В.П. Зубов

Заметки о Джироламо Кардано

Василий Павлович Зубов (1900 – 1963), выдающийся отечественный ученый–энциклопедист, историк естественнонаучной, философской и эстетической мысли. Прославился замечательными монографиями о знаменитых представителях европейской культуры – Аристотеле, Леонардо да Винчи, Альберти.

13 ноября 1958 г. Зубов подал заявку в редакцию книжной серии «Жизнь замечательных людей» на написание труда, посвященного биографии и творчеству Джироламо Кардано. Автор предполагал написать работу объемом от 14 до 15 печатных листов в течение года. Ранее им была написана вступительная статья к книге Кардано Дж. О моей жизни // Пер. с лат. Ф.А. Петровского. – М.: Гослитиздат, 1938, а также составлены комментарии к упомянутому изданию (С. V-XVI, 270-284). К сожалению, заявленная работа так и не была завершена.

В архиве Марии Васильевны Зубовой, дочери ученого, хранится машинописный текст указанной выше заявки и рукопись незаконченной книги, публикуемой ниже под названием «Заметки о Джироламо Кардано».

Текст подготовлен к изданию М.В. Зубовой, В.С. Беляниным, О.В. Калюжной и А.М. Шишковым.

Послесловие к публикуемой статье написано В.С. Беляниным.

Джироламо Кардано (1501 – 1576), итальянский математик, медик и мыслитель, – интереснейшая фигура эпохи Возрождения. В историю науки он вошел главным образом благодаря своим математическим трудам (решение кубических уравнений). В историко-культурном отношении Кардано представляет собой яркую колоритную фигуру. В «Письмах об изучении природы» Герцен упоминает о нем наряду с такими выдающимися представителями Ренессанса, какими были Джордано Бруно, Ванини и др. («...торжественная и не прерывающаяся процессия людей, мощных и сильных, приготовивших пропилеи новой науки»). В энциклопедических трудах Кардано нашли отражение новые географические открытия и новые технические изобретения. Биография Кардано позволяет прекрасно иллюстрировать борьбу нового и старого, освещая его встречи и столкновения с людьми различного склада и тенденций, – с университетскими учеными, инженерами и техниками-самоучками, с придворными кругами и т.д. Кардано писал о разнообразнейших предметах: о теории вероятностей, азартных играх, шахматах, заморских диковинных растениях и животных, учениях арабских врачей и философии Аристотеля. Любопытнейшим документом является его автохарактеристика, написанная к концу жизни и содержащая множество эпизодов, обрисовывающих не только облик самого Кардано, но и его эпохи.

1

В 1575 – 1576 гг., накануне своей смерти, Джироламо Кардано написал в Риме книгу «О собственной жизни» (De vita propria), как бы подводившую итог всей его деятельности. Самая поздняя упоминаемая в книге дата – 28 апреля 1576 г. 21 сентября того же года Кардано умер. Книга увидела свет лишь в 1643 г. стараниями библиофила Габриеля Ноде.[1]

Сочинение это совершенно особенное, не автобиография в собственном смысле слова, не исповедь и не дневник. Правда, глава IV имеет заголовок «Краткое описание моей жизни с начала ее до настоящего дня» и следует хронологическому порядку изложения. Правда, местами Кардано лирически изливает всю накопившуюся в душе его горечь или повествует о точно датированных событиях в форме рассказа, похожего на дневниковую запись. Но в еще больших местах Кардано как бы разглядывает себя в зеркало, размышляет над давно прошедшим, стараясь post factum осмыслить и понять главные этапы своего жизненного пути.

Уже большинство заголовков свидетельствует о таком пристальном вглядывании в отдельные черты: «Рост и наружность», «Питание», «Мои увлечения», «Шахматы и кости», «Походка и размышления», «Мои учителя», «О моей учености», «Что нового и достойного упоминания я ввел в различные области науки» и т.д. и т.д.

В своем сочинении Кардано упоминает огромное количество лиц, но дает сравнительно мало портретов. Однако те портреты, которые он дает, приобретают особую живость благодаря чередованию самых различных подробностей, сочетающихся вместе с тем в цельный единый образ. Таков, например, портрет его отца, Фацио Кардано, который одевался вопреки миланским обычаям «в красную суконную одежду, хотя сохранял черный цвет для своего исподнего платья». «Он был косноязычен; любил заниматься разными науками; лицо у него было румяное, а глаза белесоватые и способные хорошо видеть в темноте; ему никогда не приходилось пользоваться очками... Так как некоторые части его черепа были у него удалены вследствие полученной им раны, то ему трудно было оставаться долгое время с непокрытой головой; с пятидесятипятилетнего возраста он лишился всей своих зубов. Особенное предпочтение он отдавал сочинениям Евклида; ходил, согнув спину».[2]

А вот автопортрет Кардано, каким он восстанавливается по различным отрывкам «De vita propria»: «Я среднего роста... Грудь у меня несколько впалая, руки довольно тонкие, правая рука потолще, и пальцы ее не сходятся плотно... Напротив, левая моя рука красива, с тонкими продолговатыми, плотно прилегающими друг к другу пальцами и блестящими ногтями. Шея довольно длинная и худая; подбородок раздвоен, нижняя губа толстая и отвислая. Глаза мои очень невелики и как бы прищурены... Лоб мой достаточно широк и лишен волос с боков, там, где он граничит с висками. Волосы на голове и бороде были прежде белокурые; волосы я подстригаю, бороду ношу короткую и раздвоенную, по форме подбородка; под подбородком у меня отдельно росли длинные волосы, так что борода казалась гуще. Старость изменила бороду, а волосы на голове – мало... Взгляд мой пристален, как у человека, погруженного в размышления; верхние передние зубы велики, цвет лица бледный, с румянцем; лицо овальное,

---

[1] *Cardanus H.* De propria vita liber. P., 1643; перепечатана в Амстердаме (1654) и затем в 10-томном собрании сочинений в томе I (Opera omnia. Lugduni, 1663). Автобиография была дважды переведена на итальянский язык (пер. В. Мантовани, Милан, 1921 и 1922; пер. А. Беллини, Милан, 1932), а также на немецкий (пер. Г. Хефелс, Йена, 1914) и английский (пер. Дж. Стовер, Нью-Йорк, 1930). Во французском переводе Ж. Дейр (с латинским оригиналом, Париж, 1936) использована, кроме печатного текста Ноде, рукопись XVII в., хранящаяся в Милане.
Дальше всюду «Автобиография» цитируется по русскому изданию: *Кардано Дж.* О моей жизни / Пер. с лат. Ф.А. Петровского; статья и ком. В.П. Зубова. М., 1938.

[2] *Кардано Дж.* О моей жизни. Гл. III. С. 8.

хотя и не в сильной степени; череп суживается к затылку как бы в виде небольшого шара».[3]

Кардано рассказывает о своей походке, которая у него «неровная: то скорая, то медленная»,[4] а в другом месте[5] добавляет, что причиной такой неровности «были размышления, ибо надо заметить, что движение ног, а еще более рук, отражает тревожный ход мыслей». «Моя походка могла бы войти в пословицу, ибо я иду как попало, когда предаюсь размышлениям, ничего общего не имеющим с тем, что находится у меня перед глазами».[6] Кардано применяет к себе стихи Горация:

Не был он ровен ни в чем! – Иногда он так скоро бывало
Ходит, как будто бежит от врага; иногда выступает
Важно, как будто несет он священную утварь Юноны![7]

Кардано сознается: «Я приобрел привычку всегда обнаруживать в выражении лица чувство, противоположное тому, которое я в действительности испытываю; поэтому я могу притворяться, хотя и не умею скрывать... Из таких же побуждений я иной раз выхожу на улицу в лохмотьях, а иной раз – одетый с изяществом...»[8]

Мы узнаем от Кардано: «Дома я сижу с голыми до лодыжек ногами. Я не отличаюсь почтительностью, невоздержан на язык и очень вспыльчив, чего я стыжусь и в чем себя упрекаю».[9] И, наконец, мы слышим его голос: «Речь моя звучит настолько громко, что за это упрекали меня те, кто выдавал себя за моих друзей. Хотя голос мой резок и громок, однако при чтении лекций его плохо слышно из далека; выговор не очень приятен и нарочит».[10]

Уже из этих отрывков видно, сколько мельчайших реалистических штрихов содержит «De vita proprja». Неудивительно, если и дальше придется не раз обращаться все к тому же источнику.

Не будем долго останавливаться на внешней хронологической канве кардановой биографии. Он родился 24 сентября 1501 г. в Павии. Кардано подчеркивает, что это было того же числа, когда родился в древности Август и Колумб отправился в свое первое плавание,[11] в обоих случаях делая подтасовку: Август родился 23 сентября,[12] Колумб же отправился 23 сентября 1493 г. в свое второе, а не первое путешествие.

Но эта подтасовка очень характерна. И не столько для тщеславия Кардано, сколько для самочувствия человека Ренессанса, – сознания, что наступила новая эпоха. Вот как писал Кардано в другом месте: «...я родился в том веке, когда был открыт весь земной шар, тогда как в древности было известно лишь немного более одной его трети». И вслед за тем Кардано прославляет открытия и изобретения последних столетий, – усовершенствование «пиротехники», т.е. областей техники, в которых применяется огонь, – металлургии, изготовления взрывчатых и горючих веществ и т.п. Далее: изобретение артиллерии («человеческой молнии»), компаса и книгопечатания. Искусство печатать книги,

[3] Там же. Гл. V. С. 20-21.
[4] Там же. Гл. XIII. С. 50.
[5] Там же. Гл. XXI. С. 70.
[6] Там же. Гл. XXI. С. 70-71.
[7] Там же. Гл. XX. С. 65.
[8] Там же. Гл. XIII. С. 49.
[9] Там же. Гл. XIII. С. 50.
[10] Там же. Гл. V. С. 20-21.
[11] *Кардано Дж*. О моей жизни. Гл. II. С. 7-8.
[12] Ср. *Светоний.* Жизнеописание Августа. Гл. V.

«созданное руками людей, придуманное их гением, соперничает с божественными чудесами, ибо чего же еще недостает нам, кроме овладения небом?» Пусть впереди человечество ожидают превратности судьбы – мы «тем временем насладимся расцветом жизни», или дословно – цветущим лугом, florente prato.[13]

Павия, расположенная в 36 км от Милана, с 1371 года была университетским городом. Милан, главный город Миланского герцогства, был центром. В Павии и в самом Милане протекла значительная часть жизни Кардано.[14] Его отец, Фацио (1444 – 1524) был юрист, медик и математик. Около 1480 г. Фацио издал в Милане сочинение Иоанна Кентерберийского (Иоанна Пекама, XIII в.) «Perspectiva communis» («Общая перспектива»), долгие годы являвшееся основой школьного преподавания геометрической оптики. Фацио Кардано обучался с Леонардо да Винчи. В записных книжках гениального мастера можно найти такие записи: «Попроси мессера Фацио показать тебе “О пропорциях”», или – «”Пропорции” Алкинди вместе с примечаниями Марлиани от мессера Фацио».[15] В качестве единственного близкого друга отца Кардано называет некоего Галеаццо Россо, перечисляя некоторые его технические изобретения.[16]

О своей матери Кардано сообщает немногое: она «была вспыльчива, обладала очень хорошей памятью и даровитостью, была невысокого роста, скорее тучная, и отличалась благочестием». И добавляет: «Отец казался более добрым ко мне и более нежно любил меня, чем мать».[17]

Когда Кардано было около 9 лет, отец начал учить его арифметике, а с 12 лет заставил изучать первые шесть книг Евклида. 20 лет Кардано поступил в Павийский университет, а в начале 1524 года отправился для довершения образования в Падую. По окончании образования и получении диплома доктора медицины, Кардано поселился недалеко от Падуи в местечке Сакко, где занимался медицинской практикой. В Милан он переселился только в 1532 г. Годы отсутствия Кардано были для Милана, как он сам отмечает, весьма тревожными и неспокойными. В 1524 г. город дважды переходил из рук в руки – ожесточенная борьба между итальянцами и французами закончилась в следующем году поражением французов при Павии. Одновременно свирепствовала эпидемия чумы, а следующие два года, 1526 – 1527, были годами сильного неурожая, а в 1528 г. вновь вспыхнули эпидемические болезни. Попытка вступить в миланскую коллегию врачей, сделанная Кардано в 1529 г., окончилась неуспехом, и он еще на несколько лет остался в Сакко.

Об этом времени Кардано вспоминает в своей автобиографии как о времени, когда он не ведал никаких невзгод, когда он был счастливее, чем в другое время, что не мешало, впрочем, упоминать в других местах о полном расстройстве его материальных дел в те же годы. Очевидно, на склоне дней эта пора его жизни рисовалась ему в идеальной дымке, застилавшей все неприятные воспоминания: в Сакко Кардано познакомился со своей будущей женой, Лучией Бандарени, и вступил с ней в брак «на исходе тридцать первого года своей жизни».

---

[13] *Кардано Дж*. О моей жизни. Гл. XLI. С. 171-172.

[14] В конце жизни сам Кардано произвел подсчет, сколько лет он прожил в разных городах Италии. Из этого подсчета явствует, что в Риме он прожил 4 года, в Болонье – 9, в Падуе – 3, в Павии, Милане и ближайших к ним селениях и городах – 49. См. *Кардано Дж*. О моей жизни. Гл. XXIX. С. 89.

[15] *Леонардо да Винчи.* Избранные естественнонаучные произведения. М., 1955. С. 27.

[16] *Кардано Дж*. О моей жизни. Гл. III. С. 9.

[17] Там же.

Не будем дальше прослеживать год за годом жизнь Кардано в Милане и Павии. В этих городах, с небольшими перерывами, он прожил до 1562 года, когда переселился в Болонью. Отметим, однако, одно весьма важное обстоятельство. Когда мы теперь говорим о Кардано, то, прежде всего, вспоминаем о Кардано математике. Мы почти забываем, что Кардано вместе с тем был медик. Если бы каким-нибудь волшебным образом мы могли бы перенестись в середину XVI века, то увидели бы другое: Кардано – прежде всего медик и уже к концу 40-х годов *знаменитый* медик. Он поднялся по социальной лестнице именно благодаря медицине. В те времена социальное положение медика было несравненно более высоким, чем положение математика. Пожалуй, ни одна ученая специальность не обеспечивала таких высоких гонораров, как специальность врача.

