С.Л. Василенко

Золотоискательская болезнь гиперболичности

И волны вставали горами...

Прошлое в прошлом…

Ненароком вспомнилась учёба в школе. Пятый-шестой классы. Уроки грамматики...

Будто искоркой-засечкой всплывает из памяти зазубренное правило:

одна буква -*н*- пишется в суффиксе -*ин*-, а также в суффиксах -*ан*-, -*ян*- прилагательных, образованных от существительных; например, голуб<u>ин</u>ый, гус<u>ин</u>ый, кож<u>ан</u>ый (кожа), песч<u>ан</u>ый (песок), полотн<u>ян</u>ый (полотно), серебр<u>ян</u>ый, дров<u>ян</u>ой и др.;

исключения: *стеклянный*, *оловянный*, *деревянный*.

Именно последние три слова припомнились машинально в связи с похожими эпитетами применительно к обычному квадратному уравнению. Когда наравне с общепринятым в математике золотым сечением (пропорцией), корни уравнения произвольно "раскрашиваются" в разные терминологические тон*а*-цвет*а*: металлические, серебряные, бронзовые, медные и др. Да ещё под эгидой научной новизны (?).

Раньше математика не видела подобного взлёта столь искромётной фантазии.

Но это не всё...

Некоторые исследователи пошли в своём творчестве дальше.

Теперь этими числами (корнями уравнения) начинают методически подменять константу e в классическом определении гиперболических функций, открывая "новую эру" золотых, серебряных, бронзовых и им подобных гиперболических функций (ГФ).

Подобное действо даже стало предметом критики [1, 2].

Отсюда появились и дополнительно-расширительные слова для любителей давать наименования множеству корней-вариаций: стеклянная ГФ, оловянная ГФ, деревянная ГФ.

Ну, и так далее... Хотя подобное "размножение функций" иногда наоборот характеризуется «новым научным достижением» [3].

Различие точек зрения можно было оставить за рамками теоретического обсуждения.

По данной теме всё давно понятно. Дискуссию можно считать в основном законченной.

В частности, анализ "золотых" гиперболических функций Фибоначчи–Люка в разной мере освещён в ряде работ [4–9].

Тем не менее, индуцируется продолжение полемики в новом ракурсе. Включая персональные обращения, например, вопрошая [3]: «Как согласуется упомянутое выше высказывание Татаренко, касающееся роли T_2-гармонии в структуре мироздании, и высокая оценка работ Татаренко в статье Василенко и Никитина с резко отрицательной оценкой "серебряных" функций Боднара?»

По большому счёту распространяться здесь особо не о чем. Ибо краткий ответ на поставленный вопрос очень простой: "практически никак не согласуется".

Но если как-то и увязывается, то больше по лингвистически-беспорядочной схеме самой вопросительной тезы:

1) Высказывания А.Татаренко – это его высказывания. Как и характеристика значимости T_2-гармонии в структуре мироздания.

Нами давалась-фиксировалась лишь его оценка: «У него <Татаренко> было свое понимание стройности математических азов гармонии, где первым было число $1+\sqrt{2} \approx 2{,}414$, а не золотое сечение» [10]. – Из этого абсолютно не следует наше согласие-несогласие с такой позицией. Более того, в нашем понимании сама по себе постановка вопроса об идентификации-ранжировании роли тех или иных чисел в гармонии является ущербной.

2) А вот наша оценка работ А.Татаренко в целом была и остаётся действительно высокой. Причём значимость результатов касается не конкретной константы, а формирования правильного понимания его *Tm*-гармонии и нового философско-методологического видения математических оснований гармонии.

Хотя «в своих наблюдениях он, скорее мечтатель, чем математик» [10].

Александр Татаренко обозначил новый вектор и дал альтернативу в исследовании гармонии, по сути, выведя ее из гипнотического состояния за пределы узких рамок золотого сечения. Стал одним из основателей (родоначальников) математических начал гармонии, "возмутителем спокойствия и катализатором" новой научной мысли в этой сфере, когда при всей своей уникальности золотое сечение оказалось "одним из многих", хоть и первым в этом ряду.

Он первый из славян обратил внимание на узость золотого сечения в гармонии и необходимость более широкого исследования пропорции, для начала на примере квадратичных закономерностей.

