С.Л. Василенко

Рекурсии с периодически изменяемой структурой

Изменяй и властвуй...[1]

С помощью переустройства исходных структур можно расстроить любой закостенелый порядок или способ организации и заставить модели работать по-новому.

Однако следует помнить, что даже самая хорошая идея в преобразованиях способна погибнуть либо завести в тупик, если изменения в корне нарушают фундаментальные понятия, низвергая их в пропасть безрассудных и вычурных фантазий.

Развитие теории золотого сечения. Несмотря на свою давнюю историю, теория золотого сечения (ЗС) не стоит на месте. Она продолжает постепенно, но уверенно совершенствоваться, выходя на более высокие рубежи знаний.

Возникают новые модели.

Появляются видоизменённые структуры.

Рождаются свежие интерпретации.

Как оказывается, для этого вовсе не требуются спекулятивные и лженаучные попытки надуманных обобщений фундаментальной математической константы золотого сечения (А.Стахов, Э.Сороко и др.).

Точно также как и число π, без каких-либо обобщений входит сокровищницей в многочисленные формулы, уравнения и закономерности.

Например, в статье [1] продемонстрировано, что к "золотым" числам $\Phi \approx 1{,}618$ и $\phi = \Phi^{-1} \approx 0{,}618$ могут приводить не только известные пропорции, но и другие математические задачи. В частности, различные семейства квадратных уравнений, решения которых образуют целочисленные степени константы золотого сечения Φ^k.

Показано, что с числами Фибоначчи и Люка связана как величина золотого сечения Φ, так и её целочисленные степени. Это уже примеры «золотых крупиц», выходящие за привычные рамки евклидовой геометрии.

Значительный интерес представляет модель обобщенного алгебраического уравнения гармонической пропорции или золотого сечения [2];

$$x^{2m} - \sum_{j=1}^{m} x^{2j-1} - 1 = 0\,, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Так, при $m = 4$ уравнение имеет вид: $x^8 = x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$.

К главным особенностям и отличиям обобщённого уравнения ЗС от известных уравнений или их модификаций можно отнести целый ряд несомненных достоинств [3].

В статье [4] изложено новое направление в развитии задач, приводящих к уникальной константе золотого сечения Φ.

Впервые для ЗС используется аддитивная модель с внешними условиями в виде неоднородного уравнения, характеризующего открытые системы:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + g(n)\,.$$

В работе [5] для системы двух взаимосвязанных числовых последовательностей в разных её транскрипциях образуются "золотоносные" модели с аттракторами, выражаемыми через константу золотого сечения.

---

[1] Выражение-трансформер от изречения «Разделяй и властвуй».

Например, *модель парно-золотых рекурсий* $x_n = a \cdot x_{n-1} + y_{n-1}$ и $y_n = (a+1)y_{n-1} + x_{n-1}$ с аттракторами ($n \to \infty$):

$$\frac{y_n}{x_n} \Rightarrow \theta = \Phi, \qquad \left(\frac{y_n}{y_{n-1}}, \frac{x_n}{x_{n-1}}\right) \Rightarrow \lambda = a + \Phi.$$

Перечень последних результатов исследований может быть продолжен: основы теории рационального золотого сечения в целочисленных переменных [6], новые разложения константы ЗС в виде непрерывных дробей [7], "золотоносные" решения задачи на определение центра масс однородных тел [8] и др.

Если характеризовать в целом, то упомянутые материалы объединяет одно общее свойство – это постоянство изучаемых структур (операторов, рекурсий) во времени.

В настоящей статье рассматривается совершенно новый подкласс рекурсии.

ПИС-преобразования. В основе исследуемых рекурсий лежит периодически изменяемая структура (ПИС).

Это означает, что по мере развития процесса рекуррентная формула периодически перескакивает на разные формообразующие структуры.

Алгоритм подобного переключения на расчётные функции может быть самым разнообразным и зависит от заданного набора функций-переключателей.

Возможности образования новых видов числовых последовательностей практически не лимитированы. И приводят к различным построениям с невероятно широким спектром разнообразных теоретических линий.

Ограничимся пока рассмотрением характеристических триномов.

Каждый член последовательности определяется алгебраической суммой двух предшествующих элементов с тем или иным запаздыванием.

Кроме того, и это самое главное, набор предшествующих значений периодически изменяется. С той или иной периодичностью происходит переключение на параллельные формообразующие структуры.

Парно-дуальные ПИС-триномы. Одна из простейших, периодически изменяемых структур имеет вид пары рекурсий триномиального вида:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-q}, & n = 1\,(\mathrm{mod}\ 2), \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-p}, & n = 0\,(\mathrm{mod}\ 2), \end{cases}$$

$(f_0, f_1, ..., f_{p-1}) = (0, 1, ..., 1)$ – начальные условия; n – дискретное время; p, q – параметры-индексы запаздывания, $n \geq p \geq q$.

То есть для нечётных элементов n (деление на 2 с остатком 1), суммирование происходит по первой строке-формуле, для чётных элементов – по второй.

