С.Л. Василенко

Серебрение в числовой гармонии

Кто любит серебро,
тот не насытится серебром...
Книга Екклезиаста. – Еккл. 5:9

Вот уже третье тысячелетие золотое сечение (ЗС) время от времени и в разных интерпретациях становится предметом изучения не одного поколения исследователей самых разных специальностей. За исключением, как ни странно, профессиональных физиков и математиков. Ибо в этих сферах золотое сечение особым образом себя не проявляет, кроме уже известных общих представлений.

Во всяком случае, пока.

Вследствие своей простоты и одновременно мощной энергетики-уникальности образующих форм оно приводило в восхищение не одного исследователя.

На наш взгляд, подобное действо стало следствием незатейливости отношений ЗС, доступных для понимания на уровне среднего образования. Отсюда широкое востребование и возможность соприкоснуться с математикой, ибо многие её другие формы просто не доступны для приемлемого восприятия неспециалистов.

Ну, а в рамках ЗС всё как на виду. Вот и «положили на него глаз» артисты и лингвисты, химики и лирики, архитекторы и музыковеды...

Не обошло стороной восторженное восхищение и нынешних исследователей, включая наши работы на страницах *лаборатории* http://www.artmatlab.ru/, *научной библиотеки* http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html, *академии АТ* http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm и др.

Многие ощущают потребность быть сопричастными к манящей магии незамысловатых, но ярко выраженных конфигураций ЗС.

Хотя в похожих ситуациях важно быть всегда самокритичным и не переоценивать собственные возможности-масштабы.

Другие находят в этом способ соприкоснуться с "золотым объектом математики".

Иногда с известной долей расчётливого интереса. Когда собственные уже пройденные в науке вариации-повторения выдаются за оригинальные объекты путём присоединения новоявленных словообразований.

За счёт этого известный материал приобретает обновлённую "авторскую прописку".

Именно в этом и состоит изначальный смысл.

Что-то вроде «новое – хорошо зарытое старое».

Серебряная карусель. Большая терминологическая путаница охватила "около золотоносные" конструкции с серебряным оттенком.

В этом беспорядочном и разрозненном нагромождении названий участвуют специалисты самых разных специальностей: лингвисты, строители, философы и др.

Так или иначе, но многие из них, единожды соприкоснувшиеся с внешкольной элементарной математикой, стремятся оставить памятный след от собственных мини-открытий в области чисел. При этом они наперебой наделяют разные числа-константы теперь уже терминологией серебра.

Создаётся впечатление, что подобным действам не будет конца.

Будто серебрение – это визитная карточка значимости представляемого материала.

Так, формирование новых знаний незаметно подменяется околонаучной риторикой и противоречивой терминологией. Правда, теперь уже с заменой «золотого сияния на серебряные оттенки». Хотя суть от этого не меняется.

Серебряное сечение[1] не имеет однозначного толкования. Название появилось по аллюзии[2] с ЗС.

Из существующих вариантов наиболее адекватно-корректное его определение, на наш взгляд, связано с положительным корнем $\delta = 1+\sqrt{2}$ квадратного уравнения $x^2 - 2x - 1 = 0$:

две величины образуют серебряное отношение (silver ratio[3]) или сечение[4], если сумма меньшей и удвоенной большей величины a+2b так относится к большей величине b, как она к меньшей величине a:

$$\frac{a+2b}{b} = \frac{b}{a} \quad \to \quad \frac{1+2b/a}{b/a} = \frac{b}{a} = \delta \quad \Rightarrow \quad \delta^2 = 2\delta + 1. \qquad (1)$$

Данное сечение имеет отношение к квадратным треугольным числам[5] N_n, являющимся одновременно треугольными числами $t_n(t_n+1)/2$ и полным квадратом s_n^2:

$$N_n = \frac{\left(\delta^{2n} - \delta^{-2n}\right)^2}{2^5},$$

с интересным рекуррентным свойством $N_{n-1}N_{n+1} = (N_n - 1)^2$,

где $\delta = 1+\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$, $\qquad N_n$ = 1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900...

