С.Л. Василенко

Парные двухчленно-аддитивные рекурсии

Река истины протекает через
каналы заблуждений...
Рабиндранат Тагор

Яркий и колоритный образ золотого сечения многих не оставляет равнодушными.

Оно уникально, доступно для понимания и просто в использовании.

В него, что называется с первого взгляда, влюбляются учёные разных специальностей.

О нём пишут искусствоведы и музыканты, архитекторы и лингвисты.

Некоторые художники посвящают ему свои полотна.

Не жалуют золотое сечение, разве что только математики. Для них это, можно сказать, заурядный, очевидный и во многом уже давно изученный объект.

Обходят его стороной и физики, ибо в физических процессах и явлениях "золотая гармония" себя практически не проявляет.

За исключением разве что отдельных задач, например, о центре масс однородных тел с самоподобным вырезом в n-мерном Евклидовом пространстве [1].

Зато от него в восторге "лирики" с их песнопением величественных дифирамб.

Хотя в своей экзальтации и стремлении внести свою лепту в теоретические построения они порой с волюнтаристическим порывом вторгаются в математическую область, наводя "тень на плетень" в самих основах теории чисел.

Наперекор установившимся традициям и закономерностям в математике.

Вопреки разумной логике и здравому смыслу.

Клоны золотого сечения. Золотое сечение – это деление целого в особенной пропорции. Золотое сечение – также и название фундаментальной константы $\Phi \approx 1{,}618$, характеризующей это деление. Проще говоря, конкретное число. Также как π или e.

Однако в неудержимой погоне за грошовыми сенсациями и нарочитом привлечении внимания к собственным исследованиям, ряд авторов вразрез математическим канонам, которые проверенны веками, объявляют корни различных алгебраических уравнений «обобщёнными золотыми сечениями».

Так порождаются нежизненные клоны, которые так и называются: «золотые сечения», например, в монографии философа Э.Сороко [2]. Ему вторит не менее "мудрая мысль" проф. А.Стахова про «золотые p-сечения», о чём подробно изложено в статье [3].

С явно прослеживаемым навязчиво-золочёным вожделением хоть как-то прилипнуть к единственной константе золотого сечения (числу Фидия) Φ.

Хотя явная бессмыслица с надуманным вкраплением позолоты в наименования видна сразу, что называется невооружённым глазом.

В целом это очень походит на вариант, которому 200 лет назад были посвящены памятные строки[1]: "Беда, коль пироги начнет печи сапожник, а сапоги тачать пирожник". Идиома обозначает персону, которая берётся явно не за своё дело, хотя, возможно, в душе искренне радеет за его успешную реализацию.

Но одного желания зачастую бывает мало. Поэтому известное речение, пусть и в усеченном виде, вполне вспоминаемо в связи с возникновением противоестественных метаморфоз. Когда философ или специалист по вычислительной технике тщетно пытаются протащить в математику собственную алогичную терминологию.

---

[1] Я.Крылов. Щука и Кот, 1813. О незадачливых генералах времён Отечественной войны 1812 г. Оказывается, были и такие.

Пробуя теоретизировать по поводу математических отношений, упомянутые авторы имеют, к сожалению, недостаточные представления об истории развития чисел и появления в науке фундаментальных констант.

Фигурально выражаясь, они стремятся, по сути, "озолотить" все числа, навалив их в одну большущую кучу.

Хотя числовые константы не обобщаются в принципе. – Это аксиома.

Развитие основ золотого сечения. Тем временем теория и практика золотого сечения (ЗС) продолжают развиваться и расширяться в своём истинно природном ключе на базе заложенных ещё в античности классических представлений. При этом, конечно, не замыкается исключительно на изученных формах, синтезируя новые модели.

Например, в статье [4] продемонстрировано, что к "золотым" числам $\Phi \approx 1{,}618$ и $\phi = \Phi^{-1} \approx 0{,}618$ могут приводить не только известные пропорции, но и другие математические задачи. В частности, различные семейства квадратных уравнений, решения которых образуют целочисленные степени числа золотого сечения Φ^k.