Но отдельно взятое число $1+\sqrt{2}$ здесь совершенно не причём.

Остается еще раз акцентировать внимание на философском осмыслении понятия гармоник А.Татаренко, как альтернативе золотого сечения.

Без какой-либо математической напыщенности, которая здесь абсолютно не важна, ибо известна еще с древних времен вавилонской клинописи.

3) В гиперболических функциях (ГФ) формальная замена основания натурального логарифма e на корень из двух также ничего нового не вносит и никак не обобщает.

Что-то вроде математической алхимии[1] с арифметическими манипуляциями "ни о чём".

Корень из двух в ГФ ничего отличительного (с точки зрения полезности в математике) не выражает. Это примерно, если скорость света, выраженную через километры в секунду, перевести в иные единицы измерения, например, в минуту.

Так и корень из двух, взятый в качестве основания ГФ вместо e, просто меняет масштаб с введением дополнительного иррационального коэффициента. Ни физики, ни математики такую процедуру в ГФ за ненадобностью и бесполезностью не используют.

Будущее в прошлом…

Изложенные аспекты по-разному озвучивались и ранее. В то же время поле терминологических наслоений метафизического толка гораздо шире.

Достаточно вспомнить предысторию развития событий в части некоего первенства в изучении структур Фибоначчи, основанных на квадратном алгебраическом уравнении.

Или те же фантазии-наслоения вокруг гиперболических функций...

Поэтому есть смысл поискать исторические устремления в будущее, преломлённые сквозь призму прошедшего времени.

Гиперболические функции

Дискретность-непрерывность. Традиционно элементы последовательностей Фибоначчи выражают дискретно-рекуррентные ряды чисел.

В то же время их аналитическое представление в ряде случаев позволяет легко перейти к непрерывному аналогу.

В целом числа Фибоначчи являются частным и наиболее элементарным эпизодом теории линейных возвратных уравнений (насчитывающей уже более 60 лет), где в общем случае аргумент x является непрерывно изменяющимся [5].

---

[1] На этот счёт есть профессорская поговорка: «Математика – это вам не физика, где можно химичить».

В ряде публикаций проф. А.Стахова говорится о разработке гиперболических функций Фибоначчи–Люка совместно с И.Ткаченко (1993) и Б.Розиным (2004), «из которых вытекает "непрерывный" подход к теории чисел Фибоначчи»[2].

В действительности, если вести речь о понятии непрерывности, то возможность использования непрерывного аргумента в функции Фибоначчи показана ещё в 1965 году [11].

Эрик Халсей даже придумал новый метод для определения чисел Фибоначчи $F(x)$, где x – действительное число.

Кроме того, Ф.Паркет [12] определил (1968) непрерывную функцию Фибоначчи в виде

$$F(x) = \left[\Phi^x - \cos(\pi x)\Phi^{-x}\right]/\sqrt{5}\,.$$

Для уравнения $x^2 = px + q$ с положительным корнем λ аналогичная функция записывается [13] соотношением

$$f(z) = C_1\lambda^z + C_2 q^z \cos(\pi z)\lambda^{-z}\,,$$

где константы $C_{1,2}$ вычисляются исходя из начальных условий.

Правда, в такой интерпретации не сохраняются классические соотношения, например, $F(2z) = F(z)L(z)$, где $L(z) = \Phi^z + (-1)^z \Phi^{-z}$ – функция Люка.

А.Харадом и А.Шеннон определяют [14] кривые Фибоначчи-Люка в комплексных обозначениях:

$$F(z) = \frac{\Phi^z - e^{i\pi z}\Phi^{-z}}{\sqrt{5}}\,, \qquad L(z) = \Phi^z + e^{i\pi z}\Phi^{-z}\,.$$

Как показано в работе [13], при этом для вещественных значений z сохраняются многие полезные соотношения: $F(2z) = F(z)L(z)$, $L(2z) = 2F(z+1) - F(z)$ и др.

В работе [15] (1970) исследованы различные свойства функции Фибоначчи, включая вопросы дифференцирования, интегрирования и т.д. Под функцией Фибоначчи понимается непрерывно-дифференцируемая функция $f(x)$, удовлетворяющая разностному уравнению

$$f(x) = f(x-1) + f(x-2)\,.$$

В статье [16] введена (1967) последовательность непрерывных функций Фибоначчи $f_n(x) = \dfrac{\alpha^n e^{\alpha x} - \beta^n e^{\beta x}}{\sqrt{5}}$ и функций Люка $l_n(x) = \alpha^n e^{\alpha x} + \beta^n e^{\beta x}$, удовлетворяющих уравнению $f_n(x) = f_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)$.