Если обратиться опять к автобиографии Кардано, то что прежде всего ставил он себе в особую заслугу? То, что в настоящее время вовсе забыто и способно привлекать лишь любопытство чисто антикварного свойства. С гордостью рассказывает Кардано об открытых им средствах против брюшной водянки, упоминает написанное им «подробнейшее исследование о моче», заявляет, что им описано 5000 приемов лечения наиболее трудноизлечимых болезней: «Число разрешенных мною проблем и вопросов доходит до сорока тысяч, и более мелких указаний я оставлю после себя до двухсот тысяч. Вот основание, почему светоч нашей отчизны называл меня *мужем открытий*».[18]

Правда, Кардано говорил о себе, что он «основательно изучил» геометрию и арифметику, что он «расширил в десять раз арифметику»,[19] что в арифметике он «почти все переделал – главы, относящиеся к алгебре, и отдел, касающийся столь многочисленных свойств чисел, в особенности подобных между собой».[20] Он дважды упоминает о публичном курсе математики, который читал в 1536 г. в Милане.[21] Но все-таки основной профессией в его собственных глазах оставалась медицина: «С самого раннего возраста я утвердился в решении заботиться об устроении своей жизни. Занятия же медициной скорее и ближе вели к намеченной мною цели, чем профессия юриста; кроме того, медицина одинаково пригодна для всего земного шара и для всех веков; она опирается на доказательства более ясные и менее зависящие от мнения отдельных людей, сообразные с разумом, то есть с вековечным законом природы; вот почему я и посвятил себя ей, а не юриспруденции».[22]

До начала 40-х годов Кардано находился в довольно бедственном положении. В качестве поворотного момента своей судьбы он неоднократно[23] называл 1543 год. С этого года он приобрел известность как медик, стал пользоваться особым покровительством «сильных мира сего». В качестве таких покровителей Кардано называл: губернатора Миланской провинции испанца Альфонсо Давалос; советника Карла V, архиепископа Миланского Филиппо Аркинто; сенатора Франческо Сфондрато и многих других.[24]

Во второй половине 40-х и начале 50-х годов Кардано, приобретя известность, стал получать заманчивые приглашения из Дании, Шотландии, Франции. К 1552 году относится единственное путешествие Кардано за пределы

[18] *Кардано Дж*. О моей жизни. Гл. XLIV. С. 199. Под «светочем нашей отчизны» подразумевается юрист, филолог и историк Андреа Альгиати (1492 – 1550). Ср. Там же. Гл. XLVIII. С. 232.
[19] *Кардано Дж*. О моей жизни. Гл. XXXIV. С. 152 и 154.
[20] Там же. Гл. XLIV. С. 196.
[21] Там же. Гл. IV. С. 16; Гл. XXXII. С. 115.
[22] Там же. Гл. X. С. 40.
[23] Там же. Гл. X. С. 36; Гл. LII. С. 258.
[24] Там же. Гл. XV. С. 58-60.

Италии: он посетил Швейцарию, Францию, Фландрию, Англию и Шотландию, куда собственно он и был приглашен для лечения архиепископа Гамильтона.

В 1560 г. Кардано постигло несчастие, которого он не мог забыть до конца жизни и к которому он постоянно возвращается в автобиографии: старший его 26-летний сын, Джамбаттиста (медик, как и отец) был обвинен в отравлении своей неверной жены и казнен 13 апреля.

Вскоре (в 1562 г.) Кардано переселился в Болонью, где преподавал до 1570 г. Уже с начала XVI в., когда угас род Бентивольи, город управлялся непосредственно папским легатом. Именно в те годы, когда здесь поселился Кардано, происходила перестройка университета, получившего название «Архигимназия» и торжественно открытого 21 октября 1563 года.

В Болонье Кардано постигли новые беды. Ему не только пришлось бороться с университетскими противниками.[25] Осенью 1570 г. он подвергся преследованиям инквизиции, и его имущество было конфисковано.

В следующем году он переселился в Рим, где и прожил остаток жизни дряхлым стариком, без семьи, полузабытый, на скромной папской пенсии, оторванный от тех городов Северной Италии, в которых прожил значительную часть своей жизни, – от Павии, Милана и Падуи.

В наши задачи не входит обзор специальных медицинских сочинений Кардано, а о математических речь будет позднее. Но нельзя не остановиться здесь хотя бы вкратце на одном сочинении, которое очень ярко характеризует энциклопедические интересы этого типичного представителя итальянского Возрождения.

2

В 1550 г. в Нюрнберге вышло в свет сочинение Кардано, озаглавленное «De subtilitate» – «О тонких материях». Выражение «subtilitas» – субтильность, тонкость, – сам Кардано разъяснял так: это есть некое свойство, в результате которого предметы чувств с трудом постигаются чувствами, а предметы разума – разумом.

Продолжая старую традицию популярных энциклопедий и вместе с тем впитывая все новое, что принесла эпоха Возрождения, Кардано начинает свое сочинение о «тонких» и «замысловатых» вещах с первичных стихий, переходит затем к небесным явлениям, от них – к минералам, растениям, животным и человеку, далее – к технической деятельности человека, рассматривая отдельные ремесла, и завершает свой труд «чудесами» и «сверхъестественными вещами». Труд его представляет собою причудливую смесь старого и нового: самых фантастических суеверий с плодами гуманистической учености и данными нового технического опыта. Кардано в изобилии цитирует античных авторов и рядом с ними – такие труды, как сочинение Овиедо или новейшие сочинения о рыбах Ронделе (1554) и Беллони.

В своей автобиографии Кардано ставил себе в заслугу доказательство, что «учение Аристотеля о природе есть вещь пустая и вымышленная».[26] В частности Кардано разошелся с традиционным аристотелевским учением о четырех

---

[25] Болонская профессура весьма неохотно принимала Кардано в свои ряды. Потребовалось высокое покровительство кардинала Борромео, чтобы преодолеть их сопротивление. См. документы, опубликованные в статье *Costa E.* Girolamo Cardano allo Studio di Bologna – «Archivio storico italiano», 5ª serie, t. 35 (1905), pp. 425-436.

[26] *Кардано Дж.* О моей жизни. Гл. XLIV. С. 197.

элементах, или стихиях (земля, вода, воздух, огонь), исключив из их числа огонь. Он отвергал аристотелевское учение о переходе одной стихии в другую. В целом, однако, по вполне понятным причинам, Кардано не мог отрешиться нацело от идей, продолжавших господствовать в его время, и не мог строить совершенно новое на совершенно голом месте. По большей части его критика продолжала двигаться в круге привычных идей и пользоваться привычными понятиями: нередко Кардано критиковал лишь отдельные *частные* положения аристотеликов, не затрагивая более общих.

С яростной критикой обрушился на это сочинение Юлий-Цезарь Скалигер (1484 – 1558), уроженец Италии, живший во Франции. Его язвительные памфлеты стяжали ему прозвище «грозного». Видный филолог, он комментировал ботанические труды Феофраста и псевдо-Аристотеля, а также подлинные зоологические труды Аристотеля. Наряду с филологией Скалигер занимался медициной.[27]

Скалигер посвятил разбору труда Кардано объемистое сочинение, содержащее свыше 1000 страниц убористой печати, озаглавив его так: «XV^{я} книга экзотерических изысканий. О тонких материях, к Иерониму Кардану».[28] Мистифицируя читателей, Скалигер назвал этот том «XV^{й} книгой», желая уверить, будто у него уже написано 14 других книг подобного объема на другие темы. Скалигер придирался ко всему: к каждой запятой и к каждой точке, даже к опечаткам первого издания, которые к тому времени уже были исправлены в издании более новом. Он произносил громовые тирады против «невежества» своего противника.

Забавно, что еще до издания своей книги Скалигер поверил ложному слуху о смерти Кардано и приписал эту смерть огорчению от готовящейся критики. Поэтому он счел нужным предпослать своей разгромной книге лицемерное предисловие с похвальными словами по адресу «покойного» и горькими сожалениями о случившемся. На самом деле Скалигер умер на следующий же год (1558), а Кардано пережил его на 18 лет.

В 1559 г. в Базеле Кардано напечатал ответ «клеветнику книг о тонких материях», заявив, что критика Скалигера не может ему пригодиться для исправления даже одного слова при подготовке нового, третьего издания его труда. Кардано был прав, отмечая, что Скалигер вовсе обошел вопросы математики, также как «эксперименты», т.е. техническую сторону книги. Но у Кардано было слабое место: его филологическая эрудиция.

Нельзя сказать, чтобы Скалигер как ученый не представлял вовсе никакого интереса. В его книгах нашла отражение традиционная ученость Падуанского университета: арабизированный аристотелизм (аверроизм) с уклоном в сторону естествознания и медицины (вне богословия), тенденция к наблюдению и эксперименту, правда, в некоторых лишь пределах, с сохранением в известной мере старого средостения между техническим опытом практиков и университетской наукой. Однако неслучайно, что на Скалигера продолжали ссылаться некоторые ученые 1-й половины XVII в., возрождавшие идеи древней атомистики, например, немецкий ученый Даниель Зеннерт. Неслучайно также позднейшие историки механики находили у Скалигера некоторые интересные

---

[27] Не так давно была издана обстоятельная биография Скалигера: *Hall V., fr.* Life of Julius Caesar Scaliger (1484 – 1558) – «Transactions of the American Philosophical Society», new series, vol. 40, part 2. Philadelphia, 1950. Из этой книжки заимствуем портрет Скалигера.

[28] *Scaliger J.C.* Exotericarum exercitationum liber XV. De subtilitate, ad Hieronymum Cardanum. Parisiis, 1557. Я цитирую по франкфуртскому изданию 1576 года.

концепции, правда, не им впервые выдвинутые. Но при всем том, прежде всего другого Скалигер оставался филологом-классиком, и в этом отношении с ним не мог тягаться Кардано. Многочисленные цитаты из античных авторов ставили под удар энциклопедию Кардано. Одной цитате Кардано Скалигер противопоставлял десяток других, подвергая сомнению толкование противника. Ученый комментатор ботанических трудов Феофраста находился в преимущественном положении по сравнению с Кардано, который сам признавался в слабом знании ботаники и в том, что греческий язык он изучил только как самоучка.[29]

Но у Кардано было другое преимущество: он ближе стоял к опыту ремесленников, техников, практиков.

Весьма показателен в этом отношении спор по одному пункту. «Кабинетный» ученый, филолог-гуманист Скалигер не мог примириться с той высокой оценкой технического опыта, которая была свойственна Кардано.

Говоря о мужах, наиболее отличившихся в науках во все времена и у всех народов, Кардано поставил на первое место Архимеда, на второе – Аристотеля. Третье место, по его мнению, должно принадлежать по равному праву троим: Евклиду, философу Иоанну Дунс Скоту (ум. в 1308 г.) и Ричарду Суисету.[30] Далее следуют Аполлоний из Перги, автор труда о конических сечениях (III в. до н.э.); пифагореец Архит (время расцвета – около 400 г. до н.э.), предложивший решение задачи об удвоении куба и занимавшийся приложениями математики к механике и теории музыки; «Магомет, сын Моисея», т.е. арабский математик, астроном и медик ал-Кинди (IX в. н.э.); «Гебер-испанец» (Джабир, алхимик и врач VIII в. н.э.); медик Клавдий Гален (II в. н.э.) и, наконец, Витрувий, автор знаменитого сочинения «Об архитектуре», написанного на рубеже новой эры.[31] По поводу трех кандидатов на третье место Кардано замечал, что, несмотря на равные их права, предпочтение должно быть все-таки отдано Евклиду как из-за «древности», так и из-за «практической полезности» его сочинений.

Скалигер обрушился на этот перечень. Ему не понравилось, что Кардано поставил на первое место «ремесленника» (fabrum), т.е. инженера Архимеда, – перед Аристотелем, «не менее сведущим в тех же самых искусствах», и перед Евклидом. «Ты, поставивший Евклида после Архимеда, словно светоч после фонаря...»,[32] – патетически восклицал он по адресу Кардано. Для Скалигера превыше всего прочего продолжала оставаться «чистая наука», вне ее прикладного значения.

При всем том, пусть Скалигер и бывал подчас скептичнее и осторожнее Кардано, обоих отличало свойственное XVI веку легковерие. Так, Скалигер упрекал Кардано за его доверие к «бабушкиным сказкам» – будто павлин стыдится своих безобразных ног, – а сам в свою очередь заявлял, что нельзя смеяться над теми, которые полагают, что растения становятся душистее благодаря радуге.

[29] «Из числа же наук достойных я менее всего занимался ботаникой, вследствие недостатка памяти, а также сельским хозяйством, так как им важнее заниматься на практике, чем изучать его; от анатомии меня многое отвращало» (О моей жизни. Гл. XXXIX. С. 152). Ср. Там же. С. 151: «...я никогда не изучал грамматики, а также греческого, французского и испанского языков, однако постиг их, сам не знаю каким способом, на практике».

[30] Ричард Суисет, английский ученый первой половины XIV в., автор сочинения «Калькулятор». Кардано называет его «Иоанном».

[31] *Cardanus H.* De subtilitate libri XVI – Opera. T. III. Lugduni, 1663, pp. 607-608.

[32] *Scaliger J.C.* Op. cit. Exerc. 324. P. 1028.

Николо Тарталья родился около 1506 г. в Брешии, в Венецианской республике, в семье скромного конного почтальона. Его настоящее имя – Фонтана; «Тарталья» («косноязычный», или заика) – прозвище, под которым он печатал впоследствии и свои труды. Недостатки речи, как говорят, были следствием удара саблей, полученного в детстве при взятии Брешии французами (1512). Самоучка Тарталья жил преподаванием математики («абака») в различных городах Венецианской республики: в родной Брешии, Вероне, Виченце и Венеции. Он был одним из первых, кто занялся приложением математики к артиллерии. Первое сочинение его по вопросам баллистики было напечатано в 1537 г. в Венеции под заглавием: «Новая наука, то есть новонайденное изобретение, полезное для каждого бомбардира, обладающего познаниями в области теоретической математики».[33]

В своем сочинении «Сумма, посвященная арифметике, геометрии, отношениям и пропорциям»[34] друг Леонардо да Винчи, Лука Пачоли (род. ок. 1445 – ум. после 1509) заявлял, что нельзя найти общего правила для решения уравнений более высокой степени, чем квадратные.

Тем не менее вскоре же после напечатания книги Пачоли, по-видимому, в период между 1500 и 1515 гг., профессор Болонского университета Шипионе дель Ферро (известный также под латинизированным именем Сципиона Ферреуса) открыл способ решения уравнений вида $x^3 + ax = b$. Каков был этот способ, остается в точности неизвестным, известно лишь, что после смерти дель Ферро в 1526 г. его бумаги перешли по наследству к его зятю Аннибале делла Наве, ставшему его преемником по кафедре и преподававшему в той же Болонье вплоть до 1550 г.

Решение дель Ферро было известно и одному из учеников последнего, Антонио Мариа Фиоре, жившему в Венеции. Умел решать частные виды кубических уравнений и некий Дзуанне де Тонини да Кои, преподаватель математики в Брешии. Опять-таки неизвестно, был ли тождествен способ да Кои с тем, который был открыт в Болонье дель Ферро. Известно лишь, что да Кои предлагал задачи на кубические уравнения Тарталье.

