. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с. – http://padabum.com/d.php?id=9362.

6.*Юшкевич А.П.*, *Розенфельд Б.А*. Математика в странах Востока в средние века / Из истории науки и техники в странах Востока. Сб. статей. – М.: Изд-во восточной литературы, 1960. – С. 388.

7.*Аль–Фараби*. Большая книга музыки / Французский перевод: R. d'Erlander, La Musique arabe, v.1. – Paris, 1930.

8.*Ghetaldi M*. De resolution et compositione mathematica, libri quinque. Opus posthumum, Rome, 1630.

9.*Белянин В.С.* Таинство чисел золотой пропорции. 2. Удивительная числовая последовательность // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=21&sm=2.

10. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

11. *Wells D*. The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. – England: Penguin Books, 1986.

12. *Стахов А.П.* О "золотых" алгебраических уравнениях (реплика на статью С.Л. Василенко) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15331, 09.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321112.htm.

13. *Stakhov A*., *Rozin B*. The "golden" algebraic equations // Chaos, Solitons & Fractals. – 2006, **27**(5), 1415–1421 / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13248, 24.04.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321040.htm.

14. *Bernoulli D*. Observationes de seiebus, quae formantur ex additione vel subtraction quacunque terminorum se mutuo consequentium, ubi praesertim earundem insignis usus pro inveniendis radicum omnium aequationum algebraicarum ostenditur. – Commentarii Academiae scientiarum Imperialis Petropolitanae ad annum MDCCXXVIII, 1732, t. III, p. 85–100.

15. *Нифанин А.Б*., *Ткач Д.И*. Графоаналитическая интерпретация степенного ряда золотой пропорции и золотые логарифмы // Научные заметки: Луцкий НТУ – 2008. – Вып. 22, т. 1. – http://www.nbuv.gov.ua/portal/natural/nn/texts.html.

16. *О длинах* сторон правильного пятиугольника и правильного десятиугольника // Математическое просвещение. – 2002. – Сер. 3, вып. 6. – С. 130–131.

17. *Граве Д.А*. Трактат по алгебраическому анализу (В 2-х томах). Т. 2. Исторический обзор. – К.: Изд. АН УССР, 1939. – 412 с.

18. *Аракелян Г.Б*. Фундаментальная теория ЛМФ. – Ереван, 2007. – http://www.hrantara.com/Monograph.pdf.

19. *Knott R*. The Mathematical Magic of the Fibonacci Numbers. Fibonacci Numbers and the Golden Section, 2008. – http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibmaths.html.

20. *Василенко С.Л*. Златые цепи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15557, 22.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161546.htm.

21. *Хинчин А.Я*. Цепные дроби: Изд. 4-е, стереотип. – М.: Наука, 1978. – 112 с.