Эта же задача расширяется [17] на квадратное уравнение общего вида $x^2 = px + q$.

Таким образом, исходная идея о непрерывности функций Фибоначчи – самостоятельная позиция, которая исторически и конструктивно связана с публикациями 60-х годов Fibonacci Association. Первый русскоязычный аналог берёт отсчёт времени только с 1993 года [19].

Что касается принятия буквенных обозначений в виде гиперболических функций с произвольным основанием (вместо e), то их суть на все 100 % тождественна обычным огибающим линиям [4–9].

Новизна представления. Напомним одну ссылку [19]: «Формулы Бине существуют в математике не менее 150 лет. И никто из тысяч или десятков тысяч математиков, которые изучали формулы Бине, не заметили, что формулы Бине имеют прямое отношение к гиперболическим функциям. Всё началось из-за публикации моей книги «Коды золотой

[2] http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/00/0195-00.htm.

пропорции» (1984). В этой книге *формулы Бине были представлены в необычном виде, который в математике ранее не использовался*». – Здесь имеет место неточность.

Во-первых, упоминаемый «необычный вид» довольно очевидно описан в широкодоступной русскоязычной монографии Н.Воробьёва [20, с. 24–25] (первое издание датируется 1961 г.) при вычислении чисел Фибоначчи u_n в явной форме:

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{\alpha^n - (-\alpha)^{-n}}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - (-1)^n \alpha^{-n}}{\sqrt{5}},$$

где α, β – корни квадратного уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, удовлетворяющие теореме Виета $\alpha\beta = -1$ [20, с. 24], то есть $\beta = -\alpha^{-1}$.

Во-вторых, точно такое представление непрерывной функции Фибоначчи через больший корень $\lambda = \Phi$ квадратного уравнения $x^2 = x + 1$ мы находим в более ранних статьях, например, [11] (1968):

$$F(z) = \frac{\Phi^z - (-1)^z \Phi^{-z}}{\sqrt{5}} = \frac{\Phi^z - \cos(\pi z)\Phi^{-z}}{\sqrt{5}}.$$

Именно эта форма значительно позже используется в работах [18, 21], а применение косинус функции – вообще через четыре десятка лет [22].

То есть "необычный вид" записи формулы Бине через один положительный корень уравнения первоначально восходит как минимум к научным публикациям за 15 лет до упоминаемой книги о кодах (1984).

Перекрёстные заимствования. Любопытно сопоставление с работой [23].

Действительно, вводимые в ней гиперболические функции Фибоначчи сильно похожи на представления Стахова–Ткаченко [18], хотя приведены без упоминания результатов предшествующих исследований.

Но вот развитие этих функций на случай уравнения $x^2 = px + 1$ впервые описано (1996) именно в работе [23] – в записи $x^2 = (m+2)x + 1$, как обобщённый гиперболический синус и косинус Фибоначчи.

А уже через 10 лет они воспроизведены в публикации [24], как «новый класс гиперболических функций Фибоначчи». – То есть получается, не совсем новый.

Преемственность в развитии. Форма записи гиперболических функций $\mathrm{sh}_\phi x,\ \mathrm{ch}_\phi y$, в которых нижний индекс ϕ означает основание показательной функции ϕ^x, а также основные взаимосвязанные формулы представлены в работе [25]. Опорными величинами, в частности, служат положительные корни квадратного трёхчлена $x^2 - px - q$. Очевидно, что все ключевые соотношения остаются в силе и для любого другого числа $\phi > 1$.

Единственный изъян был связан с описательно-понятийной базой, когда на этапе начальных теоретических исследований *развитие задачи золотого сечения* автоматически перекочевало и в область терминологии.

В результате положительные корни квадратного уравнения ошибочно были нами названы (4 года назад) обобщёнными "золотыми" сечениями. Хотя никакого отношения к "золотой" константе Φ они, конечно, не имеют.

Именно таким способом гиперболические функции с произвольным основанием описаны в работе [26]. Причём на одном электронном ресурсе. Но, к сожалению, без ссылок.

