ТАИНСТВО ЧИСЕЛ ЗОЛОТОЙ ПРОПОРЦИИ
4. Золотые полюса остроугольного треугольника

В предыдущих частях работы [1–3] сообщалось о необычных свойствах золотых чисел, их расщеплении и удивительной числовой последовательности, имеющей органическую связь с геометрическими фигурами. Настоящая статья является продолжением этих работ, позволяя глубже взглянуть на довольно неожиданные связи золотых чисел с фигурами на плоскости.

Истина открыта для всех, ею никто не завладел.
Немалая доля её останется и потомкам.
Сенека (Младший)[1]

С любым треугольником связано много замечательных точек, прямых линий и окружностей. Другие геометрические фигуры содержат их гораздо меньше.

Начнем рассмотрение с треугольников, затем в последующих работах перейдем к квадрату, прямоугольникам и пятиугольнику. Рассмотрение проводится только для таких фигур, элементы которых каким-либо образом соединены с золотой пропорцией.

ОСТРОУГОЛЬНЫЙ ЗОЛОТОЙ ТРЕУГОЛЬНИК

23. Определение остроугольного золотого треугольника. Логично назвать *золотым* треугольник со сторонами Ф, 1 и φ, где Ф = 1,618…, φ = 0,618… – большое и малое золотые числа. Однако такой треугольник невозможен. Поэтому принято считать, что треугольник является золотым, если отношение двух его сторон равно Ф или φ. В этом случае треугольник должен быть равнобедренный, а отношения его сторон – Ф:Ф:1 или 1:1:Ф.

В этой статье рассмотрим золотой треугольник с отношениями сторон Ф:Ф:1. Пусть единице равна длина основания треугольника, а длину Ф имеют боковые стороны (рис.1). Угол ABC = θ в этом случае вычисляется по формуле

$$\theta = 2\,arc\sin\left(\frac{AC}{2AB}\right) = 2arc\sin\left(\frac{1}{2\Phi}\right) = 36^0,$$

или θ = π/5. Соответственно углы при основании равны по 72^0 или 2π/5.

В дальнейшем будем называть такой треугольник *остроугольным золотым треугольником*.

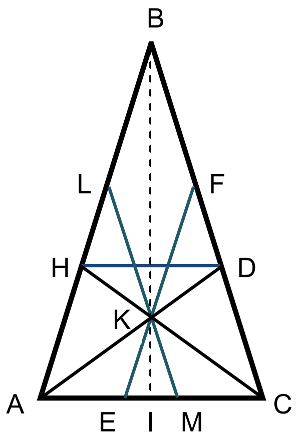


Рис. 1. Остроугольный золотой треугольник

24. Определение золотого полюса. В предыдущей публикации был определен золотой полюс такого треугольника. Повторю некоторые моменты, расширяя пояснения.

Вначале рассмотрим преобразования подобия.

Пусть $П^k$ – преобразование подобия (или подобие) с коэффициентом $k \neq 1$. Если $k > 1$, то k – коэффициент растяжения, если $k < 1$, то k – коэффициент сжатия.

Применим к исходному треугольнику ABC это преобразование при $k = \varphi = 0.618…$. Получим новый золотой треугольник. В силу подобия и удивительных свойств золотого треугольника пять таких треугольников могут быть расположены внутри исходного треугольника способами, представленными на рисунке, – это конгруэнтные треугольники HBD, ALM, EFC, CAD и HCA.

Боковые стороны этих треугольников конгруэнтны основанию AC исходного треугольника ABC в силу равенства коэффициента подобия k малому золотому числу φ. Стороны AD и CH треугольников CAD и HCA являются биссектрисами углов A и C вследствие того, что в золотом треугольнике углы при вершине и при основании относятся, как 1:2.

[1] *Сенека Л.-А.* Нравственные письма к Луцилию; Трагедии / Пер. С. Ошерова. – М.: Худож. лит., 1986. (Б-ка античной литературы). С.85 (письмо 33, 10). [Луций Анней Сенека (Младший) (ок.4 до н.э. – ок. 65 н.э.), писатель, философ-стоик].

Любопытно, точка К делит стороны треугольников, проходящие через неё, в золотой пропорции. Доказательство этого факта наиболее просто может быть осуществлено на основании свойства биссектрисы – она делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Проследим процесс вписывания подобных треугольников дальше.

К желаемым результатам приводят треугольники CAD и HCA. В силу их симметричного расположения относительно высоты BI, рассмотрим только один треугольник – ΔCAD.

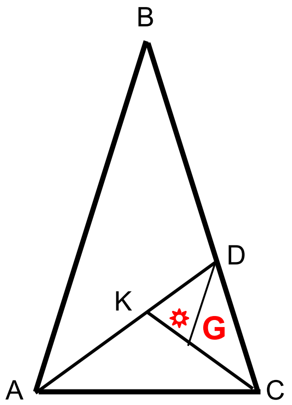


Рис. 2. Композиция подобных треугольников

Отобразим этот треугольник на ΔDCK с коэффициентом подобия $k = \varphi = 0.618\ldots$ и расположим его внутри ΔCAD, как это делалось в предыдущем случае (рис. 2).

Очевидно, при последовательном выполнении двух преобразований Π^{φ} ΔABC отобразится на ΔDCK, причем все расстояния изменятся в $\varphi\cdot\varphi = \varphi^2$ раз, то есть

$$\Pi^{\varphi} \circ \Pi^{\varphi} = \Pi^{\varphi^2},$$

где « ∘ » – символ операции композиции.

