С.Л. Василенко

Незадачливые *p*-сечения

«*Даю руку на отсечение ...*
по золотому сечению»
Из клятвы золотосеченцев

Просмотрели внимательно ещё раз всю историю копировально-множительного тиражирования так называемых p-сечений.

Непроизвольно бросается в глаза, что уровень их значимости каждый раз искусственно во много крат завышался и несоизмеримо далёк от реальной будничной картины.

Более того, абсолютное большинство вещей, приписываемых p-сечениям, с самого начала являются откровенно надуманными. Начиная от терминологии, и заканчивая пламенными призывами к революции в компьютерных разработках.

За всем эти отчётливо просматривается одно: явное желание протащить некую, пусть даже несообразную идею, но обязательно в софитах известного и в некотором смысле эпатажного математического образа – золотого сечения.

Собственно от этой искусственности и наносной гиперболизации очевидных положений и проистекают многие беды-недоразумения вокруг пресловутых p-сечений и их производных: p-чисел, p-кодов и др.

Напомним, что p-сечение целого на две части соотносится с вещественным корнем $\lambda > 1$ алгебраического уравнения[1] $x^p = x^{p-1} + 1$. Ему адекватно соответствует линейное разностное уравнение $f_{n+p} = f_{n+p-1} + f_n$ с дискретно-временным параметром n.

<u>**Миф первый**</u> **или история плагиата.** Попытаемся полнее представить предмет нашего исследования с уяснением причин, которые заставляют использовать в лексике мифическую составляющую. Для этого рассмотрим один вопрос в той редакции, как он довольно трудно выстраивался на основании фактов, частично изложенных в работах [1, 2].

Всё говорит о том, что задачу "p-чисел" раньше многих решил выдающийся математик Д. Пойа, который, выступая в роли педагога, предложил её своим читателям [3, с. 114][2] в качестве несложного упражнения. Учёный также дал подсказку-ориентир на привлечение биномиальных коэффициентов и изменение наклона в треугольнике Паскаля.

Но самое главное он привел алгоритм формирования упомянутых рядов [3, с. 393] по «рекуррентной формуле (уравнение в *конечных разностях*); упр. 14 гл. 4» $y_n = y_{n-1} + y_{n-q}$.

"*Конечные разности*", в свою очередь, легко перекликаются с эквивалентным алгебраическим характеристическим уравнением [4, с. 330] $\lambda^q = \lambda^{q-1} + 1$ – аналогом линейного разностного (возвратного) уравнения с корнем λ.

В математике это уже давно очевидные факты.

Русскоязычные "p-числа" впервые упоминаются в последнем университетском сборнике уходящего 1970 г. [5], – сразу после опубликования научной монографии [3].

Это легко объяснимо: в те времена подобные книги, да ещё с интригующим названием "Математическое открытие", быстро расходились по рукам.

Такую, мягко говоря, оперативную преемственность или заимствование без ссылок отмечал и проф. С.Ясинский [6, с. 35].

И вот почти через 40 лет упорных возражений и постоянного выкручивания, наконец-то, сделано вынужденное признание в части синтеза-описания p-чисел Фибоначчи [7]:

---

[1] Используется также эквивалентная запись $x^{p+1} = x^p + 1$.

[2] На английском книга опубликована отдельными томами в 1962 и 1965 гг.

«Первым это сделал выдающийся математик, почетный профессор Стенфордского университета (США) Джордж Пойа».

Нечто похожее теперь можно найти и в других местах:

«к их открытию <p-чисел Фибоначчи> пришли независимо друг от друга несколько математиков... *Первым это сделал, несомненно, американский математик Пойа*» [8];

«к p-числам Фибоначчи раньше меня пришли математики-фибоначчисты (в частности, Вернер Хоггатт) при исследовании диагональных сумм треугольника Паскаля, но понятие "золотых p-сечений", насколько мне известно, было введено мною впервые» [9].

Последнее действительно так. Давать названия – непростая задача. Но приставка "золотые" здесь рудимент, не имеющий никакой смысловой нагрузки. Слово "сечение" под вопросом, поскольку физическая интерпретация чисел не сводится только к сечению геометрического отрезка, а их толкование выходит далеко за пределы геометрии.

Итак, привнесенная мифологизированная версия, несколько десятков лет звучавшая от имени её авторов, превратилась в мыльный пузырь.

Завернутые в золотую оправу числа на глазах преобразились, за ними остались учёные Пойа и Хоггатт, а "p-признание" позволило воочию увидеть движущие, порой противоречивые мотивы ученых.

Но, оказывается, и это не всё!

Эфемерные приоритеты не дают покоя и продолжают будоражить мозг...

Неожиданно появляется обновлённая мифологическая версия-транскрипция, будто автор установил [9] свойство p-чисел Фибоначчи: их отношение в последовательности стремится к положительному корню порождающего их алгебраического уравнения.

Без комментариев... Поскольку в виде доказанной математически теоремы (почти 300 лет назад!) это определено Д. Бернулли в рамках рекуррентного метода решения уравнений.

Таким образом, уже без искусственных мифов восстановлено историческое название "чисел Пойа-Фибоначчи". Касательно букв-обозначений вопрос риторический. Строго говоря, в оригинале это "q-числа", но логично оставить латинскую букву "p", как это сделал проф. А. Стахов в честь их автора Пойа (**P**olya George). – Видимо, по Фрейду.

Что ж остается, в тех же p-числах Пойа без слова "золотые"? – Просто числа!? – Серенькая масса, да и только. А вот с золотой приставкой или "золотой висюлькой" – это было уже нечто! Хотя очевидно, что в математическом аспекте здесь нарушается не только лингвистическая этимология терминов, но и логическая генеалогия понятий.

Но без золочения остаётся только Дж. Пойа. Именно поэтому не всё так просто.

Собственно потому так дорожит позолотой А. Стахов. Не зря за неё он 40 лет вёл нешуточные сражения и продолжает кормить читателя вздором, несмотря на очевидность плагиата. Можно сказать на ровном месте. Было бы за что бороться... Суета сует...

Миф второй **или злополучное укрощение строптивой.** На протяжении всего времени работы с p-сечениями предпринималось несколько усилий не просто "причесать и подкрасить" математический фасад, но и попытаться "нарисовать" нечто необычное.

Без этого формульная сага-возня ну никак не тянула на маломальскую теорию.

Таких попыток в разное время было предпринято несколько.

Но все они, без исключения, так и не вышли за рамки тривиального, хоть и несколько завуалированного пересказа известных материалов.

Более того, заведомо очевидные знания представлялись под разным соусом якобы новыми результатами. А на самом деле отражали явное преувеличение и чрезмерное возвеличивание рядового действа.