Отношение чисел t_n и s_n стремится к корню из двух $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{t_n}{s_n} = \sqrt{2}$.

Площадь правильного восьмиугольника со стороной a равна $2\delta a^2$.

Числа Пели[6] выражаются формулой $P_n = \dfrac{\delta^n - \delta^{-n}}{2\sqrt{2}}$.

Положительные корни λ уравнения $x^2 = px + 1$ с их разложением в цепную дробь

$$\lambda = \lambda + \frac{1}{\lambda} = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda}} = \lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \cfrac{1}{\lambda + \ldots}}} = \frac{p + \sqrt{p^2+4}}{2}$$

некоторые авторы называют "серебряными средними" [1].

Эти же величины совместно с корнями уравнения $x^2 = x + q$ иногда нарекают также "металлическими средними" [2, 3].

Следует заметить, что название средних <величин> для случая $x^2 = px + 1$ в некотором смысле приемлемо. Положительный корень квадратного уравнения здесь удовлетворяет неравенству $p < \lambda < p+1$ и формально является неким "усреднителем" двух чисел p и $p+1$.

Особенно это наглядно выражается для натуральных чисел p.

---

1 http://en.wikipedia.org/wiki/Silver_Constant.

2 Аллюзия (лат. *allusio* шутка, намек) – стилистическая фигура (риторика) с явным указанием или намёком на литературный, исторический или иной факт.

3 http://en.wikipedia.org/wiki/Silver_ratio, http://mathworld.wolfram.com/SilverRatio.html.

4 Серебряное сечение // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=29476728.

5 http://en.wikipedia.org/wiki/Square_triangular_number.

6 http://en.wikipedia.org/wiki/Pell_number.

О корне из двух. Безусловно, это иррациональное число по-своему особенное.

Корень из двух знали и, как могли, изучали в Древней Греции.

Но ещё более ранний период характеризует Вавилонская глиняная табличка, дающая приближённое значение корня из двух с точностью до 6 правильных значащих цифр, содержит четыре 60-ричных цифры и датируется около 1700 г. до н.э.

Не случайно вавилонская наука, наряду с египетской, по уровню своего развития в древнем мире занимала одно из первых мест.

Число, связанное с диагональю квадрата, безусловно, необычное.

Оно выходило за рамки целых чисел или правильных дробей. Одно время с ним не знали, что делать. Знаменитый Пифагор его буквально засекречивал от своих учеников.

Кстати теперь $\sqrt{2}$ иногда называют Пифагоровой константой [4, 5].

Сегодня появились новые знания[7].

Например, квадратный корень из 2 является единственным числом, отличным от 1, чья бесконечная тетрация (гипероператор-4, степенная башня) равна его квадрату:

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} = 2.$$

Квадратный корень фигурирует в предельном приближении π:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}}_{n\ \text{корней}}} = \pi.$$

Данное соотношение связано с формулой Виета[8].

Гиперболическое серебрение соотносится с так называемыми серебряными функциями [6][9], на которые мы уже давали своё мнение-видение [7, 8].

Речь идёт о разновидности гиперболических синус-косинус функций, в основание которых положено число $\delta = 1 + \sqrt{2}$.

Название "серебряные" как раз и связано с "серебряной" окраской данного числа, содержащего величину $\sqrt{2}$, равную диагонали квадрата с единичной стороной.

Можно, конечно, вводить новые обозначения. Давать наименования. Выполнять преобразования. Но формальная замена основания натурального логарифма e на корень из двух всё одно ничего принципиально нового не вносит. Равно как и не обобщает.

Нет и практического выхода, кроме маловыразительной арифметической манипуляции. С привлечением бесчисленного множества радикалов и вообще любых степеней и корней.

Отчасти это относится, увы, и к нашей ранней статье [9], в которой опорными величинами в гиперболических функциях $\mathrm{sh}_\phi x$, $\mathrm{ch}_\phi y$ служили положительные корни квадратного трёхчлена $x^2 - px - q$. Очевидно, что все базовые соотношения остаются в силе и для любого другого числа $\phi > 1$.