Показано, что с числами Фибоначчи и Люка связана не только константа золотого сечения Φ, но и её целочисленные степени. Это уже примеры «золотых крупиц», выходящие за рамки геометрии.

Значительный интерес представляет также модель обобщенного алгебраического уравнения гармонической пропорции или золотого сечения [5, 6];

$$x^{2m} - \sum_{j=1}^{m} x^{2j-1} - 1 = 0\,,\ \ m = 1, 2, 3, \ldots$$

Так, при $m = 4$ уравнение имеет вид: $x^8 = x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$.

К главным особенностям и отличиям обобщённого уравнения ЗС от известных уравнений или их модификаций можно отнести целый ряд несомненных достоинств:

– наличие пары действительных корней ($-\phi$, Φ) золотого сечения для любого порядка $2m$ обобщенного уравнения;

– равенство единице всех коэффициентов характеристического многочлена, в чём прослеживается аналогия с разложением числа Φ в виде бесконечной цепной (непрерывной) дроби, состоящей из одних единиц, в отличие от всех иных чисел;

– получение аналитического решения в общем виде, что позволяет находить полезные соотношения, основанные на знании всех корней;

– возможность простого оперирования со сколь угодно большой степенью уравнения;

– порождение уравнением бесчисленного множества аддитивно-рекуррентных последовательностей в виде целочисленной *суммирующей V-рекурсии* $V_{n+2m} = \sum_{j=1}^{m} V_{n+2j-1} + V_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Эти последовательности:

- могут иметь сколь угодно много любых начальных условий (НУ) $(V_0, V_1, \ldots, V_{2m-1})$, что обеспечивает дополнительные возможности для использования и расширения знаний в различных областях науки;
- при любом сколь угодно большом количестве произвольных начальных условий, не равных одновременно нулю, всегда асимптотически сходятся к числу золотого сечения $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, $\lim\limits_{n\to\infty} V_{n+k}/V_n = \Phi^k$; скорость сходимости превосходная.
- допускают реализацию в виде целочисленных рядов при задании целых НУ.

В работе [7] изложена новая ветвь в развитии задач, приводящих к уникальной константе золотого сечения Φ.

Впервые для ЗС используется аддитивная модель с внешними условиями в виде неоднородного уравнения, характеризующего открытые системы:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + g(n).$$

Таким образом, теория ЗС не стоит на месте и продолжает совершенствоваться.

Для этого вовсе не требуются спекулятивные и лженаучные попытки надуманного обобщения фундаментальной математической константы золотого сечения Φ.

В настоящей статье продолжаются признанные научным сообществом традиции в развитии новых представлений о золотом сечении, хотя и в несколько непривычном ракурсе.

В основу излагаемого подхода положена трансформация линейных разностных уравнений второго порядка в виде систем двух уравнений первого порядка.

Алгоритм Рассела. В работах [8; 9, гл.24] описана любопытная модель формирования взаимоувязанной пары числовых последовательностей с особыми свойствами.

Алгоритм восходит к далёкой поре древности:

«Квадратный корень из 2 – первое из открытых иррациональных чисел – был известен ранним пифагорейцам, и были изобретены остроумные методы приближения к его значению. Наилучшими были следующие: образуйте два столбца чисел, которые мы будем называть a и b; каждый столбец начинается с единицы.

Каждое последующее a на каждой стадии образуется путем сложения уже полученных последних a и b. Последующее b образуется путем прибавления удвоенного предыдущего a к предыдущему b. Так получаются первые 6 пар (1, 1), (2, 3), (5, 7), (12, 17), (29, 41), (70, 99). Для каждой пары выражение $2a^2 - b^2$ будет 1 или –1. Таким образом, b/a является почти квадратным корнем из 2 и с каждым новым шагом приближается к корню из 2».