Взять ту же тему "научной балды", например, в виде исполнения теорем-пустышек [10].

Она не минула и p-сечения.

Так, теорема 1 с её равенствами (5)–(7) в работе [11]. – Это настолько очевидная запись известных *формул Виета*[3] для многочлена произвольной степени, что как-то неудобно говорить о ней всерьёз. Даже если брать применительно к уравнению $x^p = x^{p-1} + 1$, то здесь абсолютно нечего доказывать. Элементарно записывают, ссылаются. – И всё!

В лучшем случае, хотя и с большущей натяжкой, это тривиальное следствие из формул Виета. Но никак не самостоятельная теорема или лемма.

Напомним, если $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ – корни многочлена $x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_n$, то есть $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_n) = 0$, путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях *x* (теорема единственности) получаются формулы Виета, которым уже ~ 400 лет:

$$\begin{cases} a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)\ , \\ a_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + ... + \lambda_1\lambda_n + \lambda_2\lambda_3 + ... + \lambda_{n-1}\lambda_n, \\ a_3 = -(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + ... + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n), \\ \quad .... \qquad a_n = (-1)^n \lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n. \end{cases}$$

Что же делают "ловкачи-факиры от науки"? – На место коэффициентов $(a_1, a_2, ..., a_n)$ подставляются их значения $(-1, 0, ..., 0, -1)$ из полинома $x^p - x^{p-1} - 1$ и формулы Виета объявляются своей личной теоремой. – Нарочно не придумаешь.

Теорема 2 и формула (8) там же [11] – это именитые в алгебре тождества Ньютона[4], также известные как *формулы Ньютона–Жирара* (в терминах симметрических многочленов), которые давно не нуждаются в каких-либо доказательствах.

Бери, называй (упоминай, ссылайся) и используй!

Так, для полинома в записи $x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - ... + (-1)^n a_n$ сумма *k*-х степеней корней $\psi_k = \lambda_1^k + \lambda_2^k + ... + \lambda_n^k$ выражается через его коэффициенты:

$$\begin{array}{ll} \psi_1 = a_1 & \rightarrow\ 1, \\ \psi_2 = a_1\psi_1 - 2a_2 & \rightarrow\ 1, \\ \psi_3 = a_1\psi_2 - a_2\psi_1 + 3a_3 & \rightarrow\ 1, \\ \psi_4 = a_1\psi_3 - a_2\psi_2 + a_3\psi_1 - 4a_4 & \rightarrow\ 1\ ... \\ \psi_p = a_1\psi_{p-1} - a_2\psi_{p-2} + ... - pa_0 & \rightarrow\ 1 + p... \end{array}$$

И где здесь теорема? – Обычная игра в балду: подставили 1-циферки вместо *a*-буковок.

Далее эти суммы становятся адекватным представлением *p*-чисел Люка.

И затем следует фейерверк дифирамбов [12] или "балдовня" [10]: «Новые (?) математические формулы, задающие в общем виде *p*-числа Люка», «эти формулы ... затрагивают некоторые весьма глубокие теоретико-числовые проблемы», «новый (?) математический аппарат привлечет внимания физиков-теоретиков» (интересно чем?) и т.п.

Хотя здесь всё донельзя тривиально, а числа Люка (суммы ψ_k) – это элементарный счёт по приведенным формулам Ньютона–Жирара практически для любого полинома (табл. 1).

Славословить, превозносить или что-то восхвалять здесь относительно *p*-чисел просто неприлично, разве что простительно для реферативной работы первокурсника.

[3] Формулы обобщил французский математик Альберт Жирар: Invention Nouvelle en Algebre, Amsterdam, 1629. Они устанавливают связь между корнями и коэффициентами многочлена *n*-й степени.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_identities.

Таблица 1

Примеры формирования сумм *k*-х степеней корней полиномов по тождествам Ньютона

Полином $k=$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
x^5-x^4-1	5	1	1	1	1	6	7	8	9	10	16
x^5-2x^4-1	5	2	4	8	16	37	76	156	320	656	1349
x^5-x^4-2	5	1	1	1	1	11	13	15	17	19	41
$x^5-x^4-x^3-x^2-x-1$	5	1	3	7	15	31	57	113	223	439	863
x^5-x^3-1	5	0	2	0	2	5	2	7	2	9	7
$x^5-x^4-x^2-1$	5	1	1	4	5	11	16	22	37	58	91
$x^5-x^4+x^2-1$	5	1	1	2	3	1	4	8	5	2	9
x^5-x^2-x-1	5	0	0	3	4	5	3	7	12	12	15
x^5-x^2-1	5	0	0	3	0	5	3	0	8	3	5

Да уж, никак не хочет укрощаться математика. Не так уж и просто придумать своё!

По рассматриваемой теме можно ещё взглянуть на непомерные усилия вывести формулу Бине для p-чисел [12, 13]. – Воистину всё с ног на голову: где не надо, на готовых формулах сочиняются теоремы-пустышки, где наоборот можно что-то действительно развить, записывается и "приватизируется" хорошо знакомый метод.

Предлагаемые там выкладки – это вовсе не формула, ибо нужно отдельно решать самостоятельные задачи: 1) сначала требуется найти численным способом все корни алгебраического уравнения p-й степени; 2) далее определить коэффициенты, зависящие от начальных условий, для чего решается уже другая система p линейных уравнений.

Но даже и с этим можно было бы с натяжкой согласиться, считая выкладки не формулой, а расчетным методом (алгоритмом), если бы речь не шла о тривиальном повторении обычных и широко известных в математике процедур [4, гл. 5; 14].

Кроме того, все эти приближенные решения никак не увязываются с чисто аналитической (явной) формулой Бине в радикалах (квадратных корнях), в чем её прелесть.

И уже как насмешка звучит над читателем теза [15]: «А.Стахов и Б.Розин *вывели* (?) обобщенную формулу Бине для p-чисел Фибоначчи»: $F_p(n)=k_1x_1^n+k_2x_2^n+\ldots+k_px_p^n$,

где x_j – корни обобщенного "золотого" алгебраического уравнения $x^p=x^{p-1}+1$, $j=\overline{1,\,p}$;

k_j – некоторые постоянные коэффициенты, являющиеся решениями следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} F_p(0)=k_1+k_2+\ldots+k_p=0\,, \\ F_p(m)=k_1x_1^m+k_2x_2^m+\ldots+k_px_p^m=1\,, \qquad m=\overline{1,\,p-1}\,. \end{cases}$$

Записано-то правильно. Но теза, будто «*вывели обобщенную формулу Бине*», – даже не научная балда, а сознательное искажение действительности под маской неприкрытого пренебрежения читающей аудиторией.