В похожем ключе, причём с нашими обозначениями (правда, без ссылок) построена и более поздняя работа [10].

Корень из двух в основании гиперболической функции ничего отличительного (с точки зрения полезности в математике) не выражает.

---

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Square_root_of_2.

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Vieta_formula.

[9] Продублировано: Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17259, 26.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322135.htm.

Лишь меняет масштаб с введением дополнительного иррационального коэффициента.

Это примерно, если скорость света, выраженную через километры в секунду, перевести в иные единицы измерения, например, в минуту.

Использование корня из двух в гиперболических функциях вместо основания натурального логарифма e просто меняет масштаб с введением дополнительного иррационального коэффициента.

Ни физики, ни математики такую процедуру за ненадобностью и бесполезностью не используют. Какие-либо «новые пути в развитии математики» [6] серебряные функции, также не открывают.

Называть величину $1+\sqrt{2}$ серебряным отношением (сечением) или не называть, – в конце концов, дело вкуса. Хотя здесь нет той сильной энергетики, что окружает феномен ЗС.

Да и новых знаний от этого не прибавляется.

Ну, а серебряные синус-косинус функции на базе этого числа – и вовсе малосодержательные употребления радикала.

Посеребренный пластик. В литературе хорошо известна одна необычная константа[10] – *пластическое число* ρ, которое является корнем уравнения $x^3 - x - 1 = 0$ или $x = \sqrt[3]{x+1}$:

$$\rho = \frac{\sqrt[3]{9+\sqrt{69}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{69}}}{\sqrt[3]{18}} = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\ldots}}} \approx 1{,}3247\,.$$

Число ρ – *минимальное число Писота*[11] – положительное алгебраическое целое число, большее 1, такое, что все его сопряженные элементы по абсолютной величине меньше 1.

Вроде всё понятно.

Тем не менее, встречаются авторы, которые производят терминологические окрашивания и здесь [11, с. 147–156]. Видимо, с целью привлечения внимания

Вот примерный лейтмотив их апеллирования: «В математической литературе последних лет это число называется *пластмассовым числом* или пластмассовым сечением. Пренебрегая мнением всевозможных критиканов (?), мы всё же полагаем, что это число имеет не меньшее право на благородный титул, чем его прославленный предок, и в дальнейшем будем называть его *серебряным* числом или сечением» [11, с. 148].

Возможно, такое привилегированное титулование числа вызвано его похожестью на ЗС в представлении цепочкой кубических корней $\rho = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\ldots}}}$.

Что можно отметить? – У этого автора и прежде встречались разные математические погрешности, о чём отмечалось ранее [12], включая даже персонификацию собственного авторства в задачах, возникших ещё при его рождении [13].

Перед нами очередная безосновательная версия серебряной конструкции.

Во-первых, число ρ, как минимальное число Писота, уже особо выделено в математике, поскольку оно наименьшее (*Siegel*, 1944) в своём классе. И дополнительный "благородный титул" здесь точно не причём.

Во-вторых, происходит подмена двух похожих понятий: "пластик" и "пластичность".

Вроде как пластмасса снижает уровень значимости числа, и поэтому его нужно обязательно посеребрить.

В итоге получается искажение логики словообразований.

---

[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Plastic_number.

[11] http://mathworld.wolfram.com/PisotNumber.html.

Название *пластическое* было дано в Гансом ван дер Ланом (1928) и не имело никакого отношения к веществам (*Au*, *Ag*), а соотносилось с пластикой или приданием трёхмерной формы вследствие кубического порядка образующего уравнения.

Поэтому называть пластическое число ρ серебряным, ни исторически, ни онтологически не верно.

С числами Писота возникают проблемы и у последователей изложенного направления.

Так, в работе [14] неверно отмечается что «положительные решения квадратных уравнений типа $x^2 - mx + 1 = 0,$ где $m > 3,$ также являются числами Писота».

Ошибка состоит в том, что у этого уравнения два положительных корня.