Очевидно, что при $p = q = 2$ равенства идентичны и образуют рекурсию формирования чисел Фибоначчи с аттрактором, равным числу золотого сечения

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}} = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

В частности, главной особенностью золотого сечения является «*инвариантное повторение закономерностей частей и целого*» (Н.Александров). В целых числах это – ряд Фибоначчи (1, 2, 3, 5, 8, 13 ...).

Если $p = q$, то приходим к так называемым p-сечениям[2], которые характеризуются алгебраическим триномом двух старших степеней $x^p = x^{p-1} + 1$.

Прерывчато-периодическая схема формирования элементов ряда соответствующим образом накладывает отпечаток на технику образования предельных аттракторов.

Вместо одного аттрактора, как это имело место для обычных рекуррентных последовательностей, теперь следует различать пару предельных отношений

$$(a, b) \;=\; \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_{2n}}{f_{2n-1}}, \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}}\right).$$

Эти величины при $q = 2$ разнятся между собой порядком следования в отношении: чёт-нечет или нечет-чёт и удовлетворяют общему равенству:

$$1 + a = ab\,.$$

Отсюда, в частности, следует, что предельное отношение двух элементов ряда, отстоящих друг от друга на две позиции, уже не зависит от чётности индекса n, то есть:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n-2}} = a\cdot b\,.$$

Общая теория прерывистых разностных уравнений достаточно сложна.

Собственно, нам даже неизвестно, есть ли вообще подобная разработанная теория.

Поэтому в данном изложении пока ограничимся изложением некоторых частных случаев, которые помогут нам понять формообразующие механизмы подобных числовых рядов. Да и саму возможность формирования последовательностей с периодически изменяемой структурой.

Запаздывание $\boldsymbol{p = 3,\ q = 2.}$

Начальные значения ряда имеют вид:

0 1 1 2 3 5 7 12 17 29 41 70 99 169 239 408 577 985 1393 ...

Предельные отношения соседних членов числовой последовательности связаны с корнем из двух.

Два аттрактора, соответствующие чётным и нечётным значениям последовательности, равны

$$a \;=\; \sqrt{2} \;\approx\; 1{,}414; \qquad b \;=\; 1 + 1\big/\sqrt{2} \;\approx\; 1{,}707\,.$$

Характерно, что

$$\frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{1}}} \;\to\; \sqrt{2}, \qquad \frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{2}}} \;\to\; 1+\sqrt{2}, \qquad \frac{f_{2n}}{f_{2n-\mathbf{3}}} \;\to\; 2+\sqrt{2}\,.$$

Здесь также применимо тождество $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \cos\dfrac{\pi}{4}$.

[2] Иногда подобные формы ошибочным, если не сказать волюнтаристическим образом, называются «обобщёнными золотыми сечениями». Хотя к феномену ЗС они не имеют абсолютно никакого отношения. Разве что, как и ЗС, в своём описании соотносятся с алгебраическим уравнением.

В то же время, независимо от чётности-нечётности n, справедливо отношение:

$$\frac{f_n}{f_{n-2}} \to a \cdot b = 1 + \sqrt{2} \approx 2{,}414.$$

В целом можно сказать, что рассмотренный случай – это «модель $\sqrt{2}$».

Запаздывание ***p* = 4, *q* = 2.**

При заданных начальных условиях (0, 1, 1, 1) первая двадцатка ряда имеет вид:

0 1 1 1 1 2 3 5 6 11 14 25 31 56 70 126 157 283 353 636 793 ...

Предельные отношения связаны с правильным семиугольником, для которого отношение радиусов вписанной r и описанной R окружностей составляет половину b:

$$\frac{r}{R} = \cos\frac{\pi}{7} = \frac{b}{2}.$$

Значения аттракторов равны:

$$a = (b-1)^{-1} \approx 1{,}247; \qquad b = 2\cos \pi/7 \approx 1{,}802.$$

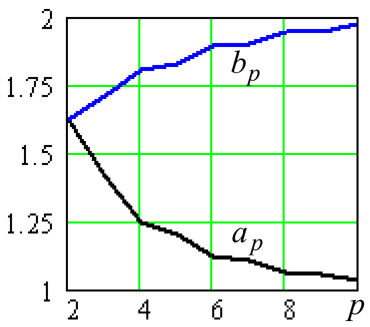

Рис. 1. Аттракторы ПИС

Далее с увеличением параметра p явных формул для аттракторов найти не удалось.

Вероятно, это известные издержки отсутствия аналитических решений для алгебраических уравнений высоких порядков.

Математические машинные эксперименты показывают (рис. 1), что по мере роста индекса запаздывания p значения аттракторов (a, b) стремятся к значениям $(1, 2)$.

Причём скорости устремления (a, b) к своим асимптотам довольно высокие. Сами значения (a, b) не зависят от начальных условий ряда f_n.

Модель золотого сечения (периодическая структура).

Модель описывается следующей парой уравнений, характеризующих периодически изменяемую структуру:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, & n = 1 \pmod{2}, \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-p}, & n = 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

При $p = 4$ образуется следующий ряд:

0 1 **1** 1 **1** 2 **2** 4 **3** 7 **5** 12 **8** 20 **13** 33 **21** 54 **34** 88 **55** 143 **89** 232 **144** 376 **233**...