Многократно повторяя эту композицию, получим множество последовательно уменьшающихся подобных треугольников вложенных по предложенному принципу друг в друга.

$$\underbrace{\Pi^{\varphi} \circ \Pi^{\varphi} \circ \ldots \circ \Pi^{\varphi}}_{n} = \Pi^{\varphi^n}.$$

При бесконечно длительном продолжении этого дефляционного (© Р.Пенроуз) процесса последовательность какого-либо линейного размера этих треугольников дает пример переменной величины, которая в процессе её изменения неограниченно приближается к нулю.

Допустим, наблюдение ведется за высотой исходного золотого треугольника BI = h (Рис.1). Уменьшение этой высоты при последовательных преобразованиях подобия дает следующую последовательность величин,

$$h,\ h\varphi,\ h\varphi^2,\ h\varphi^3,\ \ldots,\ h\varphi^n,\ \ldots \quad (n \to \infty),$$

которая представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Знаменатель прогрессии $\varphi < 1$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} h\,\varphi^n = 0.$$

Следовательно, процесс вписывания треугольников асимптотически стремится к завершению в некоторой особой точке G (dim $G = 0$), принадлежащей всем золотым треугольникам.

Асимптотическая точка, к которой стремятся уменьшающиеся треугольники, но не достигают её, в работе [3] названа *золотым полюсом G.*

25. Центрально-подобный поворот вокруг золотого полюса *G*. Рассмотренный процесс вписывания подобных треугольников в исходный треугольник можно представить иначе.

Вследствие того, что золотой полюс G принадлежит всем треугольникам для вписывания треугольников разумно сочетать подобие с поворотом вокруг этого центра.

Поворотом плоскости вокруг центра G назовем движение, для которого точка G является единственной инвариантной точкой (тождественное отображение).

Поворот переводит каждую точку с полярными координатами (r, θ) в точку (r, θ ± α), где r – расстояние от центра поворота G до рассматриваемой точки, θ – угол, который составляет отрезок r с полярной осью, α – угол вращения, изменяющийся непрерывно. При повороте плоскости все прямые, проходящие через центр поворота G, в равной степени и лучи с общим началом G поворачиваются на один и тот же угол.

Введем обозначение: R^{α}_{G} – поворот вокруг центра G на угол α, $R^{\alpha}_{G}(M) = N$ – поворот вокруг центра G на угол α, переводящий точку (прямую, луч, фигуру) M в точку (прямую, луч, фигуру) N.

Совместим подобие и поворот. Тогда центрально-подобный поворот будет представлять собой композицию поворота R^{α}_{G} вокруг центра G на угол α и подобия Π^{k}, то есть композиция $R^{\alpha}_{G} \circ \Pi^{k}$ будет переводить точку (r, θ) в точку (kr, θ ± α).

Пусть коэффициент подобия $k = \varphi$, угол поворота $\alpha = 108^0$, осуществляемый против часовой стрелки. Тогда ΔABC отображается на ΔCAD, вершина треугольника B переводится в вершину A (рис. 2).

Обозначим такой центрально-подобный поворот композицией $R^{108}{}_G \circ \Pi^{\varphi}$.

Продолжая этот процесс, будем иметь: φ^2 – коэффициент подобия для поворота на угол $2\cdot108^0$, φ^3 – коэффициент подобия для поворота на угол $3\cdot108^0$, …, φ^n – коэффициент подобия для поворота на угол $n\cdot108^0$. Таким образом, центрально-подобный поворот $R^{n\cdot108}{}_G \circ \Pi^{\varphi^n}$, переводит точку (r, θ) в точку $(\varphi^n\cdot r,\ \theta + n\cdot108^0)$.

Свойственный данному остроугольному золотому треугольнику угол 108^0 естественно назвать *характерным углом поворота.*

Если считать коэффициент подобия и угол поворота изменяющимися непрерывно и пропорционально, то центрально-подобный поворот будет отображать преобразование $r \to \varphi^t\cdot r$ и $\theta \to \theta + t$, которое может быть выражено параметрическими уравнениями

$$r = \varphi^t\cdot a, \qquad \theta = t,$$

где a – начальное положение точки на полярной оси ($r_0 = a$), t – независимая вещественная переменная. Отсюда без труда выводится уравнение кривой в полярных координатах

$$r = a\cdot\varphi^{\theta}.$$

Таким образом, при центрально-подобном повороте траектория какой-либо начальной точки (a, 0) описывается *логарифмической спиралью*.

Полученный результат означает, что вершины B, A, C, D, K, F, E и т. д. соответствующих треугольников лежат на логарифмической спирали (рис. 3).