Как бы то ни было, в 1535 г. Тарталья получил вызов от Фиоре вступить с ним в математический поединок. Та и другая сторона должна была предложить противнику 30 задач для решения. Проигравший брал на себя обязательство устроить 30 банкетов в честь победителя и его друзей. Все задачи, предложенные Фиоре, сводились к одной: решение кубических уравнений типа $x^3 + ax = b$. Тарталья рассказывает, как за одну бессонную ночь, с 12 на 13 февраля, он решил все 30 задач и в день состязания вышел победителем, великодушно отказавшись от 30 банкетов, так как, видимо, находил мало удовольствия пировать в течение целого месяца со своим побежденным противником. Да Кои, который был знаком с Тартальей, побуждал его к немедленному опубликованию своего способа, но Тарталья отклонил совет, сославшись, что в свое время напишет об этом целую книгу.

---

[33] Nuova scienza, cioè Invenzione nuovamente trovata, utile per ciascuno speculativo matematico bombardiero.

[34] Summa de Arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità. Venezia, 1494. Словом «Сумма» в соответствии со средневековой традицией обозначалось в то время сжатое систематическое обозрение той или иной научной дисциплины или вопроса. Слово «proportio» обычно обозначало в математической литературе того времени отношение двух величин, а не пропорцию, – в отличие от слова proportionalita (пропорциональность), обозначавшего пропорцию в нашем смысле слова.

Некоторое время спустя Кардано узнал от да Кои о существовании способа решать уравнения вида $x^3 + ax = b$, и это сильно его заинтересовало. В 1539 году, когда он заканчивал свою «Арифметику», Кардано делал попытки сблизиться с Тартальей, обратившись с этой целью к книгопродавцу Дзуан-Антонио да Бассано, который вступил в Венеции с Тартальей в переговоры. Последний с решительностью заявил, что если он и обнародует свое открытие, то не иначе, как в собственном труде. Он отказался дать текст 30 задач с их решением, ибо тогда Кардано сразу догадался бы об открытом им правиле. Через того же книгопродавца Кардано передал Тарталье некоторые задачи, предлагавшиеся раньше да Кои, и просил их решения. Тарталья заявил, что Кардано хочет создать видимость, будто он уже знает их решение, а на самом деле стремится выманить это решение у него, Тартальи. С трудом удалось получить лишь текст задач, предложенных Фиоре на поединке, без их решения.

Кардано ответил очень резким письмом. Он признал, что предложенные им самим задачи сходны с теми, которые предлагал да Кои, но вместе с тем заявил, что в Милане задолго до да Кои умели ставить такие же задачи, – еще тогда, когда этот магистр не умел даже пересчитать свои десять пальцев. Кардано приглашал Тарталью на состязание в Милан и предлагал ему решить задачу такого рода: два человека вступают в компанию. Капитал их неизвестен. Их прибыль равна кубу 1/10 их капитала. Если бы у них было на 3 дуката меньше, то прибыль бы равнялась их капиталу.

Тарталья не попался на эту удочку. По его словам, он очень смеялся, получив предложение Кардано, который, очевидно, желал играть с ним в *траппалу* (карточная игра) или в *корриголу* (плутовскую игру с разматыванием веревки, при которой выигрывает всегда тот, кто эту игру затевает). Вместе с тем Тарталья отдавал себе отчет, что Кардано вошел к этому времени в Милане в славу и пользовался влиянием. После обмена письмами, в марте 1539 г., он приехал в Милан, рассчитывая на содействие Кардано в деле продвижения его артиллерийских изобретений и рекомендации их губернатору Ломбардии, испанцу Альфонсо д'Авалос. Последний в момент приезда Тартальи оказался в отсутствии. Тарталья провел три дня в доме Кардано и после долгих разговоров и уговоров вручил ему открытое им решение, изложенное в стихотворной форме, причем взял с миланского ученого клятву не публиковать этого открытия и зашифровать его в своих бумагах так, чтобы оно никому не стало известным после его смерти. На другой день, видимо, раскаявшись в своей минутной слабости, Тарталья уехал обратно в Венецию, даже не повидавшись с губернатором.

В мая того же 1539 года вышла в свет в Милане «Практика всеобщей арифметики» («Practica arithmeticae generalis») Кардано. Ее автор сдержал свое обещание и не упомянул ничего о доверенном ему открытии. Вместе с любезным письмом он отправил Тарталье еще не сброшюрованные листы своей книги.

Но вскоре до Тартальи дошли слухи, что Кардано пишет новую книгу по алгебре, и он вновь забеспокоился. В начале 1540 г. в Милане вновь появился да Кои – этот «дьявол», как называл его Кардано. Да Кои, прослышав, что Кардано хочет прекратить свои лекции по математике, пожелал выступить претендентом на его место. Между тем сам Кардано берег это место для своего талантливого ученика Лодовико Феррари (1522 – 1565). Вместе с тем да Кои заявлял, что он нашел решение задач, предложенных Фиоре в Венеции и решенных Тартальей. На диспуте Феррари победил да Кои и был утвержден лектором на место своего учителя.

Получив от Тартальи решение, Кардано начал размышлять над возможностями его обобщения и довольно быстро пришел к решению в общей форме. Несомненно, что его ближайший ученик, Феррари, не мог не быть посвящен в изыскания своего учителя. Тогда же Феррари открыл способ решения уравнений четвертой степени.

В 1543 г. Кардано вместе с Феррари поехал в Болонью и здесь увиделся с Аннибале делла Наве, наследником Шипионе дель Ферро. Он получил возможность изучить оставшиеся после дель Ферро бумаги и убедиться, что уже Шипионе, до Тартальи, знал способ решения уравнений вида $x^3 + ax = b$.

Через два года, в 1545 г. появилось знаменитое математическое сочинение Кардано «Великое искусство».[35] В первой же главе ее автор дал следующую историю вопроса.

«Это искусство, – писал Кардано об алгебре, – некогда получило свое начало от Магомета, сына араба Моисея.[36] Надежный свидетель об этом – Леонардо Пизанский.[37] Он оставил по себе четыре формулы (capitula) с доказательствами, которые мы изложим в соответствующих местах. По прошествии долгого промежутка времени к ним были добавлены три других производных формулы, неизвестного автора, – вместе с основными их изложил Лука Пачоли.[38] Наконец, я читал, что из тех же первоначальных формул были выведены еще три производных неким мужем, оставшимся в неизвестности. Они однако вовсе не увидели света, хотя были гораздо полезнее прочих, ибо они учили решать уравнения с кубом и числом и с кубом и квадратом (cubi et numeri et cubi quadrati aestimationem).[39] Тем не менее, в наши времена Сципион Ферреус из Болоньи нашел формулу, касающуюся куба и неизвестного, равного числу (cubi et rerum numero aequalium),[40] – вещь поистине прекрасную и удивительную. Ведь искусство это превышает всякую человеческую проницательность, ясность всяческого смертного ума и есть без сомнения небесный дар, испытание совершенства мысли – настолько блистательное, что тот, кто его достигнет, может быть уверен, что ничто не будет для него недостижимым.

Ревнуя об этом, друг наш Николай Тарталья из Брешии, вступив в состязание с учеником Сципиона, Антонио-Мариа дель Фиоре, нашел ту же формулу, чтобы не быть побежденным, и, уступив долгим просьбам, сообщил ее мне. Ибо, обманутый словами Луки Пачоли, отрицавшего возможность какой-либо другой общей формулы, кроме тех, которые он привел, я отчаивался найти таковую и не решался ее искать (хотя она была у меня под руками после стольких ранее открытых мною вещей). Но затем, когда я ее получил и доискивался доказательства, я понял, что можно иметь еще и очень многое другое. Благодаря таким занятиям и благодаря возросшей во мне уверенности я нашел кое-что частью сам, а частью при содействии Лодовико Феррари, когда-то моего питомца. В дальнейшем изложении то, что было открыто другими, будет украшено их именами, а все, что приводится без имени, принадлежит нам. При этом и доказательства, за исключением трех Магомета и двух Лодовико, – все наши, и

[35] Artis magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus [Великого искусства или об алгебраических правилах одна книга]. Norimbergae, 1545. Другое издание вышло позднее в Базеле (1570).
[36] <…> Здесь и далее угловые скобки с отточием означают, что в рукописи текст сноски отсутствует.
[37] <…>
[38] <…>
[39] <…>
[40] <…>

каждое будет помещено в соответствующей главе в начале, а затем, с добавлением правила, к этому будет присоединяема проверка (experimentum)».[41]

За все 10 лет, с 1535 по 1545 г., Тарталья не делал никаких попыток опубликовать открытый им способ решения уравнений $x^3 + ax = b$.

Только в следующем году после появления «Великого искусства» Кардано, т.е. в 1546 г., Тарталья опубликовал в Венеции свои «Новые задачи и изобретения».[42] Последняя часть их посвящена истории взаимоотношений автора с Кардано, с включением писем и содержания разговоров, изложению которых Тарталья придал форму дословной записи. Автор не жалел черной краски, изображая Кардано как нарушителя клятвы.

Вся дальнейшая полемика развернулась между Тартальей и Феррари. Сам Кардано предпочел остаться в стороне и в тени. 10 февраля 1547 г. Феррари выступил со своей первой задорной листовкой (cartello), на которую Тарталья не замедлил ответить в том же месяце (19 февраля). Полемика велась в самых резких тонах: Тарталья не скрывал, что резкость его нападок имела целью вызвать на бой самого Кардано. Обмен листовками продолжался более года, вплоть до 10 августа 1548 г. В этот день Тарталья принял вызов Феррари и в церкви в саду dei frati zoccolanti (братьев в деревянных башмаках, т.е. францисканцев) состоялся диспут в присутствии знати, включая губернатора Милана, дона Феррате ди Гонзага, приглашенного в качестве верховного арбитра. Беспристрастного отчета о диспуте не сохранилось. Достоверно известно, что Кардано на диспуте не присутствовал. Известно также, что на диспуте был предложен с той и другой стороны 31 вопрос для решения. И столь же хорошо известно, что Тарталья потерпел на диспуте решительное поражение. Это поражение имело для него самые печальные последствия: в его родном городе Брешии ему было отказано в должности публичного лектора, на которую его ранее приглашали. Тарталье пришлось вернуться в Венецию, к своим скромным занятиям в качестве учителя абака. В 1556 г., незадолго до смерти (в декабре 1557 г.), он опубликовал первую часть своего «Генерального трактата о числах и мерах»[43] – прекрасного учебника элементарной математики, – в котором с горечью повествовал и о своих спорах с Феррари, и о своих злоключениях в Брешии, не упуская возможности всякий раз говорить с соответствующими выносками на полях о «заблуждениях и ошибках медика Кардано и его креатуры Лодовико Феррари».

Тарталья неоднократно повторял, что он готовится написать большой труд по алгебре. Но даже в последнем его произведении, в «Трактате», нет ничего о решении кубических уравнений. В посмертно вышедшем втором томе этого сочинения издатель указывал, что тщательно исследовал все черновые наброски: и там также не оказалось ничего по этим вопросам!

Много было написано о моральном (или вернее имморальном) поведении Кардано в его спорах с Тартальей, начиная с самого Тартальи, страстно упрекавшего Кардано в «коварстве» и «вероломстве». Не становясь ни в позу морального обличителя, ни в позу апологета или защитника, скажем только одно по долгу историка. Психология Тартальи была психологией, характерной для «секретничества» старого отживающего цехового строя. Тарталья был уверен, что он сможет до бесконечности извлекать выгоду из своего открытия, держа его в секрете от других. Между тем наука достигала того уровня своего развития, когда уже нельзя было долго таить шило в мешке: открытие вскоре же переставало быть

[41] Ars magna. Cap. I (Opera, IV, 222). Под «проверкой» понимается единичный пример.
[42] Quesiti ed invenzioni diverse. Venezia, 1546.
[43] General trattato di numeri et misure. Venezia, 1556. 2-ой том вышел посмертно там же в 1560 г.

достоянием одного человека (мы видели это на примере Шипионе дель Ферро, Антонио Мариа Фиоре, Тонини да Кои, Тартальи). Те же самые открытия зачастую стали делаться несколькими людьми независимо, в разных городах и странах, благодаря сходству исторических условий. Одновременно с этим Тарталья-самоучка чувствовал себя неспособным сделать нужные обобщения, отшлифовать то, до чего он додумался сам. Вот почему он и видел себя вынужденным до бесконечности откладывать написание своего труда, предпочитал хранить в тайне полученный им «талант», зарывать его в землю.

Что же касается Кардано, при всех отрицательных чертах его характера, его эгоцентризме, себялюбии и честолюбии, он не мог не видеть, что вместе с Феррари он сделал гораздо больше, чем Тарталья, да к тому же узнал, что открытие Тартальи не принадлежит ему одному, а уже раньше было сделано Шипионе дель Ферро. Он видел, что Тарталья ходил вокруг да около, не находя общего решения и все откладывая не только опубликование, но и самое написание своего труда. Кардано не собирался присваивать чужое открытие: в «Великом искусстве» он упомянул и Шипионе дель Ферро, и Тарталью. Оставалось обвинение в нарушении клятвы. В этом случае факт остается фактом: Кардано действительно нарушил данное им слово.

Но посмотрим теперь внимательнее, что же именно сделал каждый из упомянутых ученых. Нужно сознаться, что здесь историк встречается со многими неизвестными. Во-первых, неизвестен метод Шипионе дель Ферро. Во-вторых, неизвестно, как решал те же задачи Антонио Мариа Фиоре. В-третьих, неизвестно, решал ли и как решал те же задачи да Кои. Неизвестно, в-четвертых, каким приемом пользовался Тарталья. Наконец, в-пятых, Кардано дал вывод формулы, уже обладая решением, и остается в значительной мере неясным тот путь, которым он шел. Во всех этих пунктах приходится прибегать к предположениям.

4

Тарталья в своем сочинении привел то стихотворение, которое, по его словам, он когда-то передал Кардано и которое содержало указания для решения неполных кубических уравнений (без квадратного члена). Мы рассмотрим это стихотворение по частям, приведя также итальянский подлинник, чтобы дать представление о его неясностях и двусмысленностях, которые неизбежно пропадают при переводе в наши дни, когда решение уже известно.[44]

Прежде чем рассматривать различные способы решения, нужно напомнить некоторые технические термины того времени. Неизвестное в первой степени называлось «вещью» (res), по-итальянски – cosa (во множественном числе – cose), отсюда «коссисты», люди, занимавшиеся алгеброй. Свободный член уравнения назывался просто «числом» (numerus), коэффициенты при x^2 и x – «числами квадратов» и «числами вещей». Поэтому, например, 5 «вещей» соответствовало тому, что у нас обозначается как $5x$. Знак радикала, обозначался у Кардано **R**, знак плюс **p**, знак минус **m**.

