С.Л. Василенко

Треугольники и золотые чевианы

«Мне не надо слона в удаве... Мне нужен такой барашек, чтобы жил долго».
"Маленький принц". Антуан де Сент-Экзюпери.

Треугольники – чрезвычайно интересные геометрические объекты.

Они объединяют в себе множество разнообразных теорем и формул, устанавливающих взаимосвязи сторон, углов, высот и прочих элементов [1].

Особенно впечатляет наличие тысяч характерных точек [2–4]. С их собственным структурированием и гармоничными соотношениями.

По сути, на сегодня мы имеем целый кладезь оригинальных свойств, которые можно по праву отнести к проявлению уникальной алгебраически-геометрической симметрии.

Треугольник – первая геометрическая фигура, встречающаяся в древних орнаментах.

Изображения и задачи на треугольники встречаются в папирусах, старинных индийских книгах.

Треугольник – одна из первых плоских фигур. Отсюда и символ поверхности вообще.

По Платону «всякая прямолинейная поверхность состоит из треугольников» [5] – строительных блоков космического мироздания.

Тренога (штатив, теодолит) своим минимальным количеством опор образует плоскость. Поэтому никогда не шатается. В отличие от стола или стула о четырёх ножках. Хотя устойчивой относительно опрокидывания всё же является 4-ножковая конструкция.

С треугольником больше сопоставляется геометрическое выражение тройки как гармоничного результата взаимодействия единства и дуальности.

Согласно воззрениям античного ученого Никомаха «Тройка в сравнении со всеми остальными числами обладает исключительной красотой и благолепием. Прежде всего, она первая в действительности явила возможности единицы: нечетность, совершенство, пропорцию, единство, предел... Исключительность тройки в том, что она является суммой двух начальных <натуральных> чисел и суммой их обоих» [6].

Золотоносные треугольники. Плоский геометрический треугольник часто называют золотым, если отношение двух его сторон равно константе золотого сечения $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$.

Поскольку для однозначной идентификации данной фигуры такого условия мало, его обычно добавляют равнобедренностью в двух вариантах:

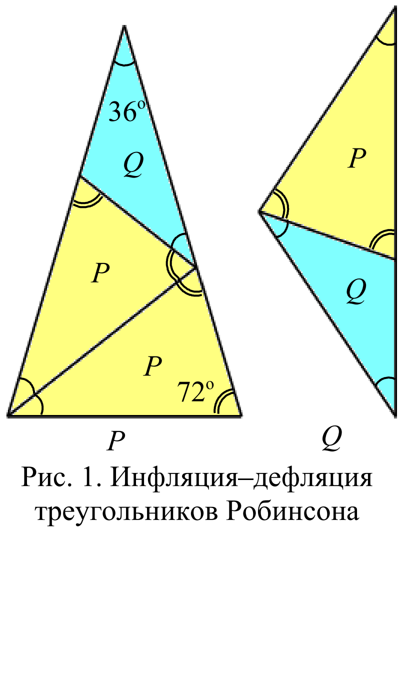

Рис. 1. Инфляция–дефляция треугольников Робинсона

а) остроугольный треугольник с отношением сторон – $\Phi:\Phi:1$. Это наиболее распространённое название золотого треугольника [7, 8].

б) тупоугольный треугольник со сторонами – 1 : 1 : Ф.

Это, так называемые, *треугольники Робинсона* с углами $P(36^{\circ}, 72^{\circ}, 72^{\circ})$ и $Q(108^{\circ}, 36^{\circ}, 36^{\circ})$. У Воробьева [9, с. 100] они называются *треугольниками золотого сечения* (ЗС).

Инфляция (склеивание) и дефляция (разрезание) приводит к линейным размерам в Ф раз больше или меньше исходных фигур (рис. 1).

В виду особых гармоничных признаков они используются в задаче на замощение плоскости [10], известной как проблема паркета, а также при размещении композиций по диагонали через центр.

Треугольники Робинсона действительно замечательны в своих свойствах. Но вот в терминологическом аспекте наделения их золотоносностью не всё очевидно.

Во всяком случае, воочию проявляется отсутствие преемственной связи при мягкой (непрерывной) трансформации от линейного отрезка с точкой ЗС к плоскому треугольнику путем бесконечно малого вынесения точки ЗС за пределы единичного отрезка.