Если полярную ось направить вдоль отрезка *G*B, то уравнение золотой логарифмической спирали в полярный координатах будет иметь вид

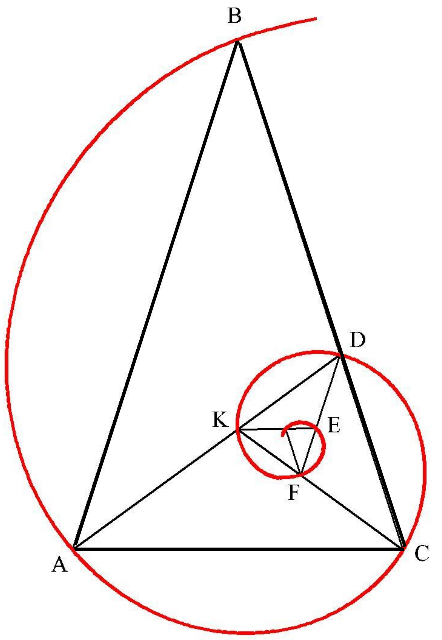


Рис. 3. Золотая логарифмическая спираль с центром в золотом полюсе *G*

$$r = \frac{1}{\varphi\sqrt{3-2\varphi}}\varphi^{\frac{5}{3\pi}\theta}.$$

26. Второй золотой полюс. Выше использован центрально-подобный поворот против часовой стрелки. В силу осевой симметрии исходного остроугольного золотого треугольника подобный поворот по часовой стрелке приведет к аналогичному золотому полюсу. Он будет расположен в левой части треугольника, симметрично центру поворота *G*.

Чтобы различать эти центры обозначим их G_1 и G_2, называя первым и вторым золотыми полюсами (рис. 4). Они обладают одинаковыми функциями в структуре треугольника и порождают разнонаправленные золотые логарифмические спирали..

Ниже будет показано, что эти полюса с их необычными свойствами единственны.

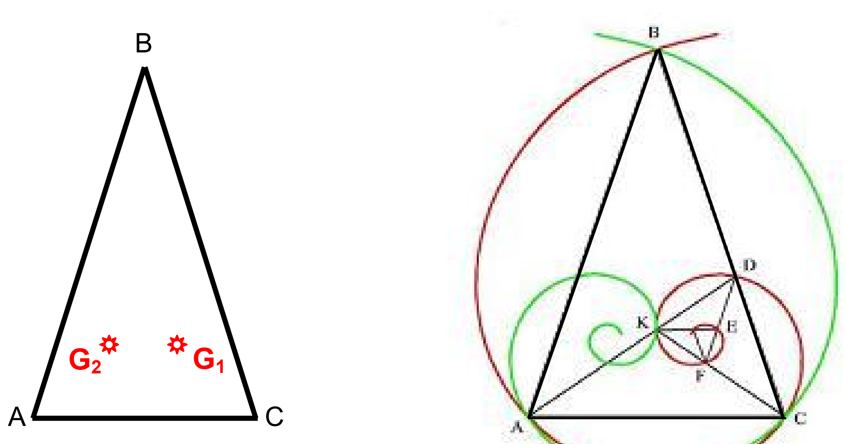


Рис. 4. Золотые полюса и золотые спирали треугольника

27. Геометрическое нахождение золотого полюса. 1. Допустим положение *первого золотого полюса* G_1 известно. Проведем прямые через этот полюс и вершины исходного треугольника – AM и BN (рис. 5). Отрезок AM в ∆CAD является аналогом отрезка BN в ∆ABC.

Композиция $R^{108}{}_{G1}(BN) \circ \Pi^{\varphi}$ = AM. Композиция $R^{5\cdot108}{}_{G1}(G_1B) \circ \Pi^{\varphi^5}$ = G_1F. При этом ∆ABC отображается на ∆EFH. Лучи G_1B и G_1F лежат на прямой BN.

Эта же композиция отображает луч G_1A на луч G_1E, а ∆CAD отображается на ∆HEJ. Оба луча лежат на прямой AM.

При этой композиции подобные треугольники ABC и EFH оказываются повернутыми один относительно другого на 180^0. Аналогично повернуты треугольники CAM и HEJ.

Поэтому для геометрического нахождения золотого полюса G_1 достаточно выполнить последовательное построение треугольников от ABC до EFH и HEJ.

Затем через вершины треугольников F и E провести соответственно линии BN и AM.

Пересечение этих линий даёт местонахождение первого золотого полюса G_1

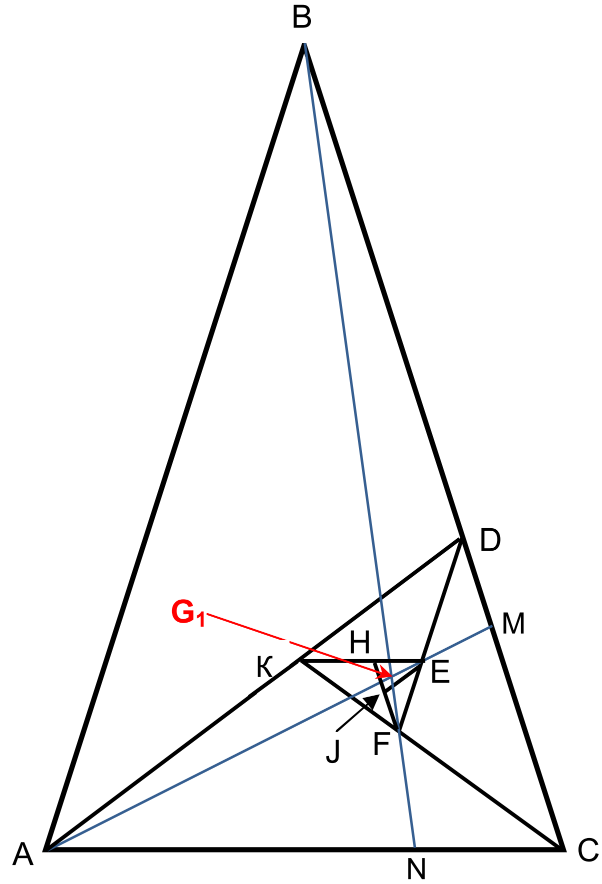
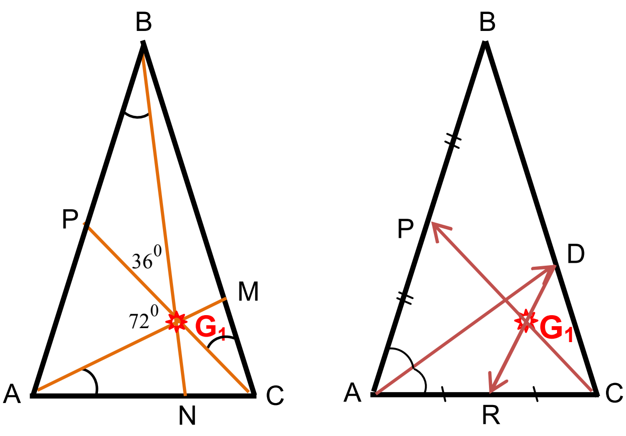