По мнению В.Белянина «многократно замечено сначала двумя индийскими математиками в VII и XII веках, а затем в Европе: Ферма, Валлисом и другими…», что в более общем случае данный алгоритм или "модель Рассела" сходится к аттрактору $\sqrt{k}$:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = y_{n-1} + k \cdot x_{n-1}, \end{cases} \qquad \frac{y_n}{x_n} \Rightarrow \sqrt{k}.$$

В работе [8] также замечено, что если переместить коэффициент во второй строке $y_n = 2y_{n-1} + x_{n-1}$, то отношение y_n/x_n стремится к золотому сечению $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

На основании этого даже делаются выводы не только об «эволюционной связи двух математических констант – квадратного корня из двойки и золотого сечения», но также в целом об «эволюционном развитии нашей вселенной».

Представляется, что это излишне эмоциональная и слишком завышенная оценка значимости описанного события.

Кстати довольно заурядного события, как частного случая более общих представлений в данной области, например:

а) начальные условия (x_0, y_0) могут быть отличны от единиц и представляться любыми вещественными числами;

б) коэффициенты в рекурсии не обязательно равны 1 или 2 и также могут выражаться произвольными действительными числами;

в) эти в общем случае различные коэффициенты могут присутствовать одновременно при разных слагаемых рекурсии и др.

Так мы приходим к «модели двухчленно-аддитивных взаимосвязанных рекурсий» или, если чуть короче: «модели парных рекурсий»

Общее решение. Рассмотрим систему двух линейных возвратных (разностных) уравнений с постоянными коэффициентами (рис. 1)

$$x_n = ax_{n-1} + by_{n-1}, \tag{1}$$

$$y_n = cy_{n-1} + dx_{n-1}. \tag{2}$$

Представим данные выражения также с индексами, уменьшенными на единицу:

$$x_{n-1} = ax_{n-2} + by_{n-2}, \tag{3}$$

$$y_{n-1} = cy_{n-2} + dx_{n-2}. \tag{4}$$

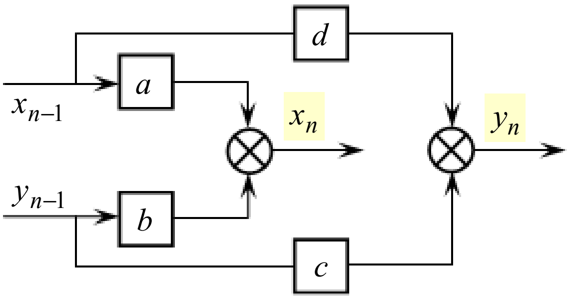

Рис.1. Структурная схема модели парной рекурсии с умножителями и сумматорами

Умножим уравнение (4) на b, заменим в нём выражение by_{n-2} из (3) и полученный результат by_{n-1} подставим в (1).

В итоге имеем разностное уравнение второго порядка, в котором переменная x_n зависит только от своих предшествующих значений:

$$x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}, \tag{5}$$

где $p = a + c, \quad q = bd - ac$.

Выполняя аналогичные построения, умножим уравнение (3) на d, заменим в нём выражение dx_{n-2} из (4) и полученный результат dx_{n-1} подставим в (2).

Так, мы приходим к разностному уравнению второго порядка, в котором следующая переменная y_n зависит только от своих предшествующих значений:

$$y_n = py_{n-1} + qy_{n-2}. \tag{6}$$

Таким образом, по своему виду и составу коэффициентов уравнения (5)–(6) совершенно идентичны.

Оно и понятно, ибо исходные уравнения (1)–(2) структурно эквивалентны, и поэтому взаимные замены $x_n \Leftrightarrow y_n$ не влияют на величины $(a+c), bd, ac$.

Запишем для возвратных (разностных) уравнений (5)–(6) эквивалентный аналог в виде характеристического алгебраического уравнения второго порядка $z^2 - pz - q = 0$ с положительным корнем $\lambda = \left(p + \sqrt{p^2 + 4q}\,\right)/2$.