Но меньшее из них не есть число Писота!

Серебряные кружева. В математике известна функция, дающая константы (числа) Бераха[12] $B_n = 2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right).$

Величина $B_5 = \Phi + 1$ – увеличенное на единицу число золотого сечения.

Соответственно, $B_{10} = \Phi + 2$.

А вот $B_7 = S = 2 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) \approx 3{,}247$ неожиданно называют серебряной константой.

Это алгебраическое число S, которое является корнем кубического уравнения[13]

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0 \cdot$$

Кроме того (*T.Piezas*, 2006):

$$S = 2 + \frac{c+2}{c+1}, \qquad c = \sqrt[3]{7 + 7\sqrt[3]{7 + 7\sqrt[3]{7 + \ldots}}} \; .$$

Красиво. Математически корректно. Только причём здесь "серебряные застёжки"?

С таким же успехом подошла бы и "семимильная" константа.

В рамках предмета наших исследований встречаются и другие необычные дефиниции, например, «серебряное сечение – отношение целого отрезка к меньшему отрезку как длины окружности к её диаметру» [15]. – Это любопытное, но неинформативное определение.

Пропорции здесь не получается. Имеется одно единственное решение, равное π.

Часто, отталкиваясь от определения ЗС через цепную (непрерывную) дробь, серебряными называют любые цепные дроби, в которых знаменатели постоянны:

$$n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + \ldots}}} = [n;\, n] \; .$$

Вряд ли это корректно, поскольку частный случай $[1;1]$ соответствует золотому сечению. А вот образный эпитет "благородных" цепных дробей возможно бы и подошёл.

Продолжение синтеза. Попробуем искусственно расширить горизонты серебрения, дабы показать его спорность и противоречивую информативность.

---

[12] http://mathworld.wolfram.com/BerahaConstants.html .

[13] http://mathworld.wolfram.com/SilverConstant.html.

Если присмотреться к логике серебрения, то основные серебряные фантазии-интерпретации витают на алгебраическом поле вокруг простеньких видоизменений базового "золотого" уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

В одном случае вводится следующий после единицы натуральный коэффициент "два" в среднем слагаемом $x^2 - 2x - 1 = 0$.

В другом случае повышается на единицу старшая степень $x^3 - x - 1 = 0$.

В таком контексте ничего не мешает продолжить сереброносный ряд в иных направлениях, также закрепляя, пусть даже несообразно, очередное звание-название серебряного числа или сечения.

<u>*Серебро-деление*</u> $1/3$ (треть).

По аналогии с формой (1) можно сформулировать комплементарное отношение:

две величины образуют серебряное отношение, если отношение x суммы большей b и удвоенной меньшей величины к большей равно отношению большей величины к меньшей a

$$\frac{b}{a} = \frac{b+2a}{b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{a} = x = 1 + \frac{2}{x}.$$

Так, мы приходим к уравнению $x^2 - x - 2 = 0$, которое отличается от "золотого" лишь следующим после единицы натуральным коэффициентом "два" в последнем слагаемом – свободном члене.

Положительный корень уравнения равен 2.

То есть меньшая часть составляет – $1/3$, большая – $2/3$.

Прекрасный результат, имеющий полное право также называться серебряным отношением (сечением). Возможно, даже больше, чем все предыдущие вместе взяты.

Примечательно, что после половинки $1/2$ образуются самые простые обыкновенные дроби.

Дробь $2/3$ имеет особую значимость в человеческой практике.

Не случайно $2/3$ голосов обычно считается достаточным для преодоления вето.

Ибо это в два раза больше оставшейся части $1/3$, а потому считается значимым. Без всяких вероятностных признаков, доверительных интервалов, уровней значимости и прочей статистической атрибутики.

$2/3$ – всё просто, понятно и внятно.

Не мене интересная другая форма-интерпретация (рис. 1) такого сечения [16]:

целое 1 одинаково относится как к меньшей части a, так и разности $b-a$ между большей и меньшей частями (меньшая часть равна разности).