Рис. 5. Геометрическое нахождение *золотого полюса* G остроугольного золотого треугольника

28. Геометрическое нахождение золотого полюса. 2. Приведу ещё один способ построения первого золотого полюса. Он значительно проще, представленного выше.

Используем композицию $R^{2\cdot108}{}_{G1}(G_1B) \circ \Pi^{\varphi^2}$ = G_1C. Продолжим линию G_1C до пересечения со стороной AB в точке P (рис. 6 а). Угол $PG_1B = 36^0$, угол $PG_1A = 72^0$, что следует из примененной композиции. Площадь ΔPG_1B равна $S_{PG1B} = 0{,}5PG_1 \cdot G_1B \cdot \sin 36^0$, площадь ΔPG_1A равна $S_{PG1A} = 0{,}5PG_1 \cdot G_1A \cdot \sin 72^0$. Вследствие того, что отрезок $G_1A = \varphi \cdot G_1B$ и $\sin 36^0 = \varphi \cdot \sin 72^0$, то $S_{PG1B} = S_{PG1A}$. Из равенства площадей треугольников следует, что AP = PB. Поэтому отрезок CP является медианой треугольника ABC. Эта медиана проходит через первый золотой полюс G_1.

Композиция $R^{108}{}_{G1}(ABC) \circ \Pi^{\varphi}$ = CAD (рис. 5). Следовательно, через золотой полюс G_1 будет проходить медиана DR треугольника CAD.



а) б)

Рис. 6. Геометрическое нахождение *первого золотого полюса* G_1 остроугольного золотого треугольника

Полученные результаты позволяют сформулировать наиболее простой способ построения первого золотого полюса.

Для нахождения первого золотого полюса G_1 достаточно в треугольнике ABC провести биссектрису AD и провести две медианы CP и DR (рис 5.б).

Первый золотой полюс G_1 лежит в пересечении прямых CP и DR.

29. Золотой полюс G_1 (= точка Брокара). Наблюдение остроугольного золотого треугольника открывает одну замечательную особенность первого золотого полюса G_1 – углы ABG_1, CAG_1 и BCG_1 равны (рис. 7). Обозначим их величину буквой δ.

Покажем равенство отмеченных углов. Первые два угла равны δ потому, что треугольники AG_1B и AG_1C подобны. В треугольнике CG_1B угол CG_1B равен 144^0, так как $R^{2\cdot 108}_{G1}(G_1B) \circ \Pi^{\varphi^2} = G_1C$. Поэтому угол BCG_1 равен $36^0 - (36^0 - \delta) = \delta$. Итак, все три отмеченные угла равны δ.

В 1816 г. немецким математиком и архитектором Августом Крелле (1780–1855) была поставлена и решена задача найти в треугольнике ABC точку Ω так, чтобы угол ΩAB = угол ΩBC = угол ΩCA.

В1875 году французский математик Анри Брокар (1845–1922) поставил и решил подобную задачу нахождения точки Ω. Брокар являлся автором наиболее полного справочника по замечательным кривым.

Точку Ω обычно называют *точкой Брокара*, а угол δ, равный каждому из углов ΩAB, ΩBC и ΩCA, называют *углом Брокара*.

Было бы правильнее исправить сохраняющуюся несправедливость и называть точку Ω точкой Крелле–Брокара [2].

Приведенный краткий экскурс в историю математики показывает, что первый золотой полюс G_1 совпадает с точкой Брокара. Отсюда следует вывод, все свойства точки Брокара свойственны и золотому полюсу в золотом треугольнике.

Заключая этот пункт, назовем угол δ *углом золотого полюса*.

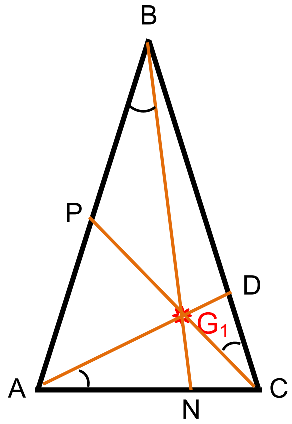


Рис. 7. Соответствие золотого полюса G_1 точке Крелле- Брокара

30. Геометрическое нахождение второго золотого полюса. С углом золотого полюса δ связано одно интересное преобразование, позволяющее по первому золотому полюсу G_1 геометрически построить второй золотой полюс G_2.