Зато с повторением основных формул, общих для гиперболических функций с произвольным основанием [25, приложение], а также нашей формы обозначений. Произошла замена лишь буковок $\phi \to a$ в основании степени ϕ^x.

Если же рассматривать вопрос в целом, то формальная замена в гиперболических функциях основания натурального логарифма e на произвольное основание ничего особенного в математику не привносит и специальных приложений не имеет.

Всё довольно просто.

На уровне обычного масштабирования.

Квадратные уравнения

На страницах виртуального Института золотого сечения (ЗС), можно сказать, весьма неожиданно выстроили целую цепочку исследователей – "первооткрывателей" квадратных уравнений: В.Шпинадель (1998), Д.Капрафф, М.Газале, А.Татаренко, Н.Косинов.

Они упоминаются так, будто впервые обратили внимание на обобщение рекуррентного соотношения Фибоначчи вида $F_n = pF_{n-1} + F_{n-2}$ и ввели формулу для корня квадратного уравнения $\lambda = \left(p + \sqrt{p^2+4}\right)/2$ в современную теорию чисел Фибоначчи [27].

Одновременно периодически подчёркивалось, что «первой к этому математическому результату <обобщению ЗС> пришла Вера Шпинадель, которая назвала полученные ею пропорции, возникающие при решении простейшего квадратного уравнения, металлическими» [28].

Несколько позже были озвучены и другие подобные "сенсации":

«Оказалось, что до работ Веры Шпинадель и Александра Татаренко к "металлическим пропорциям" пришли Виктор Шенягин (1997) и Грант Аракелян (1989). Благодаря семинару удалось внести уточнения в историю и приоритет важного научного открытия в области "математики гармонии"» [29].

Вот такая общая моторика гиперболизации.

Сенсации... Научные открытия...

И главное, где? – В обычном школьном алгебраическом уравнении.

А в чём? – Что оно упоминается авторами или в той или иной мере анализируется.

Будто они «начали изучать новый (?) класс рекуррентных числовых последовательностей, ... <которые> привели к открытию нового (?) класса математических констант» [30]. – Читай: *корней квадратного полинома*.

В этой связи целесообразно напомнить некоторые очевидные положения.

- Прежде всего, в рамках изложения данной темы хорошо известна взвешенная r-обобщённая последовательность Фибоначчи $V_{n+1} = a_0V_n + a_1V_{n-1} + ... + a_{r-1}V_{n-r+1}$, введенная (1960) Майлсом [31].

- Хорадамом [32] (1965) подробно рассмотрены фундаментальные свойства обобщённых числовых последовательностей $w_n = w_n(a, b; p, q)$, основанных на квадратном уравнении $x^2 = px + q$, с парой произвольных начальных условий $(w_0, w_1) = (a, b)$.

Отдельные случаи начальных условий $w(1, p; p, q)$ и $w(2, p; p, q)$ изучил ещё Люк (1878) [33] и Жарден [34].

- В работе [35] исследуется непростая задача по нахождению конечных сумм для s-степеней $\sum_{k=0}^{n-1} w_n^s$, а также свойства величин w_{mn}.

- Эйзенштейн предложил [36] и Лорд [37] решил (1985) элегантную проблему эффективного представления *n*-й степени константы золотого сечения в виде непрерывной цепи, содержащей числа Люка L_n:

$$\Phi^n = L_n - \frac{(-1)^n}{L_n -}\;\frac{(-1)^n}{L_n -}\ldots$$

Позже данная форма обобщена [38] для последовательности $w(a,b;p,q)$ согласно квадратному уравнению общего вида.

- Безусловно, это более высокие уровни сложности или развития задачи, нежели элементарное представление, вытекающее из записи квадратного уравнения.

Когда, например, разложение корня λ в цепную (непрерывную) дробь самым тривиальным образом и без особых умственных усилий записывается непосредственно из самого уравнения $\lambda^2 = p\lambda + q$ путем его многократного повторения:

$$\lambda = p + \frac{q}{\lambda} = p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{\lambda}} = p + \cfrac{q}{p + \cfrac{q}{p + \ldots}} = p + \frac{q}{p+}\;\frac{q}{p+}\;\frac{q}{p+}\ldots.$$

На подобные закономерности обратил внимание ещё Эйлер (1748)[3].