Это означает, что двух последовательностей (5)–(6) с произвольными начальными условиями предельное отношением их соседних элементов является аттрактором λ (теорема Д.Бернулли) [7], то есть

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2}. \tag{7}$$

Под аттрактором числовой последовательности f_n понимается предельное отношение соседних элементов ряда $\theta = \lim\limits_{n\to\infty} f_{n+1}/f_n$

Из уравнений (1)–(2), после деления числителя и знаменателя на величину x_{n-1}, находим предельное отношение ($n \to \infty$):

$$\theta = \frac{y_n}{x_n} = \frac{cy_{n-1} + dx_{n-1}}{ax_{n-1} + by_{n-1}} = \frac{c\theta + d}{a + b\theta} \quad \Rightarrow \quad \theta^2 - \frac{c-a}{b} \cdot \theta - d = 0,$$

откуда вычисляем положительный корень

$$\theta = \lim_{n \to \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{c - a + \sqrt{(c-a)^2 + 4b^2 d}}{2b}. \tag{8}$$

В частности, для коэффициентов $a = b = d = 1$ и $c = 2$ ряд $y_n = 2y_{n-1} + x_{n-1} = 3y_{n-1} - y_{n-2}$, величина $\theta = \Phi$. При этом последовательности x_n и y_n образуют соответственно нечётные и чётные числа Фибоначчи.

Соответственно для $a = b = c = 1$ и $d = 2$ ряд $y_n = y_{n-1} + 2x_{n-1} = 2y_{n-1} + y_{n-2}$, и величина $\theta = \sqrt{2}$.

А теперь проанализируем другие, наиболее характерные частные случаи.

1. Модель парно-золотых рекурсий. Пусть $c - a = b = d = 1$.

Соответствующая пара разностных уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} x_n = a \cdot x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = (a+1) y_{n-1} + x_{n-1}, \end{cases}$$

Величины: $p = 2a + 1,\ \ q = 1 - a(a+1)$.

Авто-рекурсия: $x_n = (2a+1) \cdot x_{n-1} + \left(1 - a - a^2\right) \cdot x_{n-2}$.

Предельные отношения (7)–(8) выражаются числами золотого сечения:

$$\theta = \mathbf{\Phi}, \qquad \lambda = a + \mathbf{\Phi}.$$

При $a = 1$, величина $\lambda = 1 + \Phi = \Phi^2$.

2. Модель нечётных степеней ЗС. Можно выделить и другие специфические значения коэффициентов.

Так, аттрактор выражается нечётными степенями константы золотого сечения:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = k_m y_{n-1} + x_{n-1}, \end{cases}$$

$$\theta = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m+1}}, \qquad \lambda = 1 + \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m+1}},$$

где $k_m = L_{2m+1} + 1 \Rightarrow 2, 5, 12, 30, 77, 200...$; $m = 0, 1, 2, \ldots$;

Здесь $p = k_m + 1,\ \ q = -(k_m - 1)$ и $x_n = (k_m + 1) \cdot x_{n-1} - (k_m - 1) \cdot x_{n-2}$.

3. Модель чётных степеней ЗС.

Аттрактор выражается чётными степенями константы золотого сечения:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = k_m y_{n-1} - x_{n-1}, \end{cases}$$

$$\theta = \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m}}, \qquad \lambda = 1 + \mathbf{\Phi}^{\mathbf{2m}},$$

где $k_m = L_{2m} + 1 \Rightarrow 3, 4, 8, 19, 48, 124...$; $m = 0, 1, 2, \ldots$;

Здесь $p = k_m + 1$, $q = -(k_m + 1)$ и $x_n = (k_m + 1)(x_{n-1} - x_{n-2}) \cdot$.

4. Модель целочисленных аттракторов.

$$\begin{cases} x_n = a \cdot x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = (a+1) y_{n-1} + k(k-1) x_{n-1}, \end{cases}$$

$$\theta = \frac{1 + \sqrt{1 + 4k(k-1)}}{2} = k, \qquad \lambda = a + k.$$

5. Модель квадратного уравнения общего вида. *Для произвольной пары начальных условий* (x_0, y_0) и пары коэффициентов (P, Q) "модель Рассела" даёт следующее решение:

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1}, \\ y_n = (P+1) y_{n-1} + Q x_{n-1}, \end{cases}$$

$$\theta = \frac{P + \sqrt{P^2 + 4Q}}{2}, \qquad \lambda = 1 + \theta.$$

Это решение в пределе совпадает с аттрактором обобщённой последовательности Фибоначчи $z_n = P z_{n-1} + Q z_{n-2}$ с характеристическим квадратным уравнением $z^2 = Pz + Q$.