Отобразим отрезки AG_1, BG_1 и CG_1 относительно биссектрис углов A, B и C. Полученные отрезки сходятся во втором золотом полюсе G_2 (рис. 8). Доказательство этого утверждения можно найти в книге [4]. Ограничусь несколькими дополнительными замечаниями.

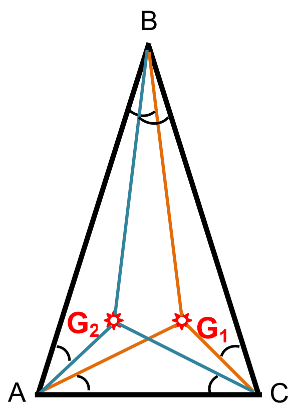


Рис. 8. Золотые полюса треугольника

Преобразование $G_1 \to G_2$ обратимо, то есть примененное к полюсу G_2 оно дает полюс G_1: $G_2 \to G_1$.

Преобразования $G_1 \leftrightarrow G_2$ называют изогональным сопряжением, а центры G_1 и G_2 изогонально сопряженными.

Для остроугольного золотого треугольника существует ровно один первый золотой полюс, а также ровно один второй золотой полюс [4].

31. Вычисление угла золотого полюса. Рассмотрим угол золотого полюса δ = PCB (рис. 7). Отрезок CP является медианой треугольника ABC. Её длина вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{CP^2 = m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{\Phi + 3}{4}}.$$

Используя это значение медианы и теорему косинусов для треугольника BCP, получаем формулу для расчета угла золотого полюса

$$\cos\delta = \frac{(3\Phi - 1)\sqrt{\Phi + 3}}{2(\Phi + 3)} = \frac{(3 - \varphi)\sqrt{3 - 2\varphi}}{2\varphi(1 + 3\varphi)}.$$

Расчёт даёт следующее значение искомого угла золотого полюса для остроугольного золотого треугольника:

$$\boxed{\delta \approx 26{,}27^{\circ} \approx 26^{\circ}16'}$$

32. Тригонометрические функции угла золотого полюса. 1. Используя значение косинуса угла δ и основное тригонометрическое тождество, получаем выражение для синуса угла золотого полюса

[2] Внимательный любитель математики вполне найдет параллель между общепринятым названием этой точки и названием формулы Бернулли–Бине, о чем говорилось в статье [2].

$$\sin\delta = \frac{\sqrt{6\Phi+7}}{2(\Phi+3)} = \frac{\sqrt{7-\varphi}}{2(1+3\varphi)}.$$

2. Зная выражения для синуса и косинуса угла золотого полюса можно получить формулы для других тригонометрических функций. Приведу без вывода выражение только для котангенса

$$ctg\delta = ctgA + ctgB + ctgC = 2ctg72^0 + ctg36^0 = ctg\left(\frac{4-\Phi}{\sqrt{3-\Phi}}\right) = ctg\left(\frac{4\varphi-1}{\sqrt{3-4\varphi}}\right).$$

33. Тригонометрические тождества. С углом золотого полюса δ можно связать несколько тригонометрических тождеств.

1. Стороны треугольника BG_1C (рис. 7) пропорциональны синусам противолежащих углов (теорема синусов)

$$\frac{BG_1}{CG_1} = \frac{\sin\delta}{\sin(B-\delta)}, \qquad \frac{CG_1}{AG_1} = \frac{\sin\delta}{\sin(C-\delta)}, \qquad \frac{AG_1}{BG_1} = \frac{\sin\delta}{\sin(A-\delta)}.$$

Перемножая представленные равенства, получаем

$$\frac{\sin^3\delta}{\sin(A-\delta)\sin(B-\delta)\sin(C-\delta)} = \frac{\sin^3\delta}{2\sin(72^0-\delta)\sin(36^0-\delta)} = 1.$$

2. Обозначим радиусы окружностей, описанных около треугольников BG_1C, AG_1C, и AG_1B, соответственно через R_a, R_b и R_c. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности. Следовательно

$$AG_1 = 2R_c\sin\delta, \qquad BG_1 = 2R_a\sin\delta, \qquad CG_1 = 2R_b\sin\delta.$$

Из данных равенств вытекает, что

$$AG_1\cdot BG_1\cdot CG_1 = 8R_aR_bR_c\sin^3\delta.$$

3. Стороны треугольника ABC можно выразить следующим образом

$$BC = 2R_a\sin BG_1C = 2R_a\sin(180^0-\delta-B+\delta) = 2R_a\sin B,$$

$$AC = 2R_b\sin C, \qquad AB = 2R_c\sin A.$$

Перемножим эти равенства

$$AC\cdot BC\cdot AB = 8R_aR_bR_c\sin A\sin B\sin C.$$

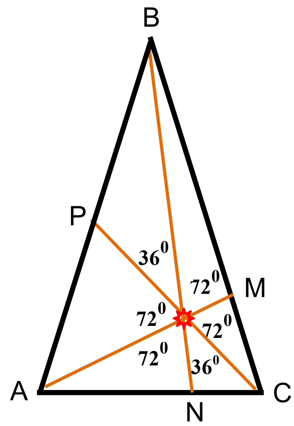


Рис. 9. Распределение углов вокруг золотого полюса G_1.