Так как отрицательными числами не пользовались, то исследование уравнения в общей форме заменялось исследованием отдельных случаев, и именно там, где мы пользуемся отрицательными величинами, пользовались положительными в противоположной части уравнения. Иными словами неполное кубическое уравнение типа $x^3 \pm bx \pm c = 0$ рассматривалось отдельно для случаев

[44] *Tartaglia.* Opere... Venezia, 1606. P. 266. Цит. по: *Gherardi*. Op. cit. P. 266.

(1) $x^3 + bx – c = 0$
(2) $x^3 – bx – c = 0$
(3) $x^3 – bx + c = 0$.

Случай $x^3 + bx + c = 0$ естественно отпадал, так как сумма трех положительных величин не может равняться нулю.

В соответствии с только что сказанным, случаи 1 – 3 имели вид:

$x^3 + bx = c$ (cubo + cose = numero)
$x^3 = bx + c$ (cubo = cose + numero)
$x^3 + c = bx$ (cubo + numero = cose).

1 случай: $x^3 + bx = c$.

«Qundo che'l cubo con le cose appresso,
Se agguaqlia à qualche numero discreto:
Trouan dui altri, differenti in esso.
Dapoi terrai questo per consueto,
Che'l lor produtto, sempre sia equale
Al terzo cubo, delle cose netto».

В основном переводе: «Когда куб вместе с вещами [иксами] бывает равен какому-либо дискретному числу, нужно найти два другие, разнящиеся в нем [$u^3 – v^3 = c$]. Затем ты будешь всегда, как нечто привычное, считать, что их произведение равно третьему кубу, которое в точности отвечает [числу] вещей [$u^3v^3 = (b/3)^3$]».[45]

И Тарталья заключает:

«El residue poi suo generale,
Delli lor lati cubi, ben sostratti
Verra la tua cosa principale».

То есть: «И далее общий его остаток, от кубических их корней, вычитаемых правильно, будет главная искомая тобою вещь [$u – v = x$]».

2-й случай: $x^3 = bx + c$.

«In el secondo, de cotesti alti;
Quando che'l cubo restasse lui solo,
Tu asserverai quest'altri contratti,
Del numer farai due, tal part'a volo
Che l'una in l'altra si produca schiett;
El terzo cubo delle cose in stullo;
Dell' qual poi er commun precetto,
Tovai li lati cubi, insieme gionti
Et cotal somma, sara il tuo conectto».

«Во втором случае подобных действий, если куб останется один, ты будешь соблюдать вот эти другие условия: из «числа» [c] ты сделаешь два налету [$c = u^3 + v^3$], чтобы при перемножении одного на другое получился третий куб «вещей», объединенных в порядке [$u^3v^3 = (b/3)^3$]. Затем, следуя обычному правилу, ты извлечешь кубические корни (u и v), которые сложишь, и такая сумма будет то, что ты задумал ($u + v = x$)».

3-й случай: $x^3 + c = bx$.

Здесь Тарталья не словоохотлив и ограничивается тремя строчками, которые нет необходимости приводить в оригинале. В переводе они гласят:

[45] В прямых скобках введены наши пояснения. – *В.З.*

«Третий же случай из наших подсчетов решается при помощи второго, если хорошенько присмотреться, то по природе они связаны друг с другом».

Наконец, следуют заключительные строки: «Эти правила я нашел – и притом не мешкая [non con passi tardi; дословно: не шагая медленно] в 1534 году, с основаниями весьма прочными и крепкими, в приморском городе у Ченты».[46]

Кардано,[47] подобно Тарталье, рассматривает отдельно случаи $x^3 + bx = c$, $x^3 = bx + c$ и $x^3 + c = bx$. Сравним с общепринятой формулой правила, которые он для этих случаев дает.

Решая уравнение $x^3 + bx + c = 0$, мы полагаем $x = u + v$. Поскольку $x^3 = (u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv\,(u + v) = u^3 + v^3 + 3uvx$, имеем:

$$x^3 – 3uvx – (u^3 + v^3) = 0,$$

или

$$x^3 – px – q = 0,$$

где $3uv = – b$ и $u^3 + v^3 = -c$.

Возведем $3uv = – b$ в куб и $u^3 + v^3 = – c$ в квадрат, получим

$$u^3v^3 = -\frac{b^3}{27} \quad \text{и} \quad u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = c^2.$$

Умножим первое из этих уравнений на 4 и вычтем из второго:

$$u^6 + 2u^3v^3 + v^6 = c^2$$

–

$$4u^3v^3 = -\frac{4b^3}{27}$$

$$u^6 - 2u^3v^3 + v^6 = c^2 + \frac{4b^3}{27}.$$

Остаток можно представить в виде

$$(u^3 - v^3)^2 = c^2 + \frac{4b^3}{27},$$

откуда

$$u^3 - v^3 = \mp\sqrt{c^2 + \frac{4b^3}{27}},$$

так как $u^3 + v^3 = -c$, получаем

$$u^3 = -\frac{c}{2} \mp \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}},$$

$$v^3 = -\frac{c}{2} \mp \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}},$$

Очевидно, что один из знаков, стоящих перед корнем, соответствует u^3, а другой v^3.

Имеем, следовательно,

$$u = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}},$$

[46] Чента – река в северной Италии.
[47] Ars magna. Cap. XI-XIII (Opera, IV, 249-253).

$$v = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}},$$

Так как x = u + v, то

$$x = \sqrt[3]{-\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{b^3}{27}}}.$$

Правило Кардано для уравнения типа $x^3 + bx = c$, гласит (если в прямых скобках ввести общепринятые алгебраические обозначения):

«Возведи третью часть «числа» вещей [b] в куб [$(b/3)^3$]. Прибавь к ней квадрат половины «числа» уравнения [$(b/3)^3 + (c/2)^2$] и из суммы извлеки квадратный корень. К одному такому корню прибавь половину «числа», которую ты только что возводил в квадрат [$\sqrt{(\frac{b}{3})^3 + (\frac{c}{2})^2} + \frac{c}{2}$], а от другого такого корня вычти такую же половину [$\sqrt{(\frac{b}{3})^3 + (\frac{c}{2})^2} - \frac{c}{2}$]. Ты будешь иметь бином и вычет (apotome).[48]

Затем если кубический корень из вычета отнять от кубического корня из бинома, получившийся от этого остаток будет значением неизвестного (rei aestimatio)».[49]

Для случая $x^3 = bx + c$ Кардано ограничивается следующим правилом: «Если куб третьей части «числа» вещей [$(b/3)^3$] не будет больше квадрата половины «числа» уравнения [$(c/2)^2$], отними его из этой последней и корень остатка прибавь к половине «числа» уравнения [$\frac{c}{2} + \sqrt{(\frac{c}{2})^2 - (\frac{b}{3})^3}$], а затем отними эту же величину от той же половины [$\frac{c}{2} - \sqrt{(\frac{c}{2})^2 - (\frac{b}{3})^3}$]. У тебя будет то, что называют биномом и вычетом (apotome). Сумма их кубических корней дает неизвестное». Что же касается случая, когда $(c/2)^2 > (b/3)^3$, Кардано говорит так: «Но если куб третьей части «числа» вещей превосходит квадрат половины «числа» уравнения, что случается всякий раз когда «число» уравнения меньше $\frac{3}{4}$ его куба,[50] либо когда произведение $\frac{2}{3}$ «числа» вещей на R$\frac{1}{3}$ того же «числа» дает число, большее, чем «число» уравнения,[51] тогда обратись к книге “Aliza”, здесь приложенной.[52]

Переходим к третьему случаю: $x^3 + c = bx$. Кардано дает такое правило: «Найти значение неизвестного для куба, равного тому же числу неизвестных с тем же «числом» [$y^3 = by + c$]. Возведи половину этого значения [y] в квадрат и утрой [$3(y/2)^2$]. Отними эту величину от числа «вещей» [$b - 3(y/2)^2$], и R остатка, прибавленный к половине значения неизвестного для куба равного «вещам» и

---

[48] <…>

[49] Ars magna. Cap. XI (Opera, IV, 249).

[50] <…>

[51] Нетрудно видеть, что при $(c/2)^2 = (b/3)^3$ оказывается: $c^2 = 4b^3/27$ и $c = \sqrt{\frac{4b^3}{27}} = \frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3}}$.

[52] Ars magna. Cap. XII (Opera, IV, 251).

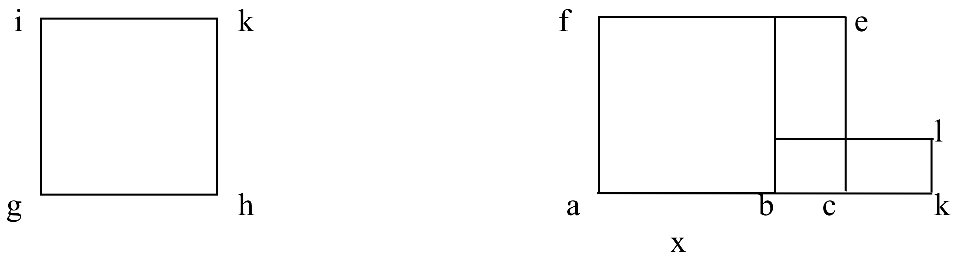
числу или вычитаемый из нее $[\frac{y}{2} \pm \sqrt{b - 3(\frac{y}{2})^2}]$, указывает значение неизвестного для куба и числа, равного «вещам» [для $x^3 + c = bx$].[53]

Каким путем пришел Кардано к указываемым им правилам? В одном месте своего сочинения он писал: «Когда же я понял, что формула (capitulum), которую мне передал Николай Тарталья, была им получена путем геометрического доказательства, то я стал думать, что это есть царский путь к открытию всех формул (ad omnia capitula venanda)».[54]

Отчасти приоткрывают завесу в этом отношении те «доказательства» (demonstrationes), которыми Кардано сопроводил каждое из приведенных правил. Попробуем резюмировать их существо для каждого случая отдельно.

Вернемся к случаю $x^3 + bx = c$. Кардано берет пример $x^3 + 6x = 20$ и разбирает его подробно, к чему в сущности и сводится «доказательство».

Возьмем куб x^3 с основанием *gikh*, который удовлетворяет данному уравнению в сумме с 6x и равняется 20. Далее возьмем два других куба $(ac)^3$ и $(cl)^3$, разность которых также равняется 20, а произведение ребер *ac* и *ck* равно 2, т.е. b/2. На ребре *ac* берут отрезок *bc* = *ck*. Иначе говоря, *ac* – *bc* = *ab*. Кардано доказывает, что величина *ab* равна *gl* = *x*, т.е. куб, построенный на *ab*, удовлетворяет уравнению $x^3 + 6x = 20$.



В дальнейшем, излагая рассуждения Кардано, мы для простоты заменим обозначение отрезков *ab*, *bc* и т.д. буквенными и числовыми обозначениями x, 2 и т.д.

Итак, требуется доказать: если $x^3 + 6x = 20$ и если взять два других куба y^3 и $n^3 = (6/3)^3 = 2^3$, разность которых $y^3 - n^3$ (или $y^3 - 8^3$) также равна 20, а произведение ребер *y* и *n* равно 2 или (6/3), то разность $y - n = x$. Следовательно, определив *y* (из $y^3 - n^3 = 20$ и $yn = 2$), мы получаем возможность узнать *x*.

Кардано предпосылает рассуждению 4 исходных положения (supposita):

(1) $yn = b/3$ (= 6/3 = 2).

(2) $y^3 - n^3 = c$ (= 20).

(3) $3nxy = 3ny(y - n) = 3ny^2 - 3yn^2$.

Вместе с тем, поскольку $yn = 2$: $3nxy = 6x$. Следовательно: $3ny^2 - 3yn^2 = 6x$.

(4) $(y - n)^3 = (y^3 + 3yn^2) - (n^3 + 3ny^2)$.

Пусть $y^3 = \alpha$, $x^3 = \beta$, $3ny^2 = \gamma$, $3n^2y = \delta$, $\alpha - \beta = \varepsilon$, $\gamma - \delta = \xi$, $\varepsilon - \xi = \eta$. Тогда 2-е положение можно написать в виде $\alpha - \beta = \varepsilon = 20$, 3-е положение в виде $\gamma - \delta = \xi = 6x$, а 4-е представить в виде $(y - n)^3 = (\alpha + \delta) - (\beta + \gamma) = (\alpha - \beta) - (\gamma - \delta)$. Но $\alpha - \beta = \varepsilon$, а $\gamma - \delta = \xi$, а $\varepsilon - \xi = \eta$. Следовательно, $(y - n)^3 = \eta$. Так как $\delta + \xi = \varepsilon$, $(y - n)^3 + 6x$

[53] Ars magna. Cap. XIII (Opera, IV, 252).

[54] Ars magna. Cap. VI (Opera, IV, 235).

$= 20$. Сравнивая с данным уравнением $x^3 + 6x = 20$, имеем $(y - n)^3 = x^3$, т.е. $y - n = x$.

«Демонстрация» следующей, 12-й главы (случай $x^3 = bx + c$) аналогична предыдущей, с тою разницей, что $x = y + n$, а не $y - n$.

Итак, берут два куба y^3 и n^3, удовлетворяющие условиям $y^3 + n^3 = c$ и $3yn = b$.

$3xyn = bx$.

Кардано доказывает, что $3xyn = 3yn^2 + 3ny^2$, или, что то же, $xyn = yn^2 + 3ny^2$.

$xyn = ynx$,

$nx = n^2 + ny$,

$ynx = y(n^2 + ny)$,

$ynx = y(n^2 + ny)$,

Следовательно, $xyn = yn^2 + ny^2$. И таким образом $3yn^2 + 3ny^2 = bx$. Если прибавить к $3yn^2 + 3ny^2$ сумму кубов $n^3 + y^3$, получится полный куб $(y + n)^3$.

Кардано доказывает, что кубы $(m + n)^3$ и $(m - n)^3$ удовлетворяют уравнениям $(m + n)^3 + c = b(m + n)$ и $(m - n)^3 + c = b(m - n)$ при тех же значениях b и c, что и раньше.