- Кроме того, квадратное уравнение вида $\lambda^2 = p\lambda + q$ обратной подстановкой $y = e^{\lambda x}$ воспроизводит линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$.

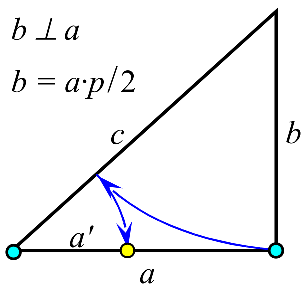
Уравнение такого типа часто встречается в самых разнообразных задачах математики и физики.

Например, в теории колебаний, теории цепей переменного тока и др.

Его решения хорошо известны и зависят от значений корней $\lambda_{1,2}$.

В частности, если действительные решения квадратного уравнения не равны друг другу $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид: $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$, где $A, B -$ произвольные постоянные.

- Весьма интересен подход [39] для геометрического сечения отрезка a в пропорции, вытекающей из квадратного уравнения усечённого вида $x^2 = px + 1$ (см. рисунок):



$$c = \sqrt{b^2 + a^2} = \frac{\sqrt{p^2+4}}{2}a$$

$$a' = c - b = \frac{\sqrt{p^2+4} - p}{2}a$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{2}{\sqrt{p^2+4} - p} = \frac{p + \sqrt{p^2+4}}{2}$$

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Solving_quadratic_equations_with_continued_fractions.

Таким образом, подробное изучение свойств обобщённых числовых последовательностей $w_n = w_n(a, b; p, q)$ и сопутствующих форм, основанных на квадратном уравнении $x^2 = px + q$ с начальными условиями $(w_0, w_1) = (a, b)$, восходит, как минимум, к 1965 году (*A.Horadam*).

Причём ранние исследования, на удивление, более содержательны, чем у большинства последователей.

Оно и понятно. Нелегко в этом плане состязаться с профи Ассоциации Фибоначчи.

Хотя бы потому, что они целенаправленно сконцентрировали свои усилия на конечный результат.

А вот показной ура-патриотизм в любом проявлении не способствует поиску истины, расстраивает историческую преемственность и потому малопродуктивен.

Разуметься, можно, нужно и должно проводить смежные исследования.

Порой догонять...

Пусть даже иногда с повторяющимися результатами. Бывает и так. Такова жизнь.

Однако когда вопрос касается отражения первенства идей, и особенно провозглашения «сенсаций и научных открытий», то здесь следует быть особо аккуратным в оценках и хорошо ориентироваться в предметной области.

Тогда золотоискательская мечта иллюзорной гиперболичности уйдёт в небытие, оставив золотоносную тематику в её истинном свете. – "Золотом" свете, который совершенно не нуждается в дополнительном окрашивании.

Литература:

1. *Василенко С.Л.* Серебряные миражи // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 14.08.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11286.html.

2. *Василенко С.Л.* Анализ семинара-2012 «гармония + математика» // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 01.02.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=62&sm=2.

3. *Стахов А.П.* О "серебряных" гиперболических функциях Олега Боднара // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.17341, 01.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321244.htm.

4. *Василенко С.Л.* Стилистический ряд индуцированных отклонений. Часть третья // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15565, 29.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161550.htm.

5. *Василенко С.Л.* Гиперболические лабиринты на пути к гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15513, 06.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161539.htm.

6. *Василенко С.Л.* Гиперболические метаморфозы аддитивно-рекуррентных последовательностей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16255, 27.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161750.htm.

7. *Василенко С.Л.* Гиперболические фантазии // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 02.07.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=29&sm=2.

8. *Василенко С.Л.* О бедном квадрате замолвите слово... // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15675, 28.11.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161586.htm.

9. *Василенко С.Л.* "Математика гармонии": на распутье // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17151, 28.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322104.htm.

10. *Василенко С.Л.*, *Никитин А.В.* Развитие математических основ гармонии в *Tm*-системе Татаренко // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16076, 18.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161704.htm.

11. *Parker F.D.* A Fibonacci Function // The Fibonacci Quarterly, **6.1** (1968), 1–2. – http://www.fq.math.ca/Scanned/6-1/parker.pdf.

12. *Halsey E.* The Fibonacci number F_u where u is not an Integer // The Fibonacci Quarterly, **3.2** (1965), 147–152.