Пусть R – радиус описанной окружности около треугольника ABC, S – площадь этого треугольника, тогда $AC\cdot BC\cdot AB = 4RS$ и $S = 2R^2 \sin A\cdot\sin B\cdot\sin C$, поэтому получаем следующую изящную зависимость

$$R^3 = R_aR_bR_c.$$

4. Объединяя результаты пунктов 2 и 3, приходим к ещё одному любопытному равенству

$$AG_1\cdot BG_1\cdot CG_1 = 8R^3\sin^3\delta.$$

5. С золотым полюсом G_1 связана композиция $R^{108}_{G_1}(BN) \circ \Pi^{\varphi}$ = AM, поэтому вокруг него углы распределяются, как показано на рис. 9.

Одна часть прямой AM, проходящей через точку G_1, а именно отрезок AG_1, является биссектрисой угла PG_1M, другая часть этой прямой – отрезок G_1M, является биссектрисой угла BG_1C.

34. Педальный (подéрный) треугольник. В остроугольном золотом треугольнике ABC неожиданным образом обнаруживается причудливо расположенный треугольник, подобный исходному треугольнику. Нахождение этого треугольника стало возможно благодаря открытию золотого полюса.

Рассмотрим *педальный треугольник* $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются проекции золотого полюса G_1 на стороны ΔABC (рис. 10).

Покажем, что педальный треугольник точки G_1 относительно остроугольного золотого треугольника подобен последнему.

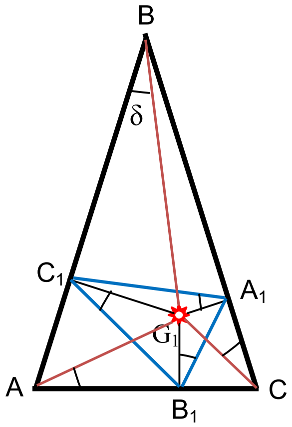


Рис. 10. Педальный треугольник $A_1B_1C_1$.

Опишем окружности около каждого из полученных четырехугольников $AB_1G_1C_1$, $BC_1G_1A_1$ и $CA_1G_1B_1$. Отрезки AG_1, BG_1 и CG_1 являются диаметрами этих окружностей. Пусть $B_1C_1 = a_1$, $A_1C_1 = b_1$ и $A_1B_1 = c_1$, тогда

$$\frac{a_1}{\sin A} = AG_1, \qquad \frac{a}{\sin A} = 2R, \qquad \to \qquad \frac{a_1}{a} = \frac{AG_1}{2R},$$

где *R* – радиус описанной около ΔABC окружности. Аналогично

$$\frac{b_1}{b} = \frac{BG_1}{2R}, \qquad \frac{c_1}{c} = \frac{CG_1}{2R}.$$

Так как $R^{108}{}_{G1}(BG_1) \circ \Pi^{\varphi} = AG_1$ и $R^{2\cdot 108}{}_{G1}(BG_1) \circ \Pi^{\varphi^2} = CG_1$, то из приведенных выше равенств получаем

$$a_1 / b_1 = 1, \qquad a_1 / c_1 = \Phi, \qquad b_1 / c_1 = \Phi.$$

Следовательно, $\Delta A_1B_1C_1$ является равнобедренным и подобен ΔABC.

Остается выяснить коэффициент сжатия *k*. В равенства

$$\frac{a_1}{a \cdot AG_1} = \frac{b_1}{b \cdot BG_1} = \frac{c_1}{c \cdot CG_1} = \frac{1}{2R}$$

подставим значения AG_1, BG_1 и CG_1 (см. п. 9). В итоге получим

$$\frac{a_1}{c} = \frac{b_1}{a} = \frac{c_1}{b} = \sin\delta.$$

Таким образом, $\Delta A_1B_1C_1$ и ΔABC подобны с коэффициентом подобия $k = sin\delta \approx 0{,}4426$.

Последнее равенство позволяет записать формулу для отношения площадей этих треугольников

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \sin^2\delta\,.$$

В силу того, что при преобразовании подобия сохраняются отношения отрезков и величины углов, то треугольник проекций $A_1B_1C_1$ золотого полюса G_1 и исходный треугольник ABC имеют равные углы золотого полюса δ.

Полученные результаты интересны тем, что обнаруживают в остроугольном золотом треугольнике замысловато расположенный подобный треугольник. Причем, между этими треугольниками возможен центрально-подобный поворот вокруг золотого полюса треугольника ABC. Композиция, переводящая один треугольник в другой, выглядит следующим образом:

$$R^{90-\delta}{}_{G1}(BG_1) \circ \Pi^{sin\delta} = C_1G_1.$$

Вполне возможно, дальнейшее исследование педального треугольника $A_1B_1C_1$ откроет взору математиков неизведанные глубины связи этого треугольника с исходным остроугольным золотым треугольником ABC.

Вне всякого сомнения, результаты этого пункта в геометрическом смысле справедливы и для второго золотого полюса G_2.

35. Окружностно-подобный золотой треугольник. Этот пункт посвящен до сих пор неизвестному свойству остроугольного золотого треугольника. Речь пойдет о том, каким необычным образом в первом золотом полюсе G_1 обнаруживается второй золотой полюс G_2, принадлежащий другому треугольнику.

Опишем около треугольника ABC окружность (рис. 11). Отметим точки повторного пересечения прямых линий AG_1, BG_1 и CG_1 с описанной окружностью. Обозначим эти точки соответственно A_2, B_2 и C_2. Соединим их отрезками и докажем, что полученный треугольник $A_2B_2C_2$ подобен исходному треугольнику ABC.