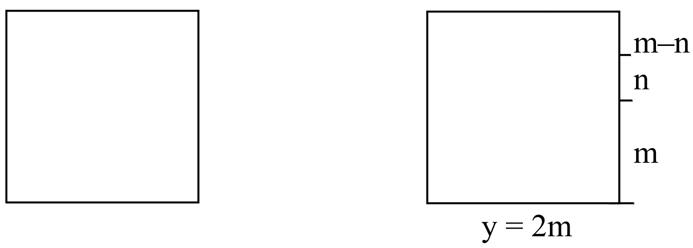
Сначала о кубе $(m + n)^3$. Как сказано, $b = 3m^2 + n^2$. Эта величина превышает квадрат $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$ на $2m^2 - 2mn = 2m(m - n) = y(m - n)$. Таким образом, можно написать:

$$(m + n)^2 = (3m^2 + n^2) - 2m(m - n),$$

$$(m + n)^3 = (m + n)[(3m^2 + n^2) - 2m(m - n)].$$

Так как $y^3 = (4m^2)y = by + c$, то $c = [4m^2 - (3m^2 + n^2)]y$ или $c = 2m(m^2 - n^2) = 2m(m + n)(m - n)$. Складывая с $(m+n)^3$, имеем $3yn^2 + 3ny^2 + n^3 + y^3$. Здесь: $3yn^2 + 3ny^2 = bx$, $n^2 + y^3 = c$. Следовательно, $(y + n)^3 = bx + c$. Сравнивая с данным уравнением $x^3 = bx + c$, имеем $(y + n)^3 = x^3$. Откуда $x = y + n$.

Остается случай $x^3 + c = bx$, разбираемый в главе XIII. Кардано сначала доказывает возможность замены его $y^3 = by + c$. Берут куб с ребром $y = 2m$. Площадь его основания $(4m^2)$ делят в отношении 3:1. Площадь $3m^2$ равновелика площади *ad* квадрата *ab,* равного *bx*. Остальная часть площади этого квадрата *ab* приравнивается n^2. Отрезок n откладывают на стороне квадрата y^2, как показано.



$(m + n)^3 + c = (m + n)[(3m^2 + n^2) - 2m(m - n)] + 2m(m + n)(m - n)$.

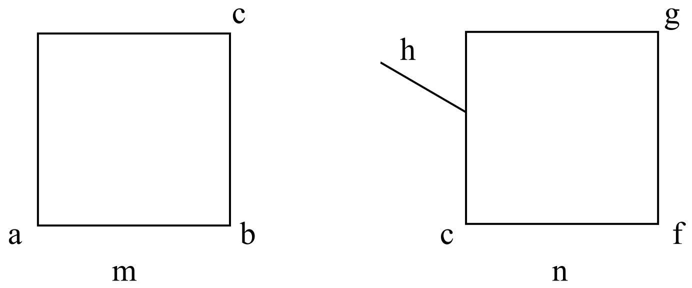
Или

$(m + n)^3 + c = (m + n)[b - y(m - n)] + y(m + n)(m - n) = (m + n)[b - y(m - n) + y(m - n] = (m + n)b$.

Аналогично для $(m - n)^3$: $b = 3m^2 + n^2$. Эта величина превышает квадрат $(m - n)^2$ на $2m(m + n) = y(m + n)$.

$c = 2m(m^2 - n^2) = y(m + n)(m - n)$. Так как $(m - n)^2 = b - y(m + n)$ и, следовательно, $(m - n)^3 = b(m - n) - y(m + n)(m - n)$, и поскольку $y(m + n)(m - n) = c$, имеем $(m - n)^3 + c = b(m - n)$.

$x^3 + c = bx$. Здесь же Кардано дает «демонстрацию» перехода от *y* к *x*. Пусть мы имеем параллелепипед с квадратным основанием *acb* и высотою *ad*, объем которого соответствует коэффициенту при *x,* т.е. *b*, и другой, *cgf*, с высотою *fh*, которая удовлетворяет условию $fh + (ad/2)^2 = (ab)^2$.



В дальнейшем для упрощения заменим, как и везде, обозначения отрезков *ab*, *ad* и т.д. буквами, а именно, *ab – m*, *cf – n*, *ad – y*, *fh – x*.

Выбираем m так, чтобы m^2y было равно свободному члену уравнения $y^3 + c = by$, а $(m^2 + y^2)$ коэффициенту при y, т.е. $y^3 + m^2y = (m^2 + y^2)y$. Для уравнения $x^3 + c = bx$ берется соответственно величина *n*. Поскольку коэффициент *b* остается одинаковым в обоих уравнениях $m^2 + y^2 = n^2 + y^2$, следовательно, *n* есть средняя пропорциональная: $y/n = n/(x + y)$. Раньше было показано, что $x/m = m/(x + y)$. Следовательно, $n^2 = y(x + y)$, $m^2 = x(x + y)$. Отсюда: $x/y = m^2/n^2$.

Итак, $xn^2 = ym^2$. Но ym^2 есть величина свободного члена *c*, а $x^2 + n^2 = y^2 + m^2$ (коэффициент *b* при неизвестных в обоих случаях одинаковый). Следовательно, *x* есть неизвестное, и от уравнения $y^3 + c = bx$ мы переходим к уравнению $x^3 + c = bx$.

Что касается отрезка *fh* (равного *x*) он отвечает условию: $(x + y/2)^2 = m^2 + (y/2)^2$. Тогда имеем: $x^2 + 2xy/2 + (y/2)^2 = m^2 + (y/2)^2$. То есть: $m^2 = x^2 + xy = x(x + y)$. Иначе говоря, *m* есть средняя пропорциональная между *x* и *x + y*. Прибавляя к обеим частям по n^2, имеем $m^2 + n^2 = x(x + y) + n^2 = n^2 + x^2 + xy$. Так как $m^2 + y^2 = n^2 + x^2$, можно написать $m^2 + n^2 = m^2 + y^2 + xy$ или $n^2 = y^2 + xy = y(x + y)$.

В главах XIV – XVI Кардано рассматривает неполные кубические уравнения типа $x^3 + ax + c = 0$, опять-таки исследуя порознь случаи: $x^3 = ax^2 + c$, $x^3 + ax^2 = c$ и $x^3 + c = ax^2$.

В уравнении $x^3 = ax^2 + c$ Кардано полагает $x = y + n$ (где $n = a/3$).[55] Тогда имеем:

$$(y + n)^3 = y^3 + 3ny^2 + 3n^2y + n^3,$$
$$a(y + n)^2 = ay^2 + 2any + an^2,$$

или, поскольку $a = 3n$,

$$a(y + n)^2 = 3ny^2 + 6n^2y + 3n^3.$$

Следовательно:

$$y^3 + 3ny^2 + 3n^2y + n^3 = 3ny^2 + 6n^2y + 3n^3 + c,$$
$$y^3 = 3n^2y + 2n^3 \text{ или } y^3 = 3(a/3)^2y + 2(a/3)^3 + c.$$

Иными словами мы получаем уравнение вида $y^3 = py + q$, решив которое и прибавляя *n*, узнаем *x*, равный $y + n$.

Подставляя значения p и q в уже известную нам формулу (см. страницу 00),[56]

---

[55] Кардано ведет рассуждение на частном примере $x^3 = 6x^2 + 100$ и, как и везде, оперирует отрезками.

[56] Так в тексте рукописи. – *А.Ш.*

$$y = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

и памятуя, что $q/2 = [2(a/3)^3 + c]/2 = (a/3)^3 + c/2$ и $p/3 = 3(a/3)2 : c = (a/3)^2$, имеем

$$y = \sqrt[3]{\frac{2\left(\frac{a}{3}\right)^3 + c}{2} + \sqrt{\left(\frac{2\left(\frac{a}{3}\right)^3 + c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{9}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{2\left(\frac{a}{3}\right)^3 + c}{2} - \sqrt{\left(\frac{2\left(\frac{a}{3}\right)^3 + c}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{9}\right)^3}}$$

Эту формулу Кардано пересказывает в виде «правила» словами так: «Прибавь куб третьей части «числа» квадратов к половине «числа» уравнения $[(2(a/3)^3 + c)/2 = (a/3)^3 + c/2]$ и все, что из этого получится, возведи в квадрат. От квадрата отними куб квадрата третьей части «числа» квадратов. Корень остатка прибавь и отними от половины суммы $[2(a/3)^3 + c]$, которую ты возводил в квадрат. Получишь бином и «вычет» (*apotome*). Сложи их кубичные корни и прибавь третью часть «числа» квадратов и все, что получится, есть значение неизвестного».

Уравнение вида $x^3 + ax^2 = c$ решается аналогично, если принять $x = y - n$ и $n = a/3$. Кардано ведет «доказательство» на частном примере $x^3 + 6x^2 = 100$, обозначая x отрезком *ab*, y – отрезком *ac* и т.д. В переводе на алгебраические обозначения, рассуждения (в обобщенном виде) сведутся к следующему.

$$y^3 = (x + n)^3 = x^3 + 3nx^2 + 3n^2x + n^3.$$

Так как $x^3 + 3nx^2 = c$ можно написать

$$y^3 = 3n^2x + n^3 + c.$$

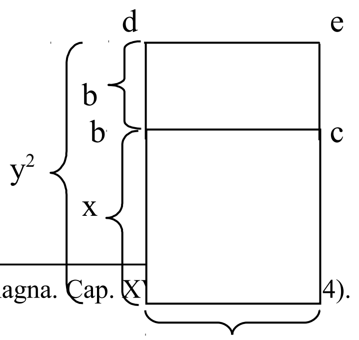
Далее: $3n^2x = 3n^2(y - n) = 3n^2y - 3n^3$.

Следовательно, $y^3 + 3n^3 = 3n^2y + n^3 + c$ или $y^3 + 2n^3 = 3n^2y + c$, $y^3 = 3n^2 + c - 2n^3$.

Кардано формулирует это в виде привила так: «Возведи третью часть «числа» квадратов в куб и удвой этот куб, и возьми разность между «числом» уравнения и этой величиной. Затем утрой квадрат третьей части «числа» квадратов, и у тебя будут: либо «вещи», которые равняются кубу и «числу» $[py = y^3 + q]$, если удвоенный куб больше «числа» уравнения $[2n^3 > c]$; либо «вещи», которые вместе с «числом» равняются кубу $[py + q = y^3]$, если удвоенный куб меньше числа уравнения; либо «вещи», равные кубу $[py = y^3]$, если разность между числами равна нулю. Затем, определив значение $[y]$, отними от него третью часть «числа» квадратов $[n]$, а остаток будет значение неизвестного $[x]$».[57]

Свое «доказательство» Кардано дополняет тем, которое «изобрел Людовико Феррари» и которое, по его словам, сходно с общим доказательством, изложенным им самим в главе VII.

Доказательство опять ведется на примере: $x^3 + 6x^2 = 100$.



[57] Ars magna. Cap. X[illegible]4).

a f

x

Площадь *adef* есть основание параллелепипеда, имеющего высоту *x*. Большая сторона основания равна y^2, меньшая – *x*. Отрезок *b* соответствует коэффициенту при x^2, то есть равен 6. Следовательно, $x = y^2 - 6$, $x^2 = (y^2 - 6)^2 = y^4 + 36 - 12y^2$. Объем тела, имеющего основания *adef*, есть $(y^2 - 6)^2\, y^2 = y^6 + 36y^2 - 12y^4 = x^2(x + 6) = y^3 + 6x^2$. Но $y^6 + 36y^2 - 12y^4 = (y^3 - 6y)^2$, а $x^3 + 6x^2 = 100$. Следовательно, $y^3 - 6y$ = v100 = 10. Определив *y*, узнаем отсюда $x = y^2 - 6$.

Отсюда общее правило: «Прими «число» квадратов за «число» вещей. Они с корнем квадратным из данного «числа» [уравнения] будут равны кубу. Найденное значение [*y*] возведи в квадрат, от которого отними «число» квадратов [*x*-ов] или «число» вещей [*y*-ов]. Остаток есть значение «вещи»».

Для случая $x^3 + c = ax^2$ Кардано дает в главе XVI[58] следующее правило: «Умножь кубический корень «числа» [$\sqrt[3]{c}$] на «число квадратов» [a], получится «число вещей» равных кубу и тому же «числу» [$py = y^3 + c$]. А найдя значение [y], возведи кубичный корень числа в квадрат [$(\sqrt[3]{c}\ )^2$] и произведение раздели на любое найденное значение [y_1 и y_2], получатся оба искомых значения [x]».

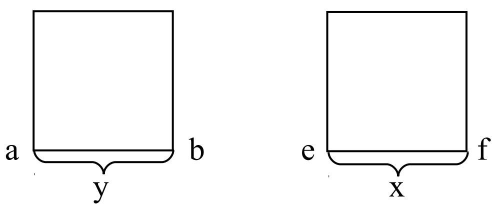
Далее следует такое указание: «Отними первое значение [y] от числа квадратов [a] и остаток умножь на сумму первого значения и одной четверти того же значения [$(a - y)(y + a/4)$]. Извлеки из произведения корень и прибавь половину того же остатка. Сумма есть искомое значение «вещи»».

Иначе говоря:

$$\sqrt{(a - y)(y + \tfrac{a}{4})} + \frac{a - y}{2} = x$$

«Демонстрация» сводится к проверке только что указанной формулы и иллюстрации ее чертежом. В данном случае мы сохраняем геометрические обозначения Кардано, не переводя их в алгебраические.

Берут параллелепипеды с квадратными основаниями *ab* = *y* и *ef* = *x*. Высоты их – *ad* и *eg*.



Суммы высот и сторон основания в обоих случаях равны *a* – коэффициенту при x^2:

(1) ab + ad = ef + eg = a.

---

[58] Ars magna. Cap. XVI (Opera, IV, 255-256).

Итак, если

$\sqrt{ad(ab+\frac{ad}{4})}+\frac{ad}{2}=ef$ и если дальше сокращенно обозначать квадратный корень $\sqrt{ad(ab+\frac{ad}{4})}$ через *tetr* (Кардано полностью пишет: *tetragonale*), то $(ef)^2 = (tetr.)^2 + (tetr.)ad + (ad/2)^2 = ad.ab + (ad/2)^2 + (tetr.)ad = ad(tetr.+ab + ad/2)$.

Иначе говоря, *ef* есть средняя пропорциональная *ad* и *tetr.+ ab + ad/2*. Так как *tetr. + ad/2 = ef*, то можно написать

$$\frac{ad}{ef}=\frac{ef}{ab+ef}.$$

Возьмем теперь равенство *ab + ad = ef + eg* и умножим обе части его на (ab + ef) (ab + ad) (ab + ef) = (ef + eg) (ab + ef). Так как $ad(ab + ef) = ef^2$, то, следовательно, $ab(ab + ef) + (ef)^2 = (ef + eg)(ef + ab)$ или $(ab)^2 + ab.ef + (ef)^2 = (ef^2) + (ab + ef)eg + (ab.ef)$, то есть $ab^2 = (ab + ef)eg$.

Таким образом, *ab* есть средняя пропорциональная между *eg* и *ab+ef*.

Из обеих пропорций

$$\frac{ad}{ef}=\frac{ef}{ab+ef} \quad \text{и} \quad \frac{eg}{ab}=\frac{ab}{ab+ef}$$

имеем

$$ad(ab + ef) = (ef)^2,$$
$$eg(ab + ef) = (ab)^2.$$

Откуда

$$\frac{eg}{ad}=\frac{(ab)^2}{(ef)^2}.$$

$eg\cdot(ef)^2 = ad\cdot(ab)^2$ есть «число» уравнения, т.е. свободный член *c*.