Ибо представлена обычная запись решения любого линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами [4, с. 329–332; 14] и заданными начальными условиями.

Кстати последние вовсе не обязательно равны (0, 1, 1, ..., 1).

Никакой специфики в части особых свойств исходного уравнения здесь и близко нет!

<u>Миф третий</u> или нелепость золочения. Деление отрезка *AB* точкой *C* в соотношении $\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p$ названо «задачей о *золотом* *p*-сечении этого отрезка на том основании, что при $p = 1$ эта задача сводится к классическому золотому сечению" [15]. Вытекающее отсюда уравнение $x^{p+1} = x^p + 1$ провозглашается *золотым* алгебраическим уравнением.

Числа Φ_p – положительные корни *золотого* уравнения – были наречены обобщёнными *золотыми р*-пропорциями [16]. Даже в буквенном обозначении этого корня прослеживается навязчиво-золочёная мысль хоть как-то прилипнуть к единственной константе золотого сечения (числу Фидия) $\Phi = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2 \approx 1{,}618$.

Явная бессмыслица с надуманным вкраплением позолоты в наименование видна сразу, что называется невооружённым глазом. Принятая подоснова, дескать, при $p = 1$ эта задача сводится к обычному золотому сечению (ЗС), не выдерживает никакой критики.

Алогичность термина "золотые" во множественной транскрипции проявляется как отсутствие корректности в его глобальном применении, ибо в таком контексте он имеет неограниченное наполнение ситуативным содержанием.

Можно составить безмерное количество различных делений, которые плотно заполнят весь исходный отрезок, но при $p = 1$ каждое из них будут исправно образовывать ЗС.

Так, что золотыми *р*-сечениями станут практические все точки $x \in (0,\ 1)$.

Например,

$$\left(\frac{CB}{AC}\right)^{p\,\frac{(2-p)\,(3-2p)\cdots(m+1-mp)}{(2-p^2)\,(2-p^3)\cdots(2-p^n)}} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^{p\,\frac{(2p-1)\,(3p-2)\cdots(kp-k+1)}{(2p^2-1)\,(2p^3-1)\cdots(2p^l-1)}}.$$

Для любых натуральных чисел m, n, k, l значение $p = 0$ даёт дихотомию, $p = 1$ – ЗС.

И подобных примеров не счесть.

Поэтому, золочение терминологии несообразно, абсурдно и просто нелепо.

Чисто условно можно говорить про "обобщённое золотое сечение" (ОЗС) в кавычках, как о расширении задачи пропорционального деления линейного отрезка на две неравные части, которая в простейшем случае определяется числом ЗС.

То есть "ОЗС" – это не термин или математическое определение, а некоторый художественный образ, или если угодно сленг, который в строгом смысле больше тяготеет к псевдонаучному понятию.

Но принимая "ОЗС" к использованию даже в качестве сленга, следует себе четко представлять всю его бессмысленность на физическом уровне.

Практически любую точку на единичном отрезке можно интерпретировать как "ОЗС" путем подбора решения соответствующего уравнения, построенного на основании математической пропорции того или иного вида. И тем самым нивелировать терминологию.

Так, в работе [17] приведены другие уравнения $x^{m+k}\left(x^2 - x - 1\right) = \pm\, d\left(x^{m-l} - 1\right)$.

Комбинируя в широком диапазоне целочисленные параметры (m, k, l, d), мы приходим к самым разным сечениям так, что охватываем ими практически весь единичный отрезок.

Если степенной параметр $m = l$, то данное уравнение приводится к золотому сечению.

Мы сейчас не высказываемся об их полезности или возможностях использования.

Мы говорим о том, что, по меньшей мере, наивно считать все решения такого уравнения обобщениями ЗС только на том основании, что в частном случае $m = l$ уравнение дает решение ЗС.

Бессмысленность затеи с таким псевдообощением очевидна. И подобных уравнений миллиарды.

Ещё один момент. Это авторы так развили свою мысль, якобы отталкиваясь от ЗС.

Но к p-сечениям можно было подойти совершенно с другой стороны: путём выделения этой подзадачи из общего алгебраического уравнения. Знать ничего не зная о существовании какого-то там числа ЗС, как частного случая – невидимой капле в безбрежном океане уравнений или незаметной песчинке в бескрайней пустыне.

То есть ЗС абсолютно не является смысловой сутью или необходимым атрибутом определения p-сечения. – Шестиугольник никто не называет обобщённым треугольником.

Что может быть характерным в полиноме $x^n - x^{n-1} - 1$?

Прежде всего, это трином (греч. *treis* три + *nomos* член) или трёхчлен.

Кроме того, явно просматривается наличие двух старших степеней.

Так, что вполне подходит рабочее название: «трином двух старших степеней». – Можно ещё добавить: с единичными коэффициентами.

А приляпанное золото – здесь просто бирюлька для замазывания глаз и ложного привлечения внимания. Так что числа-обобщения золотого сечения – бессодержательная ненаучная идиома, а ее использование – свидетельство математической некомпетентности [18]. – См. также приложение.

<u>Миф четвёртый</u> или неподдающаяся геометрия.

Читаем [15]: «Алексей Стахов обобщил Евклидову задачу о "делении в крайнем и среднем отношении" ("золотое сечение")...

<u>Обобщение Евклидовой Теоремы II, 11.</u> Для заданного целого $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ разделить отрезок $AB = a$ точкой C на два отрезка: больший отрезок $AC = b$ и меньший отрезок $CB = c$ таким образом, чтобы было $a^p \times c = b^{p+1}$».

1. ***Предмет развития задачи ЗС.*** Прежде чем говорить о развитии задачи о евклидовом «делении в крайнем и среднем отношении», нужно хотя бы попытаться осмыслить, а что здесь собственно является «крайним и средним отношениями».

Что именно становится предметом обобщения задачи? – Подчеркнём: именно задачи, но не самой константы ЗС!

Оказывается, при внимательном рассмотрении не всё так очевидно. И приходится принимать некоторые гипотезы.

Например, Андрей Никитин высказывает мысль [19], что эти отношения вообще проистекают из музыки относительно края и некоторого среднего положения на струне.

О пифагорейских приёмах мыслить музыкальную гармонию при помощи теоретико-числовых методов говорил А.Лосев [20, ч. 2, гл. 1, § 2].

Платон утверждает в "Тимее" (32а), что два тела наилучшим способом могут быть объединены только так, что "первое так относится к среднему, как среднее к последнему, и, соответственно, последнее к среднему – как среднее к первому". – Это отдалённо напоминает закономерности золотого деления.

