

Обобщённые рекурсии с аттрактором золотого сечения

Сепульки – элемент цивилизации, см. *сепулькарии*.

Сепулькарии – устройства для *сепуления* (см.)

Сепуление – занятие ардритов, см. *сепульки*.

Станислав Лем

Практически повсеместно числа Фибоначчи отождествляются с золотым сечением.

Отчасти справедливо, поскольку отношение соседних элементов ряда в пределе стремится к константе золотого сечения (ЗС) $\Phi \approx 1,618$.

Вместе с тем, это совершенно разные математические структуры.

Например, некоторые дробно-рациональные последовательности стремятся (чаще всего путём суммирования) к числу π . Но никто не уравнивает из-за этого трансцендентное число π с рациональными дробями. А вот с золотым сечением, к сожалению, это происходит повсюду и с завидным постоянством.

Другой аспект. Собственно дело даже не в числах Фибоначчи, известных ещё в Древней Индии задолго до распространения в Европе. Частный, хотя и довольно примечательный случай. В основном за счёт простоты первых "затравочных" чисел.

Главное состоит в ином. А именно в процедуре образования чисел согласно аддитивно-двухчленной рекурсии с единичными коэффициентами $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ и произвольной парой начальных условий (f_0, f_1) , не равных одновременно нулю.

Но, оказывается, и это не всё!

Существуют бесчисленные множества других аддитивных моделей второго порядка с аттрактором, равным ЗС. Этим моделям и посвящена настоящая работа.

Определение. Аттрактор числовой последовательности f_n – предельное отношение соседних элементов ряда $a = \lim_{n \rightarrow \infty} f_{n+1}/f_n$.

В частности, для числовых последовательностей, образованных по типу линейных возвратных однородных уравнений с постоянными коэффициентами [1] $f_t = a_1 f_{t-1} + a_2 f_{t-2} + \dots + a_n f_{t-n}$, где $t \geq n$ – номера членов ряда, аттрактор численно совпадает с доминирующим или максимальным по модулю корнем характеристического полинома (теорема Д.Бернулли).

Возникновение замысла. Изучая монографию армянского философа Г.Аракеляна, мы обратили внимание на две формулы суммирующего типа, которые, по словам автора, он "изобрёл" сам [2, п. 4.9]:

$$3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\Phi^{3n}} = 1, \quad 10 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\Phi^{5n}} = 1,$$

где F_n – числа Фибоначчи, $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ – математическая константа золотого сечения.

Приведенные бесконечные суммы натолкнули нас на развитие. Можно сказать, чисто из спортивного интереса. В науке такое часто бывает.

Вот что получилось после обобщения этих формул для любого нечётного $m = 2j-1$:

$$f_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{\Phi^{m n}} = 1,$$

где f_m – числа рекуррентного ряда (A001610¹) $f_m = f_{m-1} + f_{m-2} + 1$ с начальными условиями $(f_0, f_1) = (1, 0)$.

Кроме того, $f_m = F_{m-1} + F_{m+1} - 1$ и $f_m = \sum_{n=0}^{m-2} L_n$, где L_n – числа Люка или

разновидность последовательности Фибоначчи с начальными условиями $(L_0, L_1) = (2, 1)$.

Рекуррентный ряд f_m собственно и подсказал нам идею более подробного изучения *неоднородных* линейных возвратных уравнений на примере золотосных конструкций, имеющих аттрактор-решение в виде константы ЗС.

Первые прикидки. Проанализируем линейное возвратное уравнение второго порядка $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + c$.

Оно отличается от аддитивной рекурсии Фибоначчи лишь наличием константы c .

Разделим все члены уравнения на величину f_n . Рассматривая предельный случай для возрастающей последовательности, приходим к квадратному уравнению ЗС

$$x = \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1 + \frac{f_{n-1}}{f_n} + \frac{c}{f_n} \quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \quad x = 1 + \frac{1}{x}.$$

Уравнение отражает общеизвестную золотую пропорцию через x –отношение большей части целого к меньшей: $x^2 = x + 1$.

Выполним в качестве демонстрационных примеров некоторые преобразования.

1) Запишем разностные уравнения для двух состояний $n+1$ и n :

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + c \quad \text{и} \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + c.$$

Почленно вычитая, приходим к соотношению

$$f_{n+1} - f_n = f_n + f_{n-1} - f_{n-1} - f_{n-2} \quad \text{или} \quad f_{n+1} = 2f_n - f_{n-2}.$$

Получили возвратное уравнение третьего порядка с характеристическим уравнением

$$x^3 - 2x^2 + 1 = 0.$$

Произведём упрощение: $x^3 - x^2 - (x^2 - 1) = 0$ или $(x - 1)(x^2 - x - 1) = 0$.