В случае полного кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ Кардано,[59] как и в случае неполного, не пользуясь отрицательными величинами, рассматривает отдельные виды:

$$x^3 + ax^2 + bx = c,$$
$$x^3 + bx = ax^2 + c,$$
$$x^3 + ax^2 = bx + c,$$
$$x^3 = ax^2 + bx + c,$$
$$x^3 + c = ax^2 + bx,$$
$$x^3 + bx + c = ax^2,$$
$$x^3 + ax^2 + c = bx.$$

Для каждого вида Кардано дает «правило» (regula) и «доказательство» (demonstratio). «Правило» сводится к указаниям, каким образом определять коэффициент *p* при *y* и величину свободного члена *q* в случае приведения полного уравнения к виду: $y^3 + p = c + q$. «Доказательство» есть в сущности проверка путем вычислений на конкретном примере с параллельной наглядной геометрической схемой, иллюстрирующей соотношение основных величин.

Разумеется, нет никакой необходимости подробно рассматривать каждый из перечисленных видов. Достаточно ограничиться одним примером «правила» и одним примером «доказательства».

Напомним, что при переходе от полного уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ к уравнению $y^3 + py + q = 0$ принимают $x = y – a/3$, в результате чего получается $p = b – a^2/3$ и $q = c – b\cdot a/3 + 2(a/3)^3$ или $q = c – [b\cdot a/3 – 2(a/3)^3]$. Поскольку у Кардано в

[59] Ars magna. Cap. XVII-XXIII (Opera, IV, 256-264).

правой части уравнения всегда находится один или несколько членов (которые нужно представлять себе, следовательно, как перенесенные из левой части с обратным знаком), во всех случаях, когда член с неизвестным в первой степени (bx) стоит в правой части уравнения Кардано берет для *p* не разность ($b – a^2/3$), а сумму ($b + a^2/3$). Аналогично в случае, когда *c* находится в правой части, разность $b·a/3 – 2(a/3)^3$ может быть и положительной, и отрицательной, и в свою очередь таковой же может быть разность между *c* и $b·a/3 – 2(a/3)^3$.

Сказанное становится ясным при разборе «правила» главы XVII для уравнения вида $x^3 + ax^2 + bx = c$. Напомним, что «вещь» – *x*, «число» – свободный член *c*, «число» вещи – коэффициент *x*, «число» квадратов – коэффициент x^2.

Вот что говорит Кардано[60]: «Возведи в куб третью часть «числа» квадратов [a/3], которую мы обозначаем знаком tpquad[61] [a/3]. Прибавь «число» [$c + (a/3)^3$]». Кардано определяет, таким образом, величину *q*. Вслед за тем он переходит дальше к определению коэффициента *p*: «Потом умножь «число» квадратов [b] на третью часть этого же числа [$a^2/3$], и тогда разность между этим произведением [$a^2/3$] и числом «вещей» [b] есть число «вещей» [$p = b - a^2/3$], которые нужно прибавлять к кубу [$y^3 + py$], если произведение [$a^2/3$] меньше числа «вещей» [b], либо прибавлять к «числу» [$py + c$], если произведение [$a^2/3$] больше числа «вещей» [c]».

Иначе говоря, в переводе на современный язык, если *p* – положительное, то *py* находится в левой части уравнения, если *p* отрицательное, то *py* оказывается в правой части уравнения.

«Если, стало быть, – продолжает Кардано, – разность между произведением и числом «вещей» [$b – a^2/3$] равна нулю, куб [y^3] будет равен полученному раннее «числу» [$c + (a/3)^3$]. Тогда, извлекши кубичный корень [из $c + (a/3)^3 = y^3$], вычти из этого корня [y] tpquad [$y – a/3$] и остаток будет значение неизвестного [x].

Если же новое неизвестное [positiones, т.е. py] вместе с кубом [$y^3 + py$] равны «числу» [q], умножь «число» неизвестных [$p = b – a^2/3$] на tpquad [$(b – a^2/3)a/3 = b·a/3 – a^3/9$] и это произведение прибавь к раннее полученному числу [т.е. $c + (a/3)^3$]. Тогда будешь иметь куб и раннее указанные неизвестные [$y^3 + py$] равные этому «числу» [$y^3 + py = q = (c + a^3/3^3) + (b – a^2/3)a/3$]».

Дальше Кардано рассматривает случай, когда разность $b – a^2/3$ есть отрицательная величина и, следовательно, отнимается от $c + (a/3)^3$. Кардано говорит об этом так: «Если произведение [$a^2/3$] будет больше числа «вещей» [b], умножь разность [$b – a^2/3$], которая есть число «вещей» [p] на tpquad. [a/3] и произведение [$(b – a^2/3)a/3$] вычти из раньше получившегося у тебя «числа» [$(c + (a/3)^3 – (b – a^2/3)a/3$]».

При таком вычитании может оказаться в свою очередь три случая: $c + a/3 = (b – a^2/3)a/3$, $c + a/3 > (b – a^2/3)a/3$ (т.е. разность положительная) и $c + a/3 < (b – a^2/3)a/3$ (разность – отрицательная). Об этих случаях Кардано говорит так: «Ежели ничего не останется [$q = 0$], то у тебя будет куб [y^3], равный числу «вещей» [py]. Вот почему по сокращении, ты получишь квадрат, равный «числу» [$y^2 = p$]. Неизвестное [y] будет квадратным R «числа» вещей [$\sqrt{p}$]. Вычти из него tpquad. [$y – a/3$] и остаток будет неизвестное [x].

Если после вычитания произведения «числа» вещей [$p = b – a^2/3$] на tpquad. [a/3] из получившегося «числа» [$c + (a/3)^3$] что-нибудь останется [т.е если

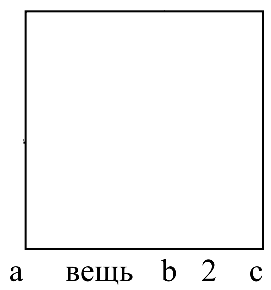
[60] Ars magna. Cap. XVII (Opera, IV, 256-258). В прямых скобках дан перевод на современную символику.

[61] Т.е. tertia pars quadrati – третья часть квадрата.

разность $(c + (a/3)^3) – (b – (a^2/3)a/3$ будет положительная], то это число [q] вместе с получившимся «числом» неизвестных [py] будет равно кубу [т.е. $y^3 = py + q$]. Определив неизвестное [y], вычти tpquad. [a/3] и остаток есть искомое неизвестное [$y – a/3 = x$]. Но если произведение «числа» вещей [$p = b\ a^2/3$] на tpquad. [a/3] оказалось бы больше, чем получившееся «число» [$c + (a/3)^3$], то тогда разность [$c + (a/3)^3) – (b – (a^2/3)a/3$] есть число [q], которое с кубом [y^3] равняется тем же неизвестным [$y^3 + q = py$]. Следовательно, определив неизвестное [y], вычти tpquad. [a/3] и остаток есть значение неизвестного [$y – a/3 = x$]».

Мы постарались возможно точнее передать текст Кардано на русском языке и, вместе с тем, ввести возможно больше пояснений в прямых скобках, переводя словесно формулировки на язык современной символики и формул. Пусть читатель попробует теперь перечитать текст Кардано, не глядя на то, что заключено в прямые скобки, и он может составить себе довольно точное представление о том, что представлял собою язык алгебры XVI века; на всем протяжении приведенного отрывка встречаются только два условных сокращения: **R** – соответствующее знаку радикала и **tpquad.** – означающее треть коэффициента при x^2.

Посмотрим теперь на примере другой главы, что представляет собою карданово «доказательство», или «демонстрация».[62] Разбирается случай: $x^3 + bx = ax^2 + c$. Кардано берет пример $x^3 + 33x = 6x^2 + 100$ и ссылается на чертеж, «тождественный» чертежу предыдущей главы. Мы воспроизводим его на рис. 00, [63] меняя коэффициент 33 при x применительно к разбираемому случаю (в предыдущей главе разбирался случай $x^3 + 6x^2 + 20x = 100$).



Ребро *ac* куба *x* делят на два отрезка: $ab = y$ и $bc = 1/3$ коэффициента при x^2, который в данном примере = 6, т.е. $bc = 2$. Для ясности изложения мы в дальнейшем вместо обозначений отрезков *ab*, *bc* и *ac* (как это имеет место быть у самого Кардано) будем пользоваться обозначениями *y*, *n (= 2)* и *x*.

Итак, в уравнении $x^3 + 33x = 6x^2 + 100$ заменяем *x* через y + 2. Тогда имеем:

$$(y + 2)^3 + 33(y + 2) = 6(y + 2)^2 + 100.$$
$$(y + 2)^3 = y^3 + 6y^2 + 12y + 8$$
$$33(y + 2) = 33y + 66$$
$$6(y + 2)^2 = 6y^2 + 24y + 24$$

Следовательно:

$$(y^3 + 6y^2 + 12y + 8) + (33y + 66) = (6y^2 + 24y + 24) + 100$$

Или:

$$y^3 + 6y^2 + 45y + 74 = 6y^2 + 24y + 124$$

Или, наконец,

$$y^3 + 21y = 50$$

[62] <…>

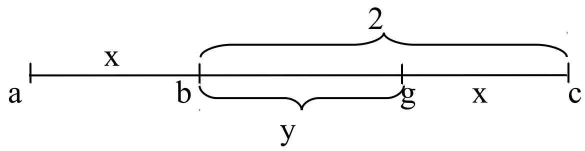
[63] Так в тексте рукописи.

Определив отсюда *y*, получают *x*, вычитая двойку.

Так можно было бы передать на общепринятом теперь алгебраическом языке существо пространного словесного изложения Кардано.

В той же главе приводится и другое «доказательство», принадлежащее, по словам Кардано, его ученику Людовико Феррари, более ясно и наглядно, по его же словам, показывающее существо операций.

За основу берется уравнение $x^3 + 100x = 6x^2 + 10$. В тексте имеется графическая схема, воспроизведенная нами на рис. 00,[64] с введением обозначений *x* и *y*. Точно так же и в этом случае мы заменяем обозначения отрезков *ab*, *bg* и т.д., которыми пользуется Кардано, обозначениями *x*, *y* и т.д. Исследуем куб разности *x* и *n* (одной трети коэффициента при x^2, равного 6) и сравним его с данным уравнением.



$$(x - n)^3 = (x + 3n^2x) - (3nx^2 + n^3).$$

Так как n = 2, имеем:

$$(x - 2)^3 = (x + 12x) - (6x^2 + 8).$$

Сравниваем эту разность с уравнением

$$x^3 + 100x = 6x^2 + 10.$$

Вместо $x + 12x$ пишем $x^3 + 100x - 88x$, а вместо $6x^2 + 8$ пишем $6x^2 + 10 - 2$, или, что тоже, $x^3 + 100x - 2$. Получаем $(x - 2)^3 = (x^3 + 100x - 88) - (x^3 + 100x - 2)$ или $(x - 2)^3 = 2 - 88x$.

Если положить $x = 2 - y$, получим $y^3 + 88y = 174$. Определив y, узнаем x.

5

Среди посмертно напечатанных трудов, вошедших в десятитомное лионское издание «Сочинений» Кардано, находится весьма замечательное произведение, озаглавленное «De ludo aleae» – в дословном переводе «Об игре в кости», или в более свободном, но более отвечающем содержанию, переводе: «Об азартных играх», так как автор касается в нем не только игры в кости, но и игры в карты. Такой перевод оправдан, тем более что самое слово азарт происходит от арабского alzahr, кость.

Сочинение, видимо, относится ко времени около 1564 г. и было не единственным, написанным Кардано на те же темы.

Сочинения эти до нас не дошли – возможно, были уничтожены самим Кардано, который признается, что два раза уничтожал большое количество написанных им книг: один раз в 1538 г., когда он сжег около 9 книг, которые признал пустыми, а другой раз – после ареста, в 1573 г., когда он сжег 120 книг, сохранив из них, однако, кое-что «полезное».[65]

«De ludo aleae» задумано как руководство для игрока, содержит предупреждения, касающиеся шулерских костей, крапленых карт и других подобных мошенничеств. Автор, правда, не ограничивается этим: на основании книги Челио Кальканьини «Об играх в астрагалы, тессары и камешки по обычаям

[64] Так в тексте рукописи.
[65] *Кардано Дж.* О моей жизни. Гл. XLV. С. 204.

древних»[66] он анализирует игры, вышедшие из употребления в его время. Но самое главное, и это особенно важно для нас, труд Кардано – первый трактат по теории вероятностей.

Сочинение увидело свет столетием позднее, чем было написано, – в 1663 г.[67] К тому времени уже был написан дошедший до нас отрывок сочинения Галилея об игре в кости (около 1600 г.).[68] В 1654 г. Паскаль и Ферма обменялись уже своей корреспонденцией по вопросам теории вероятностей. Христиан Гюйгенс уже напечатал свою книгу «De ratiociniis in ludo aleae» («О расчетах в азартной игре», 1657).

На сочинение Кардано обратили внимание только историки в XIX в. Тодгёнтер (1865) и М. Кантор (1880), но не исследовали, однако, его во всех подробностях, и многие места остались не разъясненными. Предметом специального исследования книга «De ludo aleae» стала лишь в самое последнее время.[69]

Кардано очень много морализировал по поводу азартных игр. Свое сочинение он оправдывал тем, что медик должен изучать даже неизлечимые болезни, а философ не может не рассуждать о пороках. Но не менее справедливым остается, что сам Кардано в разные периоды своей жизни был азартнейшим игроком. В уже не раз цитированной автобиографии есть колоритный, очень типичный для нравов XVI века рассказ о том, как в Венеции, «под праздник Рождества Богородицы» Кардано проиграл много денег и только потом заметил, что карты были крапленые. Тогда с кинжалом в руках маститый ученый набросился на мошенника-хозяина, нанес ему рану в лицо, забрал не только свои собственные, но и его, хозяина, деньги и, угрожая слугам, приказал открыть двери на улицу. Из сочинения «De ludo aleae» выясняется, что означенный шулер был ни кто иной, как знатный сенатор Томазо Лецио. В автобиографии повествуется далее, что Кардано, опасаясь преследований со стороны властей за оскорбление сенатора, решил скрыться, и что ночью, в потемках, он нечаянно упал в море. Ему помогли спастись, но... к крайнему своему удивлению в лодке он нашел того самого злосчастного сенатора с забинтованным лицом, с которым он недавно сражался. Видимо, и сенатор опасался огласки. Во всяком случае, Кардано говорит: «Он сам предложил мне надеть матросское платье, в котором я затем и доехал вместе с ним до Падуи».[70]

В другом месте Кардано рассказывает, как он в 1542 г. играл ежедневно на деньги в шахматы с миланским патрицием Антонио Викомеркато и каждый день выигрывал у него по дукату или больше. К концу лета хозяин взмолился, прося перестать с ним играть, и взял с Кардано клятву, что тот больше не будет приходить к нему с этой целью. Что же касается самого Кардано, выигрыши, по его собственным словам, избаловали его настолько, что он «в течение нескольких месяцев не заботился ни о медицинской практике, ни об изыскании иных источников дохода, кроме только что упомянутого, пренебрегал мнением о себе других и забросил занятия наукой».[71]

---

[66] *Celio Calcagnini*. De talorum ac tesserarum et calculorum ludis, ex more veterum (вошло в «Thesaurus graecarum antiquitatum» Грэвия, или Гроновия).
[67] Liber de ludo aleae – Opera. T. I. Pp. 262-276.
[68] *Galileo Galilei*. Considerazione sopra il gineo dei dadi – Opere. Ed. nazionale. Vol. 8. Firenze, 1898.
[69] См. *Oystein Ore*. Cardano the gambling scholar. With a translation from the Latin of Cardano's *Book on games of chance*, by S.H. Gould. Princeton, 1953.
[70] *Кардано Дж*. О моей жизни. Гл. XXX. С. 92-93.
[71] *Кардано Дж*. О моей жизни. Гл. XXXVII. С. 136.