«... средняя так относится к последней, как первая относится к ней самой и как последняя относится к средней, так точно середина относится к первой, тогда выходит, что средняя становится и первою и последнею, а первая и последняя обе становятся средними», – это тоже Платон из книги А.Лосева [21, ч. 7, гл. 6, § 1].

Спрашивается, можно ли после этого сориентироваться, что де-факто обобщает проф. А.Стахов при «делении в крайнем и среднем отношении»? – Вряд ли он и сам это понимает. Разве что чисто механически. Но тогда так и нужно говорить.

Это называется абстрактным мышлением.

А расширение задачи становится формальной математической операцией.

Или все же за подобным обобщением что-то стоит? – Нечто большее, чем просто ЗС.

Ведь, если в тезе Платона условно принять, что предмет a является средним между первым b и последним c, то немного просматривается (хотя и с некоторой натяжкой) золотая пропорция: $c/a = a/b$.

Но это если оперировать отдельным членам пропорции.

А где же сами отношения (среднее и крайнее), что фигурируют у Евклида? – У нас на этот счёт существует собственная версия.

Поскольку её подробное изложение не входит в задачи настоящего исследования, ограничимся лишь заключительным образом-констатацией гипотетического объяснения.

Как писали математики в Древней Индии «Смотри!»

Так или иначе, но с такой весьма правдоподобной трактовкой мы легко выходим на последующее обобщение задачи: подобное деление прямой на три и больше отрезков, что приводит нас сначала к кубической модели трибоначчи, а затем – к уравнению n-боначчи.

Применение «тринома двух старших степеней» или p-сечений Пойа в своём расширении требует привлечения уже иной геометрии, выходящей за рамки планиметрии.

2. Собственно геометрия по расширению задачи.

Сделаем уточнения:

1. Евклид в своей теореме не употреблял слова "большой", "малый". Проф. Стахов применяет, и от этого его теорема в контексте стройности нивелируется. Ибо при $p = 0$ отрезки равны, и корректность формулировки нарушается.

2. У Евклида в «Началах» фигурировали предложения. Поэтому и вести речь нужно о развитии конкретного предложения. Хотя в современной формулировке, конечно, допускается использовать понятие теоремы. Примерно так: теорема (обобщение предложения Евклида 11, кн. 2).

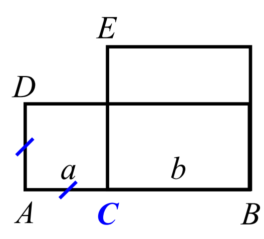
Но главное не в этом. Из обобщения должен непосредственно вытекать частный случай предложения о равенстве квадрата и прямоугольника. А этого, как видим, в [15] нет.

Зато присутствуют некие возведения в степень отрезков без смыслового геометрического содержания подобных произведений. Что никак не увязывается с геометрией Евклида. – Слышали звон, да не знают где он.

Напомним древнюю формулировку о золотом сечении [22, с. 75].

Исключительно для удобства сопоставления с рисунком добавим несколько буквенных обозначений, которых в оригинале не было.

Предложение 11 (кн. 2). Данную прямую AB рассечь так, чтобы прямоугольник BD, заключенный между целой и одним из отрезков a, был равен квадрату BE на оставшемся отрезке b.



Переходя к более высоким степеням отрезков, что фактически означает их многократное перемножение, мы тем самым идём по пути увеличения мерности пространства. В общем случае развивая задачу для n-мерного евклидового пространства.

Например, 1^3 будет означать объём, заключённый в обычном единичном кубе.

Обозначим через $P(d_1...d_n)$ – n-мерный прямоугольный параллелепипед с рёбрами $d_i, i = \overline{1, n}$. В частности, $P(1^n)$ – единичный n-гиперкуб, $P(1^{n-1}a)$ – параллелепипед, у которого $n-1$ рёбер одинаковы и равны 1, а одно ребро равно a, как условная высота.

Т е о р е м а (*обобщение предложения Евклида* 11, *кн.* 2). Данную прямую рассечь так, чтобы n-мерный прямоугольный параллелепипед $P(1^{n-1}a)$, построенный на целой и одном из отрезков a, был равен n-гиперкубу на оставшемся отрезке.

Например, в трёхмерном случае: параллелепипед с квадратом 1×1 в основании и высотой a объёмно равен кубу с ребром $b = 1 - a$.

Соответствующие равенства, пропорции и алгебраические уравнения относительно неизвестного x – отношения целого к большему – смотри здесь:

$$1\cdot a = b^2 \;\;\Rightarrow\;\; x = \frac{1}{b} \;\;\to\;\; \frac{1}{b} = \frac{b}{a} = \frac{b+a}{b} = 1 + \frac{1}{x} \;\;\Rightarrow\;\; x^2 = x + 1 .$$

$$1^{n-1}\cdot a = b^n \;\;\Rightarrow\;\; x = \frac{1}{b} \;\;\to\;\; \frac{1}{x^{n-1}} = \frac{b^{n-1}}{1^{n-1}} = \frac{a}{b} = \frac{1-b}{b} = x - 1 \;\;\Rightarrow\;\; x^n = x^{n-1} + 1 .$$

Таким образом, исходя из базового метрического соотношения $1^{n-1}\cdot a = b^n$, мы показали, как можно обосновать возможность геометрической интерпретации «тринома двух старших степеней» в n-мерном евклидовом пространстве.

И всё-таки, если говорить про *обобщение задачи ЗС* (но не самого числа ЗС!), то лучше обратиться к известной модели n-боначчи.

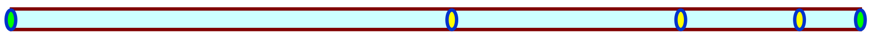
Это, пожалуй, наиболее правильное и логически верное направление, органически вытекающее из задачи золотого сечения, не выходя за пределы планиметрии.

Соответственно система n-боначчи легко идентифицируется (квалифицируется) нами как *задача о крайнем и* $(n-1)$ *средних отношениях*: целое так относится к первому, как оно ко второму, которое, в свою очередь, – к третьему … и так далее до последнего <отрезка>:

$$\frac{1}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \ldots = \frac{g}{1 - b - c - d - \ldots - g} \;\;\Rightarrow\;\; b^n + b^{n-1} + \ldots + b = 1 ;$$

$$x = \frac{1}{b} \;\;\Rightarrow\;\; x^n = x^{n-1} + \ldots + x + 1 .$$

Например, для $n = 4$ расположение трёх точек деления приобретает вид:



При $n \to \infty$ имеет место дихотомия или задача «о крайнем и бесконечном количестве средних отношений» $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.