Таким образом, имеем три корня $(-\Phi^{-1}, 1, \Phi)$.

По теореме Бернулли аттрактор последовательности (предельное отношение соседних элементов) равен максимальному по модулю корню характеристического уравнения, то есть в данном случае – числу Φ .

Следовательно, добавление константы (в общем случае комплексного типа) к рекурсии не влияет на значение аттрактора.

Своими предельными отношениями последовательности всё также стремятся к Φ .

2) Пусть $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + c(n+1)$ или $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + cn$.

Почленно вычитая, приходим к соотношению

$$f_{n+1} = 2f_n - f_{n-2} + c \quad \text{или} \quad (n \text{ на } 1 \text{ меньше}) \quad f_n = 2f_{n-1} - f_{n-3} + c.$$

Ещё раз почленно вычитая, получаем возвратную модель-рекурсию:

¹ The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – <http://oeis.org/A001610>.

$$f_{n+1} = 3f_n - 2f_{n-1} - f_{n-2} + f_{n-3}$$

с характеристическим уравнением

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad (x-1)^2(x^2 - x - 1) = 0$$

и максимальным корнем Φ .

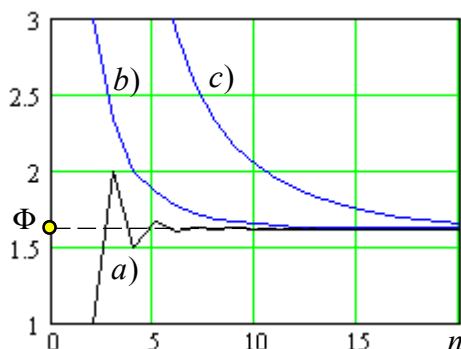


Рис. 1. Сходимость к аттрактору Φ :

$$a) f_{n+1} = f_n + f_{n-1};$$

$$b) f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + n;$$

$$c) f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + n^5$$

разностное (возвратное) уравнение второго порядка

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + g(n), \quad (1)$$

имеет такое решение [3, п. 1.2]

$$f_n = f_0 F_{n-1} + f_1 F_n + \sum_{k=1}^{n-1} g(n-k+1) F_k. \quad (2)$$

Данное соотношение основано на теореме [1, с. 315; 4, с. 671]: общее решение линейного неоднородного разностного уравнения представляется в виде суммы частного его решения и общего решения $f_n = f_0 F_{n-1} + f_1 F_n$ однородного уравнения $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

В частности, для константы $g(n) = c$ последовательность $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + c$ с начальными условиями (f_0, f_1) определяется аналитически через числа Фибоначчи F_n :

$$f_n = f_0 F_{n-1} + f_1 F_n + c(F_{n+1} - 1)$$

или в другой транскрипции:

$$f_n = (f_0 + c) F_{n-1} + (f_1 + c) F_n - c.$$

Формула справедлива для любых комплексных значений (f_0, f_1) и константы c .

Если $(f_0, f_1) = (0, 1)$ и $c = 0$, то получаются обычные числа Фибоначчи: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

При произвольных начальных условиях (f_0, f_1) и $c = 0$ образуются разнообразные ряды Фибоначчи.

В ряде наиболее простых случаев общее решение (2) упрощается, в частности:

Итак, двучленно-аддитивная рекурсия дискретной переменной n с дополнительным слагаемым $c \cdot n$ всегда стремится к своему аттрактору – числу ЗС независимо от пары начальных условий, не равных одновременно нулю.

Аналогичная картина наблюдается при усложнении добавляемой части (рис. 1).

Изменяется лишь скорость подхода числовых последовательностей к своим аттракторам, которая естественно становится выше с увеличением степени k в слагаемом n^k .

В этой связи вполне обоснованно возникает интерес к изучению вопроса о виде дополнительного слагаемого в общем случае.

Это приводит нас к понятию неоднородных возвратных уравнений с хорошо разработанной теорией.

Общее решение. Линейное неоднородное

(f_0, f_1)	Рекуррентная форма	Аналитическая форма	Индекс ряда
(0, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1$	$f_n = F_{n+2} - 1$	
(0, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 2$	$f_n = F_{n+3} - 2$	
(1, 4)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 3$	$f_n = L_{n+2} - 3$	A027961
(1, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1$	$f_n = 2F_{n+1} - 1$	A001595
(0, 2)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1$	$f_n = L_{n+1} - 1$	A001610
(1, 5)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + 1$	$f_n = F_{n-2} + F_{n+4} - 1$	A022319
(4, 3)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} - 2$	$f_n = L_n + 2$	A000211
(0, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + n$	$f_n = F_{n+4} - n - 3$	A001924
(0, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + n^2$	$f_n = F_{n+7} - n^2 - 6n - 13$	A163250
(0, 1)	$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + n - 1$	$f_n = 2(F_{n+2} - 1) - n$	A104161

В самом общем случае имеем последовательности Фибоначчи с любыми начальными условиями (f_0, f_1) и постоянно действующим внешним фактором в виде заданной константы c комплексного типа.