Угол ACC_2 равен углу AA_2C_2, а угол BCC_2 = угол AA_2B_2 = δ. Следовательно, углы ACB и $B_2A_2C_2$ равны.

Угол CBB_2 равен углу CC_2B_2, а угол ABB_2 = угол CC_2A_2 = угол CAA_2 = δ. Следовательно, углы ABC и $A_2C_2B_2$ равны.

Это означает, что треугольники ABC и $A_2C_2B_2$ подобны. На самом деле доказано большее. Так как эти треугольники вписаны в одну окружность – они не только подобны, они равны.

Общий итог, – треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ равны между собой и подобны треугольнику $A_1B_1C_1$.

Назовем полученный треугольник $A_2C_2B_2$ *окружностно-подобным остроугольным золотым треугольником*. Такое название восходит к методу построения этого треугольника.

Полученные в этом разделе результаты приводят к двум следствиям.

Из построения окружностно-подобного остроугольного золотого треугольника $A_2C_2B_2$ следует, что его второй золотой полюс G_2 совпадает с первым золотым полюсом G_1 исходного треугольника ABC. Этот результат можно объяснить и тем, что золотые полюса G_1 и G_2 являются изогонально сопряженными.

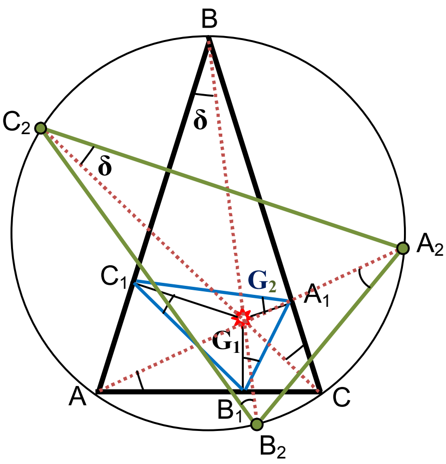


Рис. 11. Окружностно-подобный треугольник $A_2B_2C_2$.

Треугольник $A_2C_2B_2$ можно получить, поворачивая треугольник ABC против часовой стрелки вокруг центра описанной окружности на двойной угол золотого полюса, то есть на угол 2δ ≈ 52,54º.

Итак, золотой полюс G_1 треугольника ABC и описанная окружность около этого треугольника порождают окружностно-подобный остроугольный золотой треугольник $A_2C_2B_2$, золотой полюс G_2 которого совпадает с золотым полюсом G_1 треугольника ABC.

36. Напоминание. В предыдущей работе [1] впервые было показано, что большое и малое числа золотой пропорции Φ и φ естественным образом *расщепляются* на другие иррациональные числа

$$\Phi = 1{,}618033\ldots = \Phi_2 + \Phi_0 = 1{,}170820\ldots + 0{,}447213\ldots = \Phi_1 + 2\Phi_0 = 0{,}723606\ldots + 0{,}894427\ldots$$

и

$$\varphi = 0{,}618033\ldots = \varphi_2 + \varphi_0 = 0{,}170820\ldots + 0{,}447213\ldots = \varphi_1 + 2\varphi_2 = 0{,}276393\ldots + 0{,}341640\ldots$$

Обнаруженное расщепление вскрыло гармоничную внутреннюю структуру золотых чисел. Помимо этого оно породило *золотую последовательность ΦG*, простирающуюся в обе стороны от ядра $\Phi_0 = \varphi_0 = 1/\sqrt{5} = 0{,}447213\ldots$[2]. Начальные члены этой последовательности, расходящиеся от этого ядра, представляются следующими иррациональными числами

… 0,105572..., 0,170820..., 0,276393…, **0,447213…,** 0,723606…, 1,170820…, 1,894427…, **…**

В настоящее время любители золотого сечения публикуют различные последовательности, так или иначе связанные с золотыми числами. Все эти последовательности имеют искусственное происхождение, возникая в угоду какой-либо заранее придуманной задачи.

Отличие золотой последовательности *ΦG* от других заключено в том, что она рождается непринужденным образом в недрах золотых чисел Φ и φ, а её члены удивительным образом непосредственно связаны с золотым полюсом геометрических фигур. Это говорит о глубоких корнях и естественном происхождении последовательности *ФG*.

37. Координаты золотых полюсов. Координаты золотых полюсов G_1 и G_2 можно определить аналитически.

Поместим начало прямоугольной системы координат в вершину A = A(0, 0) треугольника ABC (рис. 12). Если длина стороны AC равна единице, а длины сторон AB и BC равны Φ, то абсциссы и ординаты точек $G_1(x_1, y_1)$ и $G_2(x_2, y_2)$ имеют следующие значения:

$$x_1 = \frac{3-\varphi}{6-4\varphi} = 0.675186\ldots, \qquad y_1 = \frac{\sqrt{2-\varphi}}{6-4\varphi} = 0.333224\ldots,$$
$$x_2 = \frac{3-3\varphi}{6-4\varphi} = 0.324813\ldots, \qquad y_2 = \frac{\sqrt{2-\varphi}}{6-4\varphi} = 0.333224\ldots.$$

Так как золотые полюса симметричны относительно большей высоты *h* треугольника ABC, то вполне естественно $x_1 + x_2 = 1$. Примечательно отношение этой высоты треугольника к значению ординаты золотых полюсов, – $h/y_1 = h/y_2 = Φ + 3 = 4{,}618033\ldots$.