Однако образуемые последовательности x_n и y_n существенно отличаются от эквивалентного рекуррентного ряда z_n.

Некоторые размышлизмы.

Было бы наивно думать, что мы получили некие сверхвыдающиеся результаты.

Тем не менее, в истории развития ЗС, на наш взгляд, предпринята одна из первых попыток обобщить подход, названный нами выше алгоритмом Рассела.

По сути, выражаясь сухим языком, имеет место видоизменение линейного разностного уравнения второго порядка в виде взаимосвязанной пары двух уравнений первого порядка.

Математически это абсолютно логично и корректно.

А вот с точки зрения содержательных интерпретаций появляются новые возможности и направленности. Та же автомодель Фибоначчи, как последовательное суммирование двух предшествующих собственных значений, теперь распадается на два параллельных синхронно-увязанных процесса. То есть вначале был один процесс на базе двух предыдущих состояний. По образу: «завтра = сегодня + вчера». Теперь у нас два процесса, но уже с одним предыдущим состоянием. Что-то вроде схемы: «общее сегодня = двум разным вчера».

В этом и состоит принципиальная разница, включая новые направленности в поиске подобных задач в природе. Одно дело искать и находить свойства числа "2", и совсем другое – идентифицировать пару со свойствами числа "1". Это кардинальное изменение угла зрения, хотя в математическом смысле и содержит элементы тождественных переходов.

Выводы:

Для системы двух взаимосвязанных числовых последовательностей в разных её транскрипциях образуются "золотоносные" модели с аттракторами, выражаемыми через константу золотого сечения:

1. *Модель парно-золотых рекурсий* $x_n = a \cdot x_{n-1} + y_{n-1}$ и $y_n = (a+1)y_{n-1} + x_{n-1}$ с аттракторами: $\dfrac{y_n}{x_n} \Rightarrow \theta = \Phi$, $\left(\dfrac{y_n}{y_{n-1}}, \dfrac{x_n}{x_{n-1}}\right) \Rightarrow \lambda = a + \Phi$.

2. *Модель нечётных степеней золотого сечения* $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ и $y_n = (1 + L_{2m+1})y_{n-1} + x_{n-1}$ с нечётными членами L_{2m+1} ряда Люка и аттракторами

$$\theta = \Phi^{2m+1}, \qquad \lambda = 1 + \Phi^{2m+1}.$$

3. *Модель чётных степеней золотого сечения* $x_n = x_{n-1} + y_{n-1}$ и $y_n = (1 + L_{2m})y_{n-1} - x_{n-1}$ с чётными членами L_{2m} ряда Люка и аттракторами (m = 0, 1, 2…)

$$\theta = \Phi^{2m}, \qquad \lambda = 1 + \Phi^{2m}.$$

Литература:

1. *Василенко С.Л.*, *Белянин В.С.*, *Радзюкевич А.В.* Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей (Фибоначчи, Трибоначчи ...) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16023, 30.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161684.htm.

2. *Сороко Э.М.* Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем: Введение в общую теорию гармонии систем: 2-е изд. – М.: КомКнига, 2006. – 264 с. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/007a/02321006.htm.

3. *Василенко* С.Л. Незадачливые *p*-сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=50&sm=2.

4. *Белянин В.С.*, *Василенко С.Л.* Золотоносный песок // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 03.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=47&sm=2.

5. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.

6. *Василенко С.Л.* Онтология обобщенной модели золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16212, 11.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161739.htm.

7. *Василенко С.Л.* Обобщённые рекурсии с аттрактором золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=49&sm=2.

8. *Чернов А.* Альтернативный алгоритм ряда Фибоначчи и обобщённый алгоритм для √2 и золотого сечения. – 2009. – http://chernov-trezin.narod.ru/ZS_1_2.htm.

9. *Рассел Б.* История западной философии, и её связь с политическими и социальными условиями от античности до наших дней: 3- изд. испр. – Новосибирск: Сибир. универ. изд-во, 2001. – http://psylib.org.ua/books/rassb01/index.htm.