Ниже мы убедимся, что такое продолжение задачи Евклида, в части деления единичного отрезка прямой, имеет ряд несомненных преимуществ перед p-сечением.

<u>Миф пятый</u> или "код наплакал".

Напомним, что система счисления – это совокупность правил и приемов записи чисел с помощью набора цифровых знаков. В позиционной системе число фактически представляет собой список цифр.

Число x обычно записывают как последовательность его z-ричных цифр[5], перечисляемых по убыванию старшинства разрядов слева направо: $x = a_n a_{n-1} \ldots a_0$, где $0 \le a_k \le z - 1$ – целые числа (цифры). Саму запись называют позиционным кодом числа.

---

[5] http://ru.wikipedia.org/?oldid=37118828.

Вещественное число представляется в виде двух чисел: порядка и мантиссы. Плюс один бит для указания знака.

Так, встроенная функция *RealDigits* в системе *Mathematica* преобразует вещественные числа посредством списка цифр в системе счисления, основанием которой может быть любое действительное число, большее единицы.

В работе [23] введено выражение $A = \sum_i a_i \Phi_p^i$ и названо кодом золотой пропорции, где $a_i \in \{0, 1\}$ – двоичная цифра i-го разряда системы счисления, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$;

Φ_p – иррациональное основание позиционной системы счисления – положительный корень уравнения $x^p = x^{p-1} + 1$.

Коды изложены в книге [24]. И затем многократно дублируются в самых разных источниках, например [15, 25].

Об этих *p*-кодах наговорено немало. Однако представление информации обычно построено по "водной схеме": обо всём понемногу, но практически ничего о самих кодах.

То есть подробно излагается история развития систем счисления, древние способы счёта, дихотомия, система Бергмана и т.п. В конце приводится упомянутое выражение и всё.

Так, до сих пор не прозвучал внятный ответ об их сходимости.

Впрочем, это и не удивительно, ибо её нет! Потому она и обходится стороной. Между тем, это одно из важных и полезных свойств.

Под «сходимостью» позиционных *систем счисления* мы подразумеваем их возможность представлять каждое целое число в виде конечного разложения.

Тот же Ф-код[6] (Ф – константа золотого сечения) сходится. То есть любое натуральное число имеет конечное Ф-представление.

Проведём для сравнения небольшое сопоставление Φ_p-кодов с моделью *n*-боначчи $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$ – другой разновидностью расширения задачи золотого сечения.

Уравнение *n*-боначчи с точки зрения неизменности доминирующего (максимального по абсолютной величине) корня можно представить также в эквивалентном виде: $x + x^{-n} = 2$.

Это достигается умножением полинома *n*-боначчи на $(x-1)$:

$$(x-1)\left(x^n - x^{n-1} - \ldots - x - 1\right) = x^{n+1} - 2x^n + 1 = x^n\left(x + x^{-n} - 2\right).$$

«Трином двух старших степеней» $x^n = x^{n-1} + 1$ при $n = 1$ даёт дихотомию или двоичную систему счисления (СС); при $n = 2$ – сходящуюся иррациональную СС с золотым сечением.

Далее "вырождается". То есть, ни одна из последующих систем счисления не сходится.

В то время как существуют тысячи других сходящихся систем.

Спрашивается, так уж нужна ли подобная система? – Ответ вполне предсказуем: нет!

Полином *n*-боначчи в этом контексте довольно уникален.

Начинается он с обычной единицы или натурального счёта (рис. 1).

Далее следует иррациональная система счисления с золотым сечением.

После этого постепенно наращивается основание СС, доходя в пределе до двоичной системы. И все эти системы счисления являются сходящимися!

Мы не будем обсуждать полезность и преимущества *n*-боначевых СС.

Это отдельный вопрос...

---

[6] Краткий, благозвучный и вполне идентифицируемый термин «Ф-код» основан на придуманном Андреем Никитиным словосочетании «Ф-счёт» и является его дальнейшим развитием. Только «Ф-счёт» предполагает процедуру (процесс) преобразования, «Ф-код» – результат этого преобразования в виде фиксированной цифровой записи конкретного числа. Термин «Ф-код» удобен и тем, что от него легко образуются производные: «Ф-коды», «Ф-кодирование», «Ф-кодировка», «Ф-кодер», «Ф-декодер».

Важно главное: все они допускают возможность конечного представления любых натуральных чисел. Итак,

– трином двух старших степеней $x^n = x^{n-1} + 1$: от двоичности через ЗС и далее дорога "в никуда" или назад в первый класс рисовать палочки;

– n-боначчи $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + 1$: от натурального счёта через ЗС – к двоичной системе счисления, образуя бесконечное множество сходящихся систем.

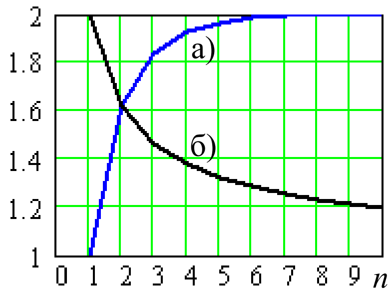


Рис. 1. Корни полиномов:
а) n-боначчи;
б) трином старших степеней

Что мы имеем? – *Слова важны, но ещё важнее смыслы*.

Любое вещественное число $\theta > 1$ можно искусственно назначить основанием позиционной системы счисления. Это уже давно не проблема. Однако стараются подобрать так, чтобы полученная система всё-таки обладала некоторыми полезными свойствами.

Триномы старших степеней или пресловутые p-коды не имеют ни одного такого полезного свойства (Ф-код не в счёт). Они даже не способны выразить натуральные числа в виде конечного набора разрядов. А с ростом порядка p их эффективность всё время падает, постепенно приближаясь к записи чисел в виде ... «забора обычных палочек».

В этом смысле весьма символично звучат призывы проф. Стахова вернуться к древней математике... записывать числа чёрточками, как считали наши далёкие предки.

Рассмотрим сходимость подробнее...

В работе [26] доказано, что <u>*каждое целое число имеет **конечное** разложение*</u>, когда основание системы счисления является доминирующим (максимальным по модулю) корнем многочлена (числом Пизо[7])

$$x^n - a_1 x^{n-1} - a_2 x^{n-2} - ... - a_n, \quad \text{где } a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n \ge 1 \text{ – целые числа,}$$

или многочлена

$$x^{m+1} - (t_1 + 1)x^m + (t_1 - t_2)x^{m-1} + ... + (t_{m+1} - t_m), \quad \text{где } t_1 \ge t_2 \ge ... \ge t_{m+1} \ge 1 \text{ – целые числа.}$$

Напомним, целое алгебраическое число $\alpha > 1$ называется числом Пизо [27, с. 162], если все его сопряжённые, отличные от самого α, лежат внутри круга $|z| < 1$, то есть по абсолютной величине строго меньше единицы.