38. Аналитическое решение геометрических задач. Соединим вершины треугольника ABC с противоположными сторонами, проведя отрезки через золотой полюс G_1. Точки A' и B' делят соответственно стороны треугольника BC и AC на отрезки в отношении $1:Ф^2$, а точка C' – сторону AB на отрезки в отношении 1:1 (линия CC' – медиана). Отрезки на сторонах треугольника имеют следующие значения

AB' = $Ф/\sqrt{5} = 0{,}732606\ldots$, B'C = $Ф^{-1}/\sqrt{5} = 0{,}267393\ldots$, CA' = $Ф^0/\sqrt{5} = 1/\sqrt{5} = 0{,}447213\ldots$,
A'B = $Ф^2/\sqrt{5} = 1{,}170820\ldots$, BC' = $Ф/2 = 0{,}809016\ldots$, C'A = $Ф/2 = 0{,}809016\ldots$.

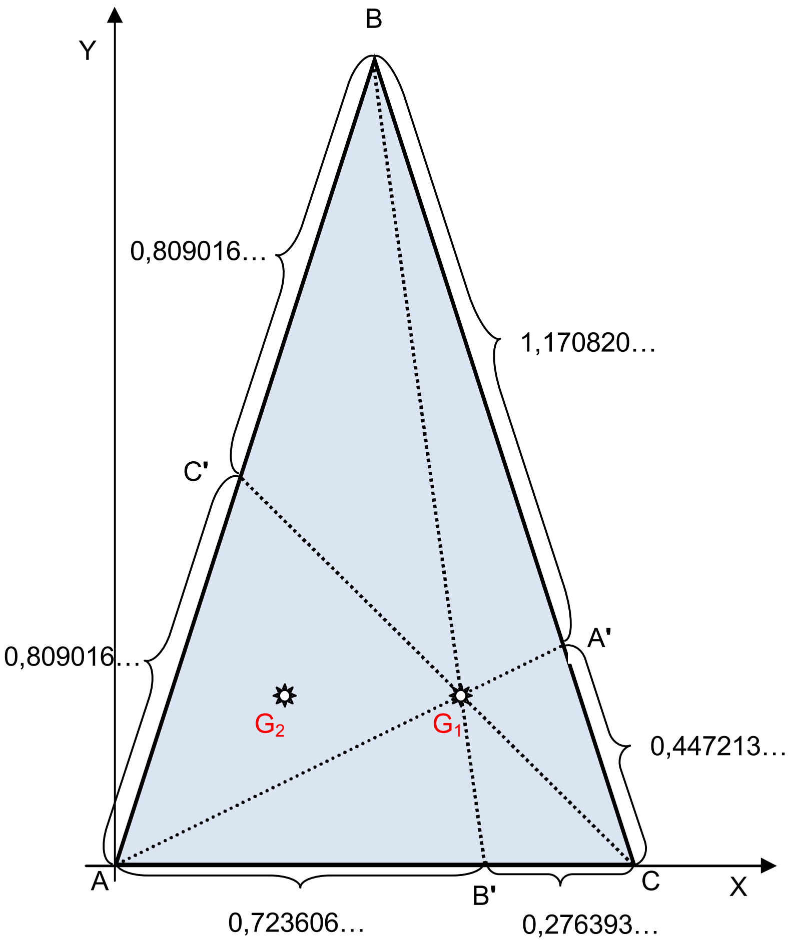


Рис. 12. Связь членов золотой последовательности *ФG* с разбиением сторон остроугольного золотого треугольника через золотой полюс G_1.

Все числа, кроме половины большого золотого числа 0,809016… являются членами золотой последовательности *ФG*.

Для второго золотого полюса G_2 справедливы аналогичные зеркальные разбиения сторон треугольника.

Следует отметить одну особенность, присущую треугольникам, полученным в результате проведения отрезков AA', BB' и CC'.

Площадь треугольника ABC разбита на две пары подобных треугольников. Подобны треугольники ABA' и B'G_1C, а так же подобны треугольники AG_1B' и CG_1A'. Коэффициент сжатия *k* (подобия) двух первых треугольников равен $\frac{\sqrt{5-2Ф}}{Ф+3} \approx 0{,}288$, а двух последних – $\varphi \approx 0{,}618$.

Если соединить точки A' и B', то получим треугольник B'A'C, подобный исходному с коэффициентом сжатия $k = 1/(\Phi+2) \approx 0{,}277$.

Подводя итог проведенному исследованию скажу, что числа золотой последовательности *ΦG*, значения координат золотых полюсов x_1, x_2, y_1 (y_2) и геометрические свойства остроугольного золотого треугольника говорят об их глубокой взаимной связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Белянин В.С.* Таинство чисел золотой пропорции. 1. Тонкая структура // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2011. http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=18&sm=2
2. *Белянин В.С.* Таинство чисел золотой пропорции. 2. Удивительная числовая последовательность // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2011. http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=21&sm=2
3. *Белянин В.С.* Таинство чисел золотой пропорции. 3. Секрет золотого полюса // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2011. http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=33&sm=2
4. *Прасолов В.В.* Точки Брокара и изогональное сопряжение (Серия «Библиотека «Математическое просвещение»). – М.: МЦНМО, 2000.