В дальнейшем мы ограничимся разбором лишь некоторых глав сочинения Кардано, а именно тех, которые имеют прямое отношение к математической теории вероятности, опуская, однако, те из них, которые потребовали бы слишком много разъяснений, касающихся специальных правил карточной игры того времени или специальных правил игры в кости. Из карточных игр Кардано уделил больше всего внимания т.н. *приме* (primero).

Предметом нашего рассмотрения явятся, следовательно, лишь главы IX, XII, XIV, XV и XXXII.

Сначала несколько слов о терминологии. Число возможных случаев Кардано обозначает термином *circuitus* или *revolutio*, т.е. полный оборот, обращение, цикл. Другим существенным понятием для Кардано является то, что он называет *aequalitas*, дословно: равенство. Имеется в виду равенство шансов, или равенство условий, в которые поставлены игроки. Такое «равенство» соответствует половине числа всех возможных случаев: если один игрок делает, например, ставку на выпадение четного, а другой – нечетного числа очков, число шансов выиграть и у того и у другого одинаковы. Кардано нередко предпочитает пользоваться понятием именно *aequalitas*, а не *circuitus*, и определять вероятность не по отношению к числу всех возможных случаев, а по отношению к вдвое меньшей величине, т.е. к числу одних лишь благоприятных случаев (при равных условиях, в которые поставлены игроки).

Глава IX посвящена случаям, когда бросают всего одну игральную (шестигранную) кость. Граней – шесть; следовательно, при шестикратном бросании должны были бы выпадать по одному разу все шесть возможных чисел. «Однако, – говорит Кардано, – поскольку некоторые из них повторяются, постольку этого по необходимости не бывает». Половина числа 6 есть, как мы уже сказали, то, что Кардано называет *aequalitas*, равенством шансов, ибо, говорит он, одинаково вероятно, что при трех бросаниях кости выпадает определенное число, или при одном бросании выпадет одно из трех чисел (например, одно из четных или же одно из нечетных). Кардано рассуждает, очевидно, так: вероятность выпадения определенного числа очков равна 1/6; при 2 бросаниях кости она равна $2 \cdot 1/6 = 1/3$; при 3 бросаниях – $3 \cdot 1/6 = 1/2$. Из рассуждения Кардано получается, что при 6 бросаниях определенное число очков выпадало бы с необходимостью, а при еще большем числе бросаний вероятность превышала бы 1.

Кардано заканчивает главу замечанием, что сказанное очень важно для понимания дальнейшего, хотя в практическом отношении почти ничего еще не дает. Он, очевидно, подразумевал, что в его время не существовало игр с *одной* только костью. Примечательно, что Кардано начинает свое исследование с простейшего, чисто теоретического случая.

После отступления, посвященного Аристотелю (глава X), Кардано рассматривает в главе XI случаи с бросанием двух костей. Возможно 6 случаев, когда на обеих костях выпадает одно и то же число: единица и единица, двойка и двойка и т.д. Случаев, когда выпадают неодинаковые числа, возможно 15, или, если принять во внимание порядок, то вдвое больше, т.е. 30. Всего, следовательно, имеем 36 возможных случаев.

Исходя из такого подсчета возможных случаев, Кардано сравнивает вероятность выпадения одинакового и неодинакового числа очков на обеих костях, например, единицы и единицы или двойки и двойки. При этом он исходит из указанного выше понятия *aequalitas*, равенства шансов, ставя вопрос так: при каком числе бросаний становится одинаково вероятными *да* и *нет.* Сочетание единицы с единицей есть, по Кардано, один из 36 возможных случаев. Выпадение единицы и двойки – вдвое чаще, так как имеет место при (1, 2) и (2, 1). Мы бы сказали, что там вероятность p = 1/36, а здесь = 2/36 = 1/18. Но Кардано формулирует это применительно к числу случаев, когда достигается *aequalitas*: для единицы и единицы оно равно 18 (*aequalitas*), для единицы и двойки – 9 («половине *aequalitas*»). «Если же они выпадут чаще, или реже, – это дело удачи (fortunae)».

Как известно, в середине XVII в. страстный игрок кавалер де Мере поставил аналогичную задачу в обобщенном виде: определить вероятность, при которой бросая *n* раз 2 кости, получается хотя бы один раз по 6 очков на той и другой кости одновременно. Ответ определяется формулой $\frac{36^n-35}{36^n}$.

Далее Кардано переходит к вероятности выпадения одного определенного числа, например, единицы, двойки и т.д., на одной из двух костей. Единица может фигурировать в 11 различных случаях из 36 возможных. На помещенной ниже таблице таких случаев показано 12.

1 – 1	1 – 1
1 – 2	2 – 1
1 – 3	3 – 1
1 – 4	4 – 1
1 – 5	5 – 1
1 – 6	6 – 1,

но случаи в верхних строках одинаковы и считаются за один. Это, указывает Кардано, несколько уклоняется от половины *aequalitas* (11 случаев вместо 9).

При двукратном бросании двух костей возможность выпадения единицы подряд оба раза лежит в пределах между 1/4 и 1/6 от *aequalitas*. Кардано не говорит почему. Если вспомнить, что *aequalitas* равна половине всех возможных случаев и границы вероятности *p* должны, следовательно, быть в данном случае 1/8 и 1/12, можно признать величину, указываемую Кардано, правильной в самом грубом приближении:

$$p = (11/36)^2 = 1/10,7.$$

Возможность выбросить единицу три раза подряд, по Кардано, лежит «весьма далеко за пределами <неразб.>». Это значит, что нужно бросать кости во много большее число раз, чем 36, чтобы получилась подобная последовательность. Ибо, добавляет Кардано, «такая последовательность связана с рядом циклов, а обманчивые вариации не зависят от такого ряда (successio illa ex ordine est, quod autem fallat praeter ordinem)». Иначе говоря, некоторые закономерности обнаруживаются лишь при многократном повторении.

Кардано продолжает: «Следование двух одинаковых случаев одного за другим, например, повторение благоприятного числа дважды, получается при перемножении циклов (accedit ex circuitibus invicem ductis)». Например, если число бросаний – 3600, то равенство шансов, при которых может выпасть или не выпасть определенное число очков дважды, есть 1800. Такой цикл, говорит Кардано, обманывает только потому, что в пределах одного цикла одно и то же число очков может повторяться и дважды и трижды. «Итак, это познание предположительное (secundum coniecturam) и приближенное», – заключает

Кардано. «И здесь нет строгого правила (ratio recta). Тем не менее, случается, что при большом числе циклов результат получается весьма близкий к ожидаемому (contingit quod in multis circuitibus res succedit proxima coniecturae)». Нельзя не видеть в последних словах предвосхищение закона больших чисел.

В главе XII Кардано переходит к анализу случаев при бросании 3 костей и, прежде всего, к их подсчету. Случаев, когда одно и то же число очков выпадает на всех 3 костях, – 6. Если на 2 костях число очков одинаковое, а на третьей – другое, то таких случаев насчитывается 30. Принимая во внимание порядок по 3 перестановки, имеем 90. Если, наконец, все числа очков разные, то таких случаев 20, и опять-таки, принимая во внимание перестановки, 6 Ч 20 = 120. Таким образом, для 3 костей имеем в общей сложности 6 + 90 + 120 = 216 случаев. «Равенство шансов» (*aequalitas*) соответствует половине: 108.

Следовательно, заключает Кардано, триплет (одинаковое число очков на всех трех костях) соответствует 1/108 равенства (одному случаю из 108). Дублету (одинаковому числу очков на двух костях при другом числе на третьей) соответствует 1/36 равенства. Следовательно, заключает Кардано, дублет будет появляться в 3 раза чаще, чем триплет.

Дальше Кардано переходит к подсчету числа случаев, когда выпадает *пара* каких-либо разных чисел, например, единицы и двойки. Возможны три сочетания этой пары с единицей: (1, *1, 2*), (*1, 2,* 1), (*2, 1,* 1). Столько же с двойкой (2, *1, 2*), (*1, 2,* 2), (2, *2, 1*). Следовательно, всего имеем 6 случаев. Далее возможны сочетания той же пары с 4 другими числами (3, 4, 5, 6), для каждого по 6 случаев. Например, для тройки: (*1, 2,* 3), (*1,* 3, *2*), (3, *1, 2*), (*2, 1,* 3), (*2,* 3, *1*) и (3, *2, 1*). Всего получается 6 + (6 Ч 4) = 30 случаев. Следовательно, их вероятность выпадения единицы и двойки = 30/216 = 5/36, «почти 1/6».[72]

В заключительной части главы XII Кардано сравнивает, с одной стороны, число вероятных случаев для определенной тройки чисел (например, 1, 2, 3) при трех костях и, с другой, – число вероятных случаев выпадения определенного числа очков на одной из двух костях, приходя к выводу, что там и здесь вероятность одинаковая. Он рассуждает так: для выпадения того или иного числа очков на каждой из 3 костей отдельно взятой имеем величину равную 1/3 «равенства» (вдвое большую величины вероятности 1/6). Следовательно, если бросать все три кости вместе получается равенство шансов (3·1/3 = 1). Такое же соотношение получается при троекратном бросании двух костей для выпадения определенного числа очков на одной из них: для одного бросания костей величина равна 12/36 (= 1/3) «равенства»; при троекратном бросании она становится равной 1.

Глава XIV посвящена повторяемости числа очков (de punctis geminatis). Кардано напоминает, что при двух костях каждое из шести чисел имеет вероятность 11/36. Дальнейшим рассуждениям предпошлем следующую таблицу.

1 – 1	2 – 2	3 – 3	4 – 4	5 – 5	6 – 6	
1 – 2	2 – 3	3 – 4	4 – 5	5 – 6		
1 – 3	2 – 4	3 – 5	4 – 6	6 – 5		
1 – 4	2 – 5	3 – 6	5 – 4			
1 – 5	2 – 6	4 – 3	6 – 4			
1 – 6	3 – 2	5 – 3				

[72] Кардано, как обычно, ведет расчет не применительно к числу всех возможных случаев, а к половинной величине (*aequalitas*), приходя к тому же соотношению 15 : 108 = 5 : 36.

2 – 1 3 – 1 4 – 1 5 – 1 6 – 1	4 – 2 5 – 2 6 – 2	6 – 3				
11	9	7	5	3	1	Всего 36 случаев

Как уже было сказано, имеется 11 случаев из 36, когда выпадает единица (то же – для двойки, тройки и т. д.). Однако вероятность выпадения *либо единицы, либо двойки* не будет равна 2·11/36, а 20/36, поскольку часть случаев, в которых фигурирует двойка, уже учтена в первом столбце. Следовательно, к 11 случаям первого столбца нужно добавлять 9 случаев второго столбца. Вероятность выпадения одного из трех чисел (*либо единицы, либо двойки, либо тройки*) будет 27/36 или 3/4 (т.е. 11 + 9 + 7 случаев из 36) и т.д.

Следовательно, заключает Кардано по поводу последнего примера, при 4 бросаниях 2 костей и ставке на выпадение либо единицы, либо двойки, либо тройки, выигрывают 3 раза и проигрывают 1 раз. «Вот почему, если кто-нибудь будет ставить 3 дуката на выпадение либо единицы, либо двойки, либо тройки, а партнер – один дукат, играя только на одно определенное число очков, то первый выиграет за 3 раза 3 дуката, а второй выиграет за один раз те же 3 дуката. Следовательно, при цикле из 4 бросаний всегда происходит выравнивание и, следовательно, таково правило для состязания на равных условиях. Стало быть, если один из обоих будет ставить больше, он будет состязаться в неравных условиях и с потерей для себя, а если он будет ставить меньше, то с прибытком». Аналогично рассуждает Кардано применительно к ставкам на 4 числа, когда отношение равно 32:4.

При ставке на *комбинацию* единицы и двойки соотношение равно 2 : 32, при ставке на дукат (единица и единица и т.п.) оно равно 1 : 35.

За этим следует разбор случаев при бросании трех костей. Здесь получаются следующие соотношения.

Числа очков на трех костях	Число благоприятных случаев
Единица	91
Либо единица, либо двойка	91 + 61 = 152
Либо единица, либо двойка, либо тройка	152 + 37 = 189
Либо единица, либо двойка, либо тройка, либо четверка	189 + 19 = 208
Либо единица, либо двойка, либо тройка, либо четверка, либо пятерка	208 + 7 = 215
Все шесть возможных чисел	215 + 1 = 216

При двух костях, как мы видели, числа благоприятных случаев получались путем последовательного суммирования ряда 11, 9, 7, 5, 3 и 1, образующего арифметическую прогрессию. Здесь же, как отмечает Кардано, такую прогрессию образуют разности между числами 91, 61, 37, 19, 7, 1.

Числа	Первые разности	Вторые разности
91		
	30	
61		6
	24	
37		6
	18	
19		6
	12	
7		6
	6	
1		

Сказанное Кардано поясняет на анализе случаев, когда выбрасывается единица. Отношение между благоприятными и неблагоприятными случаями равно 91 : 125, т.е. приблизительно 18 : 25, несколько больше, чем 3 : 4. Следовательно, делающий ставку на неблагоприятный случай, после 7-ми кратного метания 3 костей выиграет дукат (ставя каждый раз, как и его противник, по дукату), а если он будет ставить каждый раз по 4 дуката, то выиграет на три дуката больше.