Числа Пизо обладают одним удивительным свойством: **их степени "почти целые"** [28]. Именно это свойство делает их удобными кандидатами в качестве иррациональных оснований систем счисления.

Множество чисел Пизо замкнуто и потому содержит наименьший элемент – положительный корень $\lambda_1 \approx 1{,}3247$ уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ (пластическая[8] константа).

Второе наименьшее число $\lambda_2 \approx 1{,}380$ – корень уравнения $x^4 - x^3 - 1 = 0$.

В случае тринома-многочлена старших степеней $x^p - x^{p-1} - 1$ данное утверждение выполняется лишь в частном случае $x^2 - x - 1$, то есть для его корня Ф – золотого сечения.

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Pisot%E2%80%93Vijayaraghavan_number.

[8] В отличие от названия золотого сечения, слово "*пластический*" не имело отношения к веществу, а относилось к тому, что этому можно придать трехмерную форму, как следствие кубического уравнения.

Уже в следующем полиноме $x^3 - x^2 - 0 \cdot x - 1$ один из коэффициентов равен нулю, чем нарушается условие $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge 1$.

Следовательно, в общем случае *p*-сечения не образуют сходящуюся позиционную систему счисления, то есть целые числа не имеют конечное разложение.

Например, для уравнения $x^3 = x^2 + 1$ или $1 = x^{-1} + x^{-3}$ верна кодировка 1000 ↔ 0101.

Единица запишется как 1 = 1.000 = 0.101.

Двойка 2 = 1.101. Собственно и всё.

Мы не можем далее освободить нулевой разряд для "приёма" следующей единицы.

Все попытки высвободить нулевой разряд от 1 заканчиваются неудачей.

Уже тройку не удаётся записать конечным числом разрядов.

Вот и вся расхваленная система *p*-кодов, которая на деле превращается в "пшик".

В то же время все доминирующие корни полинома *n*-боначчи $x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - ... - 1$ образуют сходящиеся системы счисления: целые числа имеют конечное разложение.

Продолжение следует... Старательно взращиваемые мифические вымыслы о *p*-сечениях можно продолжать и далее. Хотя основное содержание уже очерчено.

Остаётся добавить разве что комментарий к некоторым заоблачным фантазиям и просто бессодержательным заявлениям вокруг *p*-чисел:

«*Исследования Джорджа Бергмана и Алексея Стахова привели <u>к открытию нового класса позиционных систем счисления</u>, которые могут стать основой новой информационной технологии*» [25]. – С системой Бергмана более-менее ясно. А какой такой новый класс открыл Стахов? – Разных классов существует почти столько, сколько самих вещественных чисел. И все они в разной мере приемлемы для формирования систем счисления.

Φ_p-коды даже не сходятся. А их аналитическое представление обычно не известно.

В то же время существует масса простых сходящихся систем счисления. Так, в работе [29] строятся сходящиеся системы с основанием, равным корню уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$, где $a \ge 3$ – натуральное число, и рассматриваются иррациональности в этой системе.

«*Формула* $A = \sum_i a_i \Phi_p^i$, *задающая коды золотой p-пропорции, является таким же <u>значительным математическим открытием</u>, как и формула Бергмана* $A = \sum_i a_i \Phi^i$, *а также формула* $A = \sum_i a_i 2^i$, *определившая развитие современных компьютерных технологий*!» [25]. – Ярчайший пример научной балды [10]. Если формула Бергмана и двоичная система счисления действительно позволяют выразить целые числа, то Φ_p-код (степенью выше квадратного равнения) – нет! В этом контексте практически ничего не поменяется, если вместо *p*-кода подставить любое вещественное число $\theta > 1$. Если вдобавок оно является корнем алгебраического уравнения, для него будет верно соответствующее тождество. Так что «объявленное открытие» тождественно типичной балдовне.

«*Возможность представления некоторых иррациональных чисел (степеней золотой p-пропорции и их сумм) в виде конечной совокупности "битов" является <u>первым необычным свойством</u> введенных выше позиционных представлений*» [25]. – Действительно, Волга впадает в Каспийское море. Утверждение справедливо для любого вещественного числа, большего 1. И никак не оттеняет специфику Φ_p.

«*Любое натуральное число N в системе Бергмана и вообще в любом коде золотой p-пропорции всегда представляется в виде конечной суммы степеней золотой пропорции* Φ^i

или степеней золотой p-пропорции Φ_i^p» [25], что якобы доказано в [16]. – Ложное утверждение для Φ_p-кодов, которые не имеют конечного разложения натуральных чисел.

«*В книге* [16] *я установил следующее свойство p-чисел Фибоначчи:* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{F_p(n)}{F_{p-1}(n)} = \Phi_p$,

где Φ_p *– положительный корень следующего алгебраического уравнения* $x^p = x^{p-1} + 1$» [7]. – Здесь ничего не нужно устанавливать. Ибо давным-давно (~ 300 лет назад) уже определено Д.Бернулли, как результат приближённого итеративного метода нахождения корней алгебраических уравнений по их адекватной (эквивалентной) записи в виде рекурсии.

«*Числа* Φ_p *были названы в* [16] *«золотыми» p-пропорциями на том основании, что при* $p = 2$ *число* Φ_p *совпадает с числом* $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$*... Таким образом****,*** *p****-****числа Фибоначчи привели к обнаружению новых математических констант*» [7]. – Число не является пропорцией, ибо она – есть равенство двух отношений. Число может быть равно отношению, причём фиксированному отношению с чётко определённым числителем и знаменателем. Некоторой рекурсии соответствует характеристическое алгебраическое уравнение, корни которого априори не являются новыми математическими константами. Да ещё теми, которые обнаруживаются. – Какая-то "дикая" математика.

Отметим, что сама по себе рекурсия $f_n = f_{n-1} + f_{n-p}$ ничего предосудительного не имеет. Она вполне может фигурировать в разных приложениях. В тех же объектах, которые условно можно назвать «системами с запаздыванием последействия и отдалённым эхом».

Дело не в этом. Суть в том, что в теоретическом плане сюда ничего нового не внесено со времён "фибоначчиевых" алгоритмов измерения аналого-цифрового преобразования [5], построенных на идее Пойа [3]. Разве что искусственно притянуто слово "золотое".

Вместо заключения. Подведём краткие промежуточные итоги.

Итак, сходимость в p-кодах отсутствует.