13. *Richard André-Jeannin*. Generalized Complex Fibonacci and Lucas Functions // The Fibonacci Quarterly, **29.1** (1991), 13–18.

14. *Horadam A.F.*, *Shannon A.G.* Fibonacci and Lucas Curves // The Fibonacci Quarterly, **26.1** (1988), 3–13.

15. *Spickerman W.R.* A Note on Fibonacci Functions // The Fibonacci Quarterly, **8.4** (1970), 397–401.

16. *Elmore M.* Fibonacci Functions // The Fibonacci Quarterly, **5.4** (1967), 371–382.

17. *Carlitz L.* Some Generalized Fibonacci Identities // The Fibonacci Quarterly, **8.3** (1970), 249–254.

18. *Стахов А.П.*, *Ткаченко И.С.* Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии наук УССР. – 1993. – Т. 208, № 7. – С. 9–14.

19. *Стахов А.П.* Комментарий по поводу статьи С.Л. Василенко «Гиперболические функции "золотого" сечения» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15033, 09.01.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321097.htm.

20. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

21. *Стахов А.П.* Коды золотой пропорции. – М.: Радио и связь, 1984. – 152 с.

22. *Stakhov A.*, *Rozin B.* On a new class of hyperbolic function // Chaos, Solitons & Fractals. – 2004. – **23(2).** – P. 379–389 / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13260, 02.05.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321042.htm.

23. *Zdzislaw W. Trzaska*. On Fibonacci Hyperbolic Trigonometry and Modified Numerical Triangles // The Fibonacci Quarterly, **34.2** (1996), 129–138.

24. *Стахов А.П.* Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод "золотой" криптографии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm.

25. *Василенко С.Л.* Гиперболические функции "золотого" сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14931 от 05.12.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321092.htm.

26. *Ткаченко И.С.* Обобщающие гиперболические функции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17372, 20.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321247.htm.

27. *Стахов А.П.* Металлические пропорции», формулы Газале, "золотая" фибоначчиева гониометрия и их роль в развитии гиперболической геометрии, современного теоретического естествознания и «современной теории чисел Фибоначчи» (к обоснованию "математики гармонии") // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15344, 15.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321119.htm.

28. *Стахов А.П.* О вкладе Александра Татаренко в развитие теории чисел Фибоначчи и Золотого Сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15596, 10.10.2009. – http://trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321167.htm.

29. *Стахов А.П.* К завершению Международного online семинара по математике гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17273, 31.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322146.htm.

30. *Стахов А.П.* Почему золотые *p*-сечения и «металлические пропорции» представляют наибольший интерес для развития «математики гармонии»? // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17388, 26.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321112.htm.

31. *Miles E.P.* Generalized Fibonacci Numbers and Associated Matrices // Amer. Math. Monthly 67 (1960), 745–757.

32. *Horadam A.F.* Basic Properties of a Certain Generalized Sequence of Numbers // The Fibonacci Quarterly, **3.3** (1965), 161–176.

33. *Lucas E.* The Theory of Simply Periodic Numerical Functions. – Fibonacci Association, 1969. – 78 p. – http://www.fq.math.ca/Books/Complete/simply-periodic.pdf / First published in the *American Journal of Mathematics*. – Vol. 1 (1878), pp. 184–240, 289–321.

34. *Jarden D.* Recurring sequences. – Riveon Lematematika, Jerusalem, 1958.

35. *Jin-Zai Lee, Jia-Sheng Lee.* A Note on the Generalized Fibonacci Numbers // The Fibonacci Quarterly, **26.1** (1988), 14–19.

36. *Eisenstein M.* B-530, 531. Problems Proposed // Fibonacci Quarterly, **22.3** (1984), 274.

37. *Lord G.* B-530, 531. Problems Solved // The Fibonacci Quarterly, **23.3** (1985), 280–281.

38. *Shannon A.G.*, *Horadam A.F.* Generalized Fibonacci Continued Fractions // The Fibonacci Quarterly, **26.3** (1988), 219–223.

39. *Sean Bradle.* A Geometric Connection between Generalized Fibonacci Sequences and Nearly Golden Sections // The Fibonacci Quarterly, **38.2** (2000), 174–178.

© ВаСиЛенко, 2012