Здесь всё довольно просто.

На чётных номерах-позициях расположены последовательные числа Фибоначчи.

Между ними находятся числа, которые на единицу меньше чисел Фибоначчи.

А вот при $p = 7$ формируемая последовательность уже не столь очевидна:

0 1 1 1 1 1 1 2 2 4 3 7 4 11 6 17 10 27 17 44 28 72 45 117 72 189 116 305 188 493 305 798 494 1292 799 2091 1292 3383 2090 5473 3382 8855 5473 1433 8856...

Или с изменёнными начальными условиями (*подчёркнуто*):

<u>0 1 2 3 4 5 6</u> 11 7 18 10 28 15 43 26 69 44 113 72 185 115 300 184 484 297 781 482 1263 782 2045 1266 3311 2047 5358 3310 8668 5355...

Примечательно, что все эти последовательности имеют аттракторы, непосредственно связанные с константой золотого сечения, а именно:

$$a = \Phi^{-1} \approx 0{,}618; \qquad b = 1 + \Phi = \Phi^2 \approx 2{,}618.$$

Их произведение равно Φ. Это означает, что независимо от чётности-нечётности n, для данной последовательности справедливо отношение:

$$\frac{f_n}{f_{n-2}} \to \Phi.$$

В теоретических исследованиях в области золотого сечения это довольно нетривиальный результат. Ибо до сих мы привыкли видеть подобное соотношение для соседних членов чисел Фибоначчи F_n, то есть $F_n/F_{n-1} \to \Phi$.

На наш взгляд, второе уравнение образуемой модели

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, & n = 1\,(\mathrm{mod}\ 2), \\ f_n = f_{n-2} + f_{n-7}, & n = 0\,(\mathrm{mod}\ 2), \end{cases}$$

косвенно характеризует симметрию пятого порядка (5 = 7 – 2), которая свойственна для правильного пятиугольника.

Это именно та симметрия, которая запрещена в решётке кристаллов, но может присутствовать в квазикристаллах – искусственных сплавах, образуемых при чрезвычайно высокой скорости охлаждения нагретых расплавов: до миллиона градусов в секунду.

Ремарка. Невольно вспоминается одно наблюдение О.Акимова[3]: «Наткнувшись на золотое сечение, икосаэдр или додекаэдр, он (гармонист-золотоискатель) тут же падает на колени, бьётся головой об пол» и возносит "молебен-экстазен".

Нечто похожее демонстрирует гармонист-ортодокс, вводя читателей в заблуждение, будто квазикристаллы (КК) основаны на ЗС.

Но хорошо известно, что за первым сплавом $Al + Mn$ (1982 г.) с шестью осями симметрии 5-го порядка с ЗС, были открыты сотни других квазипериодических кристаллов с осями 8-го, 10-го и 12-го порядков[4] с числами самоподобия Пизо 1+√2, 2+√3.

Меняя технологические условия, виды атомов, трансляцию симметрий, сегодня получают практически неограниченный спектр КК (от ~ аморфного до ~ кристаллического).

Стоило бы начать исследование с других сплавов, например, на базе $Si + Ni + Cr$ с их 8-симметрией, которой нет у икосаэдра, никто бы и не вспомнил про ЗС.

Достаточно посмотреть материалы многих конференций в области квазикристаллов. – Ни в одном из докладов вы не увидите и слова о ЗС.

Наука давным-давно вышла из возраста «золотых КК-памперсов».

Именно преодоление границ симметрии 5-го порядка позволил создать достойную теоретическую подоснову для переходных кристаллических структур – новой формы организации материи.

Именно поэтому открытие квазикристаллов стало объектом присуждения Нобелевской премии по химии в 2011 г.

---

[3] Конец науки. – http://sceptic-ratio.narod.ru/rep/kn14.htm.

[4] Ранее считалось, что кристаллы имеют осевую симметрию лишь 1, 2, 3, 4 и 6 порядков.

Литература:

1. *Белянин В.С.*, *Василенко С.Л.* Золотоносный песок // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 03.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=47&sm=2.

2. *Василенко С.Л.* Обобщенное уравнение гармонической пропорции. Теория и приложения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15325, 06.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321110.htm.

3. *Василенко С.Л.* Онтология обобщенной модели золотой пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16212, 11.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161739.htm.

4. *Василенко С.Л.* Обобщённые рекурсии с аттрактором золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=49&sm=2.

5. *Василенко С.Л.* Парные двухчленно-аддитивные рекурсии // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 08.10.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=51&sm=2.

6. *Василенко С.Л.* Основы теории рационального золотого сечения в целочисленных переменных // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15274 от 08.05.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322057.htm.

7. *Василенко С.Л.* Златые цепи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15557, 22.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161546.htm.

8. *Василенко С.Л.*, *Белянин В.С.*, *Радзюкевич А.В.* Центры масс однородных тел как аттракторы возвратных последовательностей (Фибоначчи, Трибоначчи ...) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16023, 30.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161684.htm.