Отсюда – общее правило: надо взять весь цикл (*circuitus*), число благоприятных и неблагоприятных случаев в нем, и в пропорции этих благоприятных и неблагоприятных случаев делать ставки, ибо тогда состязание происходит на равных условиях.

После этого в той же XIV главе Кардано разбирает вероятность повторного появления подряд определенных чисел. Он несколько раз принимается за решение этой задачи. Мы проследим шаг за шагом эти попытки. Сначала Кардано говорит, что числа благоприятных и неблагоприятных случаев при одном бросании следует возводить в квадрат, в куб и т. д. Следовательно, из соотношения 91 и 125 (справедливого для появления определенного числа при одном бросании) получается для появления его же два и три раза подряд: 91^2 и 125^2 или 8281 и 15625 – почти 1 : 2; 91^3 и 125^3 или 753571 и 1953125 – приблизительно 2 : 5. Правильные значения, как известно, будут $p_1 = 0{,}18$ (а не 0,33) и $p_2 = 0{,}07$ (а не 0,28).

Все это рассуждение Кардано подвергает, однако, сомнению в следующей, XV главе. Ведь при равном соотношении (например, 3 : 3) получалось бы равное соотношение и между квадратами ($3^2 : 3^2$), и между кубами ($3^3 : 3^3$),что «совершенно нелепо» (absurdissimum). Это значило бы также, что если для двух костей при однократном бросании соотношение между вероятностями выпадения четных и нечетных чисел = 1 : 1, то и при троекратном бросании оно останется равным 1 : 1.

Пытаясь найти выход, Кардано видимо берет за исходную точку троекратное бросание и исследует вероятность повторения одинаково вероятных событий, а именно последовательного выпадения одних четных или нечетных чисел. Неправильно полагая, что в этом случае соотношение числа благоприятных или неблагоприятных случаев для выпадения одних лишь четных три раза подряд равняется 1 : 8 (вместо 1 : 7), Кардано, видимо, на этой основе пытался вывести общую формулу, но вместо правильной $(2^n - 1) : 1$, берет формулу $(n^2 - 1) : 1$, которая дает результат одинаковый с первой, верной, лишь в случае $n = 2$.

Для двукратного повторения Кардано получает, следовательно, соотношение 3 : 1, для троекратного 8 : 1, для четырехкратного 15 : 1, для пятикратного 125 : 5 и т.д. Но здесь же Кардано вводит поправку: для больших чисел формула не годится. Для 20 он берет уже формулу $(n^3 - 1) : 1$, т.е. соотношение 7999 : 1. «Едва можно поверить, – говорит по этому поводу Кардано, – что при 7999-кратном бросании костей человек может выбросить четное число 20 раз подряд. Однако мы это доказали. Ведь если при первых 8000 правило и может оказаться нарушенным, то при бесконечно большом числе бросаний это должно происходить почти с необходимостью. Ибо величина цикла есть продолжительность времени, которая выводит наружу все формы (magnitudo enim circuitus est temporis longitudo quae omnes formis ostendit)». Здесь опять Кардано подходит к идее закона больших чисел.

После всех этих попыток Кардано принимается за рассмотрение вопроса заново, выбирая в качестве примера последовательное выпадение (два раза к ряду) трех чисел (либо единицы, либо двойки, либо тройки) на 2 костях. Здесь соотношение есть 3 : 1. Для более ясной иллюстрации Кардано берет абстрактный идеальный случай: астрагал с 4 гранями, на трех из которых нанесены нечетные числа, а на одной – четное. Нечетные он обозначает буквами *a*, *b*, *c*, четное – буквой *d*. Получается 16 сочетаний, из которых в 9 случаях фигурируют только нечетные числа, а в 7 случаях фигурирует четное *d*:

aa	ba	ca	*da*
ab	bb	cb	*db*
ac	bc	cc	*dc*
ad	*bd*	*cd*	*dd*

При теле с 3 гранями, из которых одна – с четным числом, имеем:

aa	ba	*ca*
ab	bb	*cb*
ac	*bc*	*cc*

т.е. в 4 случаях получаем одни нечетные числа, в 5 случаях – четное *c*.

При теле с 5 гранями, из которых на одной обозначено четное число, получается соотношение 16 : 9.

Общее правило таково: число граней и число благоприятных случаев возводят в квадрат, вычитают второе число из первого и сравнивают второе число с получившимся остатком. Так, например, в случае игральной кости с 6 гранями и необходимости определить вероятность выпадения либо единицы, либо двойки, имеем $6^2 - 2^2 = 32$, т.е. соотношение 32 : 4 или 8 : 1.

Затем Кардано рассматривает случаи троекратного последовательного повторения чисел при бросании одной кости. В этих случаях следует возводить в куб. Для игральной кости с 6 гранями имеем, следовательно, $6^3 = 216$. Если опять требуется определить вероятность выпадания либо единицы, либо двойки, имеем $6^3 - 2^3 = 208$. Таким образом, Кардано был на пути к открытию общей формулы $p_n = p^n$.

Для двух костей рассуждение аналогичное. Пусть нужно определить вероятность троекратного последовательного выпадения либо единицы, либо двойки, либо тройки при бросании двух костей. Полный цикл (circuitus), как мы уже знаем, составляет 36 случаев, из них 27 благоприятных. $36^3 = 46656$; $27^3 = 19683$; $46656 - 19683 = 26973$. Имеем, следовательно, соотношение 26973 : 19683, которое > 4 : 3 и < 3 : 2. Для трех костей число возможных случаев 216 и 91 –

число благоприятных случаев. $91^3 = 753571$; $216^3 - 91^3 = 9324125$. Соотношение, следовательно, равно 9324125 : 753571, т.е. немногим более чем 12 : 1.

Очень интересны, наконец, соображения Кардано в заключительной главе сочинения, где он опять подходит к закону больших чисел, рассматривая вопросы математического ожидания переменной вероятности. Кардано пишет: «Вообще же следует заметить, что и в костях, и в астрагалах, число всех возможных случаев для одной кости или для одного астрагала определяется числом бросаний, а это последнее определяется числом поверхностей (шести – в костях, четырех – в астрагале). И точно так же обстоит дело при бросании любого числа костей или астрагалов. Следовательно, если разделить общее число очков на число граней или поверхностей, получится среднее число (numerus mediocris)»

Кардано берет пример с 6 костями, каждая из которых имеет пять пустых граней, а на шестой одна имеет одно очко, другая – два и т.д. вплоть до шести. Общее число очков – 21. Если разделить его на число граней, т.е. 6, получается для одного бросания среднее число $3\frac{1}{2}$. «Однако, – оговаривает Кардано, – это не есть генеральное правило, так как при большем числе бросаний среднее число оказывается даже меньше трех, по причине избытка (excessus) больших чисел, которые должны приниматься в расчет».

Комментатор[73] по поводу этого места замечает, что Кардано имел полную возможность неоднократно наблюдать применение подобных костей со слепыми гранями: в его времена и даже позднее они были весьма распространены и ими пользовались на ярмарках для своего рода лотереи: выбросивший «пустышки» или какое-либо минимальное число очков терял свой взнос, при несколько более высоком числе очков он получал его обратно, а для еще больших чисел он мог получать выигрыш, достигавший (для 21 очка) иногда 90-кратной величины ставки. Вероятность такого выигрыша была, однако, практически равной нулю, а именно:

$$P = \left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{1}{46656}.$$

Из настоящего изложения видно, что Кардано, вне всякого сомнения, использовал в своем трактате практические наблюдения игроков, включая собственные. Но еще более интересно, что, решая общие проблемы, Кардано производил «мысленные эксперименты» – анализировал случаи с бросанием одной лишь кости (таких игр не было), воображал тела с тремя, четырьмя и пятью гранями и т.д.

Публикация М.В. Зубовой

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Василий Павлович Зубов предполагал написать о творчестве блистательного ученого эпохи Возрождения Джироламо Кардано книгу. По замыслу автор хотел сделать всё возможное, чтобы книга давала читателю точное представление о трудах ученого в области математики, а при помощи комментариев и подстрочных примечаний установить точную форму и смысл трудных мест подлинника, сопровождаемых не всегда понятными для нас

[73] *Oystein Ore*. Op. cit. P. 172.

рассуждениями. Однако работа осталась незаконченной и опубликована лишь в 2010 году в виде статьи [74], то есть спустя почти полстолетия после её написания.

Содержание этой статьи не только не устарело, но сохраняет и сегодня немалое научно-методологическое значение. Задача, которую поставил Зубов в этой работе, внешне проста: познакомить читателей как с жизнью и творчеством Кардано (1501–1576), открывшего метод решения кубических уравнений, так и с жизнью другого ученого, – Никколо Тарталья (1499–1557) – оспаривавшего приоритет в решении таких уравнений. История науки хранит много подобных споров о «приоритетах» и «заимствованиях». Считается, что Кавальери обокрал Кеплера и Ферма, Ньютон – Барроу, Лейбниц – Ньютона, братья Бернулли – друг друга, Лопиталь – Бернулли и т.д. Вот и в этой работе немало страниц посвящено рассмотрению ожесточенных споров о приоритете между двумя прославленными именами того времени, между Кардано и Тарталья.

В наши дни ученые, сделав какие-либо открытия, стремятся быстрее донести их до научного мира, тогда как в те далекие от нас времена было иначе. Сделав открытия, ученые мужи стремились как можно дольше оставаться их единственными обладателями. В частности, Тарталья знал, что дальность полета артиллерийского снаряда, выпущенного из орудия с заданной скоростью, будет максимальная при угле $\alpha = 45^0$. Открытие это он хранил в тайне и решился поведать о нём под большим секретом только герцогу Урбинскому, чтобы он мог им воспользоваться для эффективного ведения огня при возможном нападении турецкого флота на Венецию.

Работа Зубова о Кардано может рассматриваться, как одна из первых обстоятельных попыток рассказать на русском языке о том, как рождался метод решения кубических уравнений. До ее написания (1958) имелись, конечно, отдельные статьи, связанные с творчеством Кардано, с научной жизнью того времени [75]. Но они с большей или меньшей подробностью исследовали собственно жизнь Кардано, его отношения с ближайшим научным окружением, различные аспекты его творчества, не всегда связанные с математикой. Из зарубежных изданий отмечу книгу *Oystein Ore* “CARDANO the Gambling Scholar” (1953), хранящуюся в обширной личной библиотеке Зубова. Однако и в ней нет анализа математических работ Кардано, автор рассматривает лишь его роль в разработке теории азартных игр.

Спустя почти 20 лет после смерти Зубова в издательстве «Знание» вышла книга *Гутера Р.С.* и *Полунова Ю.Л.* «Джироламо Кардано» (1980), в которой Кардано представлен как разносторонний ученый – математик, физик, механик, изобретатель, естествоиспытатель и врач. Однако основной алгебраической проблеме, занимавшей ученого, а именно изысканию способов решения уравнений третьей и четвертой степеней, посвящено из почти двухсот всего лишь несколько страниц.

Работа Зубова построена иначе. На протяжении многих страниц Василий Павлович излагает ход мыслей математика эпохи Возрождения, не прибегая к модернизации его языка. Автор дорожит своеобразием метода изложения Кардано и старается познакомить с ним современного читателя. Достигается это короткими риторическими цитатами из подлинника с необходимыми пояснениями.

---

[74] *Зубов В.П.* Заметки о Джироламо Кардано // ВИЕТ, 2010, № 3. С. 3-40.

[75] Например: 1) *Гариг Г.Э.* Спор Тарталья и Кардано о кубических уравнениях и его общественные основы// Архив истории науки и техники. Вып. 7. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1935. С. 67-104. 2) *Гариг Г.Э.* Статика Кардано и Тарталья// Архив истории науки и техники. Вып. 9. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1936. С. 23-68.

Работа Зубова значительна еще и тем, что в ней сам Кардано рассказывает о рождении метода решения кубических уравнений в контексте современной тому времени математики. Многочисленные цитаты из трактата Кардано помогают лучше понять зависимость алгебры того времени от словесных описаний. Тем самым наглядно показано, то огромное значение, которое имела в деле развития математики удачная символика, сократившая и облегчившая работу ученых. Сейчас очень легко вместо слов «*от перемены мест слагаемых сумма не меняется*» записать «экономное» символьное выражение $a + b = b + a$, а в те времена этого делать еще не умели.

Отсутствие общепринятой системы символов превращало алгебру XVI века в громоздкий набор правил для решения конкретно записанных уравнений с положительными коэффициентами. Это наглядно показано Зубовым и с этой точки зрения его методологически безупречно построенная работа ценна для любого историка математики.

Использование алгебраической символики явилось ударом по касте замыкавшихся в себе математиков виртуозов, и сделала математические занятия доступными более широкому кругу людей. Но это произошло лишь в конце XVII – первой половине XVIII веков. Словесные описания заменялись знаками, символами. Это рассматривалось как гарантия от двусмысленности, неясности рассуждений, а значит, и как необходимое условие математической строгости.

Проникнуть в ход мыслей человека того времени очень трудно. И любой историк науки в большей или меньшей степени проектирует настоящее в прошлое. У Зубова такая проекция минимальна. Текст его статьи проливает свет на работу математика эпохи Возрождения, показывает всю сложность и тонкость анализа алгебраических уравнений.

Математическому творчеству Кардано суждена удивительная жизнь. Из XVI века его слова и размышления благодаря работе Зубова пришли в XXI век. Работа позволяет лучше понять не математические достижения Кардано, об этом всему человечеству известно давно, а ход его мыслей, его размышления, которые, естественно, отличаются от логики выстраивания доказательств любого современного математика.

Безусловный интерес для читателя представляет заключительная глава этой композиционно удачной работы. В ней приведена интересная информация об увлечении Кардано азартными играми (кости и карты) и использовании этого порока во благо науки. Ему, как активному игроку принадлежат содержательные наблюдения над психологией игроков. Помимо этого Кардано с полным правом можно считать одним из первых ученых, стоящим у истоков комбинаторики и теории вероятностей.

Работа Зубова написана легким, живым языком, так характерным для ученого. Яркое изложение событий многовековой давности представлено столь реально, что читатель невольно чувствует себя его участником. При этом в ней имеются длинные математические выкладки, которые могут вызвать некоторое отторжение у гуманитарно-образованного читателя. Но они снабжены подробными комментариями, показывающими умение автора делать отчетливыми и ясными даже весьма запутанные математические рассуждения того времени.

Многое из жизни Джироламо Кардано вряд ли бы стало известно русскоязычному читателю, если бы не мудрое умение В.П.Зубова выбирать главное. У каждого прочитавшего эту интересную работу остается только одно неудовлетворение – работа осталась незаконченной, а хотелось бы читать и читать дальше….

Ведущий научный сотрудник НИЦ «Курчатовский институт»,
канд. техн. наук В.С. Белянин