Все, так называемые «золотые p-коды» (кроме Ф-кода Бергмана), – откровенное и преднамеренное введение в заблуждение:

– никакие они не золотые, поскольку в них нет признаков золотого сечения (ЗС), ведь любое алгебраическое уравнение общего вида $x^p = a_1x^{p-1} + ... + a_{p-1}x + 1$ содержит в себе уравнение ЗС $x^2 = x + 1$ частным случаем (ну, и что с того? теперь все уравнения золотые?);

– никакие они не коды, ибо расходятся из-за нарушения главного условия для формирующих коэффициентов, которые не должны быть менее 1, в частности, нулями;

– с увеличением показателя степени p основание системы счисления стремится к единице, что означает возвращении в пещерные времена человека с его натуральным счётом на палочках. Даже если сильно захотеть, такое и нарочно не придумаешь.

Воистину стаховские p-коды – это *ретро*-коды далёкого прошлого. Фактически «*пещерная система счисления*». – Мелком палочки рисовать на стенах!

Ранее мы говорили больше о неправильности использования золотой терминологии.

Теперь речь идёт в принципе, о главном: описание конкретных свойств по сравнению с иными формами и объектами. В целом можно утверждать, что 40-летняя эпопея с p-сечениями – типичный пример «научной балды».

А вот и целая звонница из этой серии в части p-чисел[9] с небольшими комментариями:

[9] http://ru.wikipedia.org/?oldid=37204796.

«*Открыл новый класс иррациональных чисел – золотые p-сечения*». – Не открыл, но позаимствовал. Нового ничего нет, ибо речь идёт о численных решениях тринома *p*-й степени. А "золотая" окраска – чисто манипуляционный рекламный трюк.

«*Разработал новый научный принцип – обобщенный принцип золотого сечения, который включает "принцип дихотомии" и классический "принцип золотого сечения" в качестве частных случаев*». – Ни нового, ни тем более научного принципа нет. Любой алгебраический полином с доминирующим положительным корнем, так или иначе, отражает деление единичного отрезка на две части в определённой пропорции. «Обобщённое золотое сечение» – лженаучный термин, ибо математические константы не обобщаются в принципе, а ЗС – это также собственное имя конкретного числа, характеризующего конкретное деление.

«*Разработал новую теорию "формул Бине" и открыл новый класс числовых последовательностей – обобщенные числа Люка*». – Теория решения разностных линейных уравнений с заданными начальными условиями давно известна. Числовые *p*-последовательности не являются новым классом, ибо практически любое алгебраическое уравнение является характеристическим (адекватным) для соответствующей рекурсии. «Открытие нового класса чисел Люка» – тривиальное проявление давно известных формул Ньютона–Жирара, которые верны для любых полиномов, а не только их частного *p*-случая.

«*Разработал теорию "золотых" алгебраических уравнений*». – Теория уравнений предполагает методы и алгоритмы решений (аналитические, численные), развитие которых не произошло. Сюда же относится исследование разрешимости с помощью стандартных алгебраических операций. – Этого тоже нет.

Основные выводы.

1. Базой взаимосвязанной системы *p*-чисел, *p*-сечений, *p*-пропорций и т.п. является долго замалчиваемый, но потом всё-таки вынужденно признанный плагиат, как откровенное заимствование главной идеи у математика Пойа без должных ссылок.

2. Почти 40-летняя история с *p*-сечениями – типичный пример "научной балды" или балдовни – околонаучной деятельности с непомерной и сознательной гиперболизацией несущественных результатов.

3. Золочёная терминология *p*-сечений – бессмысленная идиома. С такой перекрученной логикой любая точка на единичном отрезке – «обобщённое золотое сечение».

ЗС – это также собственное имя конкретного числа, но математические константы не обобщаются в принципе.

4. Так называемые *p*-коды или позиционные системы с иррациональным основанием – положительным корнем уравнения $x^p = x^{p-1} + 1$ – расходятся при $p \ge 3$. Это означает, что они не допускают возможность конечного представления любых натуральных чисел.

С увеличением степени p система счисления приближается к натуральному счёту в виде счётных палочек, возвращая человека назад к далёким предкам в пещерные века.

Так что *p*-коды – откат человека к глухим временам прапращуров.

5. Несмотря на надуманность и гиперболизацию большинства положений вокруг рассмотренных *p*-объектов, модель $x^p = x^{p-1} + 1$ как «трином двух старших степеней» может представлять определённый интерес в исследованиях. Но без пресловутых золочений!

В частности, следует более внимательно присмотреться ко второму наименьшему числу Пизо $\lambda_2 \approx 1{,}380$ – корню полинома $x^4 - x^3 - 1$.

Весьма любопытно наличие аналитического решения для уравнения пятой степени $x^5 - x^4 - 1 = 0$: $\lambda = \dfrac{c}{6} + \dfrac{2}{c} \approx 1{,}3247$, где $c = \sqrt[3]{12 \cdot (9 + \sqrt{69})}$.

Просто желательно смотреть немного шире и чуть дальше от кончика носа.

Не замыкаться на изъезженных трафаретах, заимствованных из очень ограниченного инструментария по изучению особенностей золотого сечения.

40 лет тщетных блужданий по p-пустыне "балдовня", надо полагать, закончились...

Однако не предаются забвению. Не исчезают бесследно.

Ибо отрицательный результат – тоже результат.

Со своими плюсами. И намётками на выход из тупика.

Литература:

1. *Василенко С.Л.* В поисках золотника // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15629, 03.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161569.htm.

2. *Василенко С.Л.* Миф про обобщения золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 23.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=32&sm=2.

3. *Пойа Д.* Математическое открытие: Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 452 с.

4. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей: Учеб. пособие. – 4-е изд., стер. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.

5. *Витенько И.В.*, *Стахов А.П.* Теория оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования // Приборы и системы автоматики. – Харьков: ХГУ, 1970. – Вып. 11.

6. *Ясинский С.А.* Золотое сечение в стандартизации и теории измерения. – СПб.: ВАС, 2008. – 160 с.

7. *Стахов А.П.* Нужны ли современной науке *p*-числа Фибоначчи и *p*-коды Фибоначчи? // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15355, 20.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321123.htm.

8. *Стахов А.П.* Ещё раз о *p*-числах Фибоначчи, фибоначчиевых алгоритмах измерения, *p*-кодах Фибоначчи, золотых *p*-сечениях, системе Бергмана, кодах золотой *p*-пропорции, проектах компьютеров Фибоначчи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15630, 04.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321174.htm.

9. *Статьи и доклады* профессора Стахова. Отчет о презентации книги проф. А.П. Стахова "Новый тип элементарной математики и компьютерной науки, основанных на Золотом Сечении". – http://www.goldenmuseum.com/index_rus.html.