Здесь могут быть самые разные комбинации и взаимосвязи.

В частности, для модели $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + n$ справедливо $f_n = F_n - f_{n-3} = \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k F_i$.

Выбор функции $g(n)$. Мы убедились на частных примерах, что рекурсия (1) в виде неоднородного разностного уравнения может иметь аттрактор Φ .

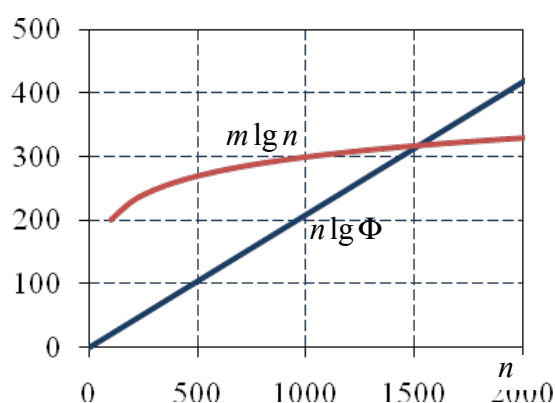


Рис. 2. Логарифмическое сравнение степеней Φ^n и n^m , $m = 100$

Попробуем уточнить эти условия.

Пусть $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + n^m$, где m – сколько угодно большое конечное число.

Если неоднородная часть уравнения равна нулю $g(n) = 0$, то числа Фибоначчи возрастают как целочисленные значения степенной функции Φ^n .

Сравним величины Φ^n и n^m .

Их сопоставление более наглядно проявляется в логарифмических координатах (рис. 2).

Независимо от значения степени m , функция Φ^n рано или поздно "перебивает" функцию n^m и

становится главенствующей в их сумме.

Таким образом, аттрактором последовательности становится число Φ .

Аналогичная картина наблюдается, если $g(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_{k-1} n + a_k$ – любое алгебраическое уравнение. Иначе говоря, функция $g(n)$ не должна расти со скоростью, превышающей скорость увеличения степенной функции Φ^n .

"Перебить" золотой аттрактор можно лишь такой функцией, возрастание которой происходит быстрее, чем Φ^n . Например, другая степенная функция $g(n) = G^n$ при $G > F$.

В этом случае аттрактор Φ сменяется на аттрактор G .

Другими словами, двучленно-аддитивная рекурсия f_n стремится к своему аттрактору золотого сечения Φ , если "мощность" обмена $g(n)$ с окружающей средой не превышает Φ^n .

Некоторые размышления. Итак, в теории золотого сечения долгое время был один ряд в виде чисел Фибоначчи с их аттрактором-константой Φ .

У нас также были обобщённые последовательности Фибоначчи, отличающиеся друг от друга начальными условиями.

Теперь мы вышли на бесконечные множества бесчисленных множеств иных последовательностей, но тоже с аттрактором золотого сечения.

Возьмём, к примеру, рекурсию, включающую алгебраический многочлен общего вида

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_{k-1} n + a_k.$$

Для любого конечного значения k все эти последовательности сходятся к ЗС.

Можно сказать, что обнаружена новая золотиносная жила в изучении ЗС.

С открытием совершенно новых ещё неведомых просторов для истинно «золотиносной философии»! – Некая фантастика в нынешней реальности!

Это по-настоящему обобщение большого круга задач, приводящих к единственной и уникально-неповторимой константе ЗС. Существующие последовательности (числа Фибоначчи и т.п.), несомненно, стоят рангом ниже, как частные случаи.

По-сути, мы вышли на открытые системы.

Если оперировать историческими образами кроликов Фибоначчи, то теперь ушастые персонажи не только размножаются. В новой модели их можно изымать для еды, причём в прогрессии. Они перестают быть бессмертными. Их допустимо привносить из других систем и так далее.

Можно сказать, что известная аддитивная форма $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ характеризует замкнутую систему. Всё варится в собственном соку.

Неоднородное уравнение $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + g(n)$ описывает уже открытую систему.

Слагаемое $g(n)$ отражает динамическую связь системы с внешним миром.

Литература:

1. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.
2. Аракелян Г.Б. Фундаментальная теория ЛМФ. – Ереван, 2007. – <http://www.hrantara.com/Monograph.pdf>.
3. EqWorld: The World of Mathematical Equations. – <http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/fe/fe-toc1.htm>. – <http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/fe/fe1202.pdf>.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

© ВаСиЛенко, 2011