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b-a}, \quad 2a = b = 1 - a, \quad a = \frac{1}{3}, \quad x = b/a = 2.$$

$$x\sum_k a^k = 2\sum_k 3^{-k} = 1. \tag{2}$$

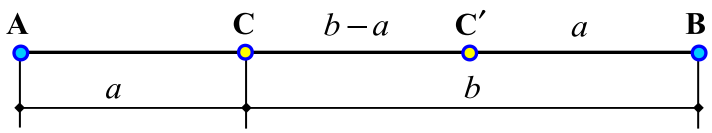

Рис. 1. Деление отрезка AB единичной длины

Такое деление носит устойчивый характер в природе, и не столько в виде четких количественных соотношений, сколько в тринитарном её понимании: «белое–серое–черное», «сухо–сыро–мокро», «свобода–необходимость–случайность», «левое–правое–середина» и т.п.

То есть в целом может существовать самостоятельное, полноценное третье, ничуть не менее самостоятельное и значимое, чем первое и второе, – в расширение диалектического подхода, часто исходящего из принципа «третьего не дано».

В математическом аспекте такое деление одновременно несет в себе бинарную операцию: меньшая часть равна половине б*о*льшей или б*о*льшая часть равна двум меньшим, что наглядно проявляется и в сумме геометрической прогрессии (2) в виде сомножителя 2.

То есть треть в неявном виде содержит и дихотомию, являясь естественным развитием диалектики на "триалектическое" понимание и видение мира [17] с освобождением от исключительно бинарного стереотипа. Или как говорил великий Гёте, между двумя противоположными мнениями находится не истина, а проблема.

Если рассматривать живую природу, то ее мыслящей составляющей, включая человека, как раз и свойственен анализ с преимущественным разбиением целого на три части (не обязательно равные), когда между "да" и "нет" практически всегда присутствует третье состояние: «Ни да, ни нет» или «И да, и нет».

Собственно и наличие двоичной системы (0, 1) в вычислительных машинах обязано главным образом тому, что период их становления совпал с отсутствием надежной элементной базы для реализации более экономной и эффективной троичной системы счисления с устойчивым третьим состоянием $(–1, 0, 1)$ или $(0, 1, 2)$.

Заключение. Серебряные образы, как отблески золотого сечения, завораживают многих исследователей. Их пытливые умы, наверняка, приумножают знания, расширяя наши представления в области пропорциональных отношений.

Однако искусственно внедряемые серебряные окрасы нисколько не повышают степень значимости результатов.

Даже наоборот, они привносят терминологический разнобой и нигилизм дефиниций.

Если и связывать название серебряной константы, то из существующих претендентов на это определение больше всего подходит число $\delta = 1 + \sqrt{2}$ серебряного отношения (1).

Тогда в геометрическом представлении длина меньшей части единичного отрезка составляет $\delta^{-1} = \sqrt{2} - 1 \approx 0{,}414$ – разность между длинами диагонали квадрата и его единичной стороной.

Но есть и другое, по нашему глубокому убеждению, не менее значимое отношение – *одна треть целого*.

После половинного деления $1:2$ и золотого сечения, это, пожалуй, наиболее значимый вид пропорции с богатым философским и численным содержанием, хотя и довольно простой на первый взгляд.

Половина 0,5 и одна треть 0,333, а между ними ЗС с числом $1 - 0{,}618 \approx 0{,}382$, как переходная дорожка от бинарного представления к тринарному многообразию.

Как связующий мостик между бисекцией (дихотомией) и триномиальностью (троичностью), – в длинах меньшей части единичного отрезка:

$$\frac{1}{2} \; - \; \text{ЗС} \; - \; \frac{1}{3}$$

Есть и чёткая математическая подоснова в виде пропорций

$$\frac{b}{a} = \frac{b+2a}{b} \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{b-a},$$

характеристического квадратного уравнения (тринома)

$$x^2 = x + 2$$

и эквивалентной рекуррентной формы

$$x_{n+1} = x_n + 2x_{n-1}.$$

Аттрактор этих уравнений подобно числу золотого сечения легко представляется в виде бесконечной цепочки встроенных квадратных корней

$$x = \sqrt{2+x} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+...}}} = 2$$

и бесконечной цепной (непрерывной) дроби

$$x = 1 + \frac{2}{x} = 1 + \cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{2}{1+...}}} = 2 .$$

Таким образом, малая константа золотого сечения 0,618... занимает промежуточное положение между половиной и одной третью – самыми простыми дробями. К тому же (2, 3) – единственная пара соседних простых чисел, образующих «чёт–нечет».