10. *Василенко С.Л.* Научная балда // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 04.09.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11333.html.

11. *Stakhov A.*, *Rozin B.* The "golden" algebraic equations. Chaos, Solitons & Fractals 2005, 27 (5): 1415–1421. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321040.htm.

12. *Стахов А.П.*, *Розин Б.Н.* Теория формул Бине для *p*-рядов Фибоначчи и Люка // Эл. журнал Таганрогского радиотехн. ун-та «Перспективные информационные технологии и интеллектуальные системы». – 2005. – № 1(21). – С. 67–83. – http://pitis.tsure.ru/files21/10.pdf.

13. *Stakhov A.*, *Rozin B.* Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p-numbers // Chaos, Solitons & Fractals. – 2005, 27(5), 1162–1177. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321036.htm.

14. *Утешев А.Ю.* Разностное уравнение и рекуррентная последовательность. – http://pmpu.ru/vf4/recurr.

15. *Стахов А.П.* Три "ключевые" проблемы математики на этапе ее зарождения и "математика гармонии" как альтернативное направление в развитии математической науки // Totallogy. – 2007. – http://www.nbuv.gov.ua/portal/soc_gum/totallogy/2007_17-18/stah.htm.

16. *Стахов А.П.* Введение в алгоритмическую теорию измерения. – М: Сов. радио, 1977. – 288 с.

17. *Василенко С.Л.* Клоны золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15641, 09.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161573.htm.

18. *Василенко С.Л.* Идентификация рекуррентных рядов // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15487, 25.08.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161531.htm // Числонавтика. – 24.08.2009. – http://www.numbernautics.ru/content/view/544/48/.

19. *Никитин А.В.* О "крайнем и среднем…" // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16772, 21.08.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321215.htm.

20. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики / Т.1. Ранняя классика. – М.: Фолио; АСТ, 2000. – 688 с.

21. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики / Т.8. Итоги тысячелетнего развития. Книга 2. – М.: Фолио; АСТ, 2000. – 688 с.

22. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

23. *Стахов А.П.* "Золотая" пропорция в цифровой технике // Автоматика и вычислительная техника. – 1980. – № 1. – С. 27–33.

24. *Стахов А.П.* Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 151 с.

25. *Стахов А.П.* Роль систем счисления с иррациональными основаниями (кодов золотой пропорции) в развитии теории систем счисления, теории компьютеров и "современной теории чисел Фибоначчи" (к обоснованию "математики гармонии") // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15341, 14.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321117.htm.

26. *Frougny C.* How to write Integers in Non-Integer Base // LATIN'92: 1st Latin American Symposium on Theoretical Informatics, São Paulo, Brazil, 1992. – p. 154–164. – http://books.google.com/books?id=I3fC6batwokC&lpg=PA154&pg=PA154#v=onepage&q&f=false.

27. *Касселс Д.В.С.* Введение в теорию диофантовых приближений. – М.: Изд. ин. лит, 1961. – 213 с.

28. *Егоров А.* Числа Пизо // Квант. – 2005. – № 5, с. 8–13. – № 6, с. 9–13.

29. *Ильясов И.И.* Об одной системе счисления с иррациональным основанием // Чебышевский сборник. – 2003. – Т. 4, вып. 2. – С. 68–72.

Приложение

Выдержка из статьи

Василенко С.Л. Идентификация рекуррентных рядов

Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15487, 25.08.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161531.htm.

В общем случае базой может служить алгебраическое уравнение степени n с неизвестным x и действительными коэффициентами a_j

$$x^n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \tag{1}$$

и его линейно-разностное представление $(t = 0, 1, 2, ...)$

$$x_{n+t} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x_{j+t} \ . \tag{2}$$

Уравнение (1) представлено в таком виде специально, чтоб наиболее отчетливо высветить взаимосвязь с его разностным аналогом (2):

верхний индекс (степенной) переменной x становится ее нижним (порядковым), и к нему прибавляется другая переменная t, символизирующая развитие процесса во времени в дискретных точках.

Несмотря на незамысловатость записи $(1)-(2)$, мы фактически выходим на весьма общее представление колоссального множества рекуррентных рядов.

В этой связи следует отметить и пояснить один очень важный момент, который до сих пор нередко вызывает путаницу вследствие безграмотно используемой терминологии.

Одним из частных случаев $(1)-(2)$ является уравнение "золотого" сечения

$$x^2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{2+t} = x_{1+t} + x_t \,. \tag{3}$$

Берется другой подкласс уравнений (1)–(2), например,

$$x^p = x^{p-1} + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_{p+t} = x_{p-1+t} + x_t \,. \tag{4}$$

Исходя из того, что пара уравнений (3) является частным случаем (4) при $p = 2$, все решения в подклассе (4) объявляются "обобщениями (кодами) золотого сечения". – Налицо явное нарушение правил формальной логики и причинно-следственных отношений.

Покажем это. Учитывая, что (3) является частным случаем не только (4), но и $(1)-(2)$, проводим аналогичную псевдонаучную логику и приходим к утверждению, что уравнения $(1)-(2)$ тоже дают "коды золотого сечения". Другими словами, произвольное алгебраическое уравнение, а значит и его решение, обобщает "золотое" сечение (ЗС). Но своими решениями алгебраическое уравнение (1) практически охватывает всю числовую ось!

То есть по этой противоречивой логике:

√ всякое квадратное или кубическое уравнение – это обобщенные "золотые" сечения!?

√ практически любое действительное число, которому можно сопоставить решение (действительный корень) уравнений $(1)-(2)$, – это тоже обобщенное "золотое" сечение!?

√ почти вся числовая ось – сплошное "золотое" сечение!?

Все эти утверждения противоречат не только азбучным основам математики и классическому определению гармонической пропорции, но и просто здравому смыслу.

Откуда следует, что "кодов золотого сечения" нет (разве что один Ф-код), но есть только одно самостоятельное и уникальное число-отношение "золотого" сечения Ф, то есть:

"*p*-обобщения золотого сечения" – бессодержательная ненаучная идиома,

а ее использование – свидетельство математической некомпетентности.

В основу наших построений положим теорему Даниила Бернулли (1732) [14], согласно которой, если λ – единственный наибольший по модулю корень уравнения (1), то линейная возвратная (рекуррентная) последовательность (2) обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty} x_{t+1}/x_t = \lambda$.

Согласно этой теореме соседние члены возвратной последовательности изменяются так, что с удалением от начальной точки их отношение стремится к максимальному по модулю корню характеристического алгебраического уравнения.

© ВаСиЛенко, 2011