Дроби $1/2$ и $1/3$ – это первые приближения меньшего отрезка $1 - F_n / F_{n+1}$ через числа Фибоначчи F.

Итак, явно просматривается обусловленная последовательность мостиков-понятий: "дихотомия" – "золотое сечение" – "серебряный трином" или в числовом эквивалентном виде "1 – 1,618 – 2" (в отношениях большей части к меньшей).

Всё логично, с явной преемственностью.

И никакой двойственности понимания.

Так что если и выбирать среди многообразия определений "серебряной" пропорции (константы, сечения, отношения), то мы бы предпочли именно алгебраическую форму $x^2 - x - 2 = 0$ с её рекурсивно-временн*ы*м образом: «будущее равно настоящему плюс удвоенному прошлому».

То есть удвоение роли прошлого (по сравнению с мгновенно длящимся настоящим) в формировании будущего приводит к тринитарному подходу.

Примечательный и достойный результат. Что называется "на виду". Без всяких красок.

Наше искусственное серебрение здесь нарочито играет чисто физическую роль отражателя в кривом зеркале терминологии или усилителя сигналов, идущих от малозначимых, а порой и неосмысленных определений, достойное приложение которых – художественная проза.

Литература:

1. *Knott R*. The Silver Means. – http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/cfINTRO.html#silver.

2. *Vera W. De Spinadel*. The metallic means family and multifractal spectra // Nonlinear Analysis. – Vol. 36 (1999), pp. 721–745.

3. *Vera W. De Spinadel*. The family of metallic means // VISMAS. – Electronic J. of Math. Institute, Belgrade. – Vol. 1. – No. 3 (1999). – http://www.mi.sanu.ac.rs/vismath/pap.htm.

4. *Gourdon X.*, *Sebah P.* Pythagoras's Constant: √2. http://numbers.computation.free.fr/Constants/Sqrt2/sqrt2.html.

5. *Weisstein E.W.* Pythagoras's Constant // MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/PythagorassConstant.html.

6. *Боднар О.Я.* Серебряные функции и обобщение теории гиперболических функций // Международный клуб ЗС. – 2012. – http://www.goldensectionclub.net/.

7. *Василенко С.Л.* Серебряные миражи // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 14.08.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11286.html.

8. *Василенко С.Л.* Математика и гармония: семинар глазами участника // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17290, 07.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321240.htm.

9. *Василенко С.Л.* Гиперболические функции "золотого" сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14931 от 05.12.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321092.htm.

10. *Ткаченко И.С.* Обобщающие гиперболические функции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17372, 20.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321247.htm.

11. *Газале М.* Гномон. От фараонов до фракталов: Пер. с англ. – М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с. / Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaohs to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 /.

12. *Василенко С.Л.* Гиперболические метаморфозы аддитивно-рекуррентных последовательностей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16255, 27.12.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161750.htm.

13. *Василенко С.Л.* Геометрия золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16409, 05.03.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161806.htm.

14. *Стахов А.П.* "Металлические пропорции" Веры Шпинадель // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.12532, 25.10.2005. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02320029.htm.

15. *Чернов А.Ю.* Серебряное сечение // Новая газета. – 14 января 1997.

16. *Василенко С.Л.* Математические пропорции взаимодействия целого и его частей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15248, 23.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322040.htm.

17. *Сергиенко П.Я.* Триалектика. О мерах мудрости и мудрости мер. – Пущино: ОНТИ ПНЦ, 2003. – 84 с.