В этом смысле рассмотренные выше две фигуры являются скорее исключением, чем общим правилом золотоносной гармонии треугольников.

При переходе от линии к плоскости и наоборот продолжение ЗС логично искать, прежде всего, из условия сохранения плавности такого перехода. – Когда точка ЗС на отрезке становится пределом аналогичной точки треугольника при его сворачивании в одну линию, например, если тупой угол → 180^o.

Треугольники Робинсона этим свойством не обладают, а являются отдельным самостоятельным "золотоносным аттрактором". Если их как-то и называть, то предпочтительнее – треугольниками золотого сечения (по Воробьеву), подразумевая, что основной "золотой треугольник" – фигура, непосредственно взаимосвязанная с точкой ЗС на отрезке вытекающая из неё в предельных переходах.

При этом у нас сохраняется преемственность между линией и плоскость.

А то, что на плоскости могут появляться самостоятельные объекты со свойствами ЗС, вполне очевидно, поскольку мы выходим на иной уровень размерности, где уже присутствуют не только линейные отношения, но и площадные признаки пропорции.

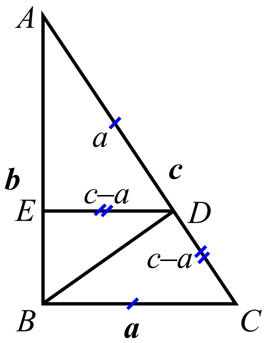

Рис. 2. "Золотой" треугольник Кеплера

К "золотоносному аттрактору", имеющему более выраженную преемственно-онтологическую связь с ЗС, можно отнести прямоугольный "золотой" треугольник, описанный в работе [11] на языке пропорций: гипотенуза c так относится к меньшему катету a, как этот катет относится к его дополнению $c-a$ до гипотенузы (рис. 2).

Из подобия треугольников ΔABC и ΔABD вытекает еще одна альтернативная пропорция: больший катет (высота) b "золотого" треугольника является средним геометрическим между его гипотенузой c и меньшим катетом a.

В литературе по пирамидам его называют Δ Кеплера или Δ Прайса [12].

Это единственный прямоугольный треугольник, стороны которого образуют геометрическую пропорцию $c:b=b:a$ и вытекающую из этого геометрическую прогрессию сторон $a:b:c=1:\sqrt{\Phi}:\Phi$ [13].

Что касается треугольников общего вида (не обязательно прямоугольных), со свойством геометрической пропорции $c:b=b:a$ их существует великое множество, образуя любопытную резольвенту [12, 14].

Если, например, зафиксировать $c=1$ и золотоносное отношение двух сторон $b/a=\Phi$, то треугольники определяются с помощью обычной окружности [15, 16].

Золотые чевианы.

Чевиана – прямолинейный отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной ей стороне или её продолжении.

Примеры: биссектрисы, медианы, высоты и другие подобные отрезки.

Их великое множество. Не все они равнозначны в проявлении своих свойств.

Но вот чевианы, проходящие через золотые сечения (ЗС) сторон, пока не прижились.

Довольно странно и, скажем, несправедливо, учитывая необыкновенные свойства ЗС.

Попробуем восполнить этот пробел.

Немного перефразируя маленького принца Сент-Экзюпери, «Нам не нужно сечение удава. Даже золотое. Нам нужна такая чевиана, чтобы жила долго».

Дадим следующие определения:

Определение 1. Чевиана называется золотой, если она проведена через точку золотого сечения соответствующей стороны треугольника.

Определение 2. Чевиана называется внутренней, если она размещена внутри треугольника.

На отрезке допустимо расположить две точки золотого сечения симметрично относительно середины этого отрезка. Поэтому из каждой вершины треугольника можно провести две внутренние золотые чевианы.

Кроме того, на оба продолжения стороны можно провести ещё по две золотых чевианы через точки внешнего деления отрезка в соотношении золотого сечения.

Чтобы не быть пустым звуком и как-то оправдывать свой статус, золотые чевианы должны, прежде всего, значимо отличаться от других своих сородичей. Желательно для треугольника общего вида, а не только частных золотоносных случаев.

Одной из таких видных особенностей является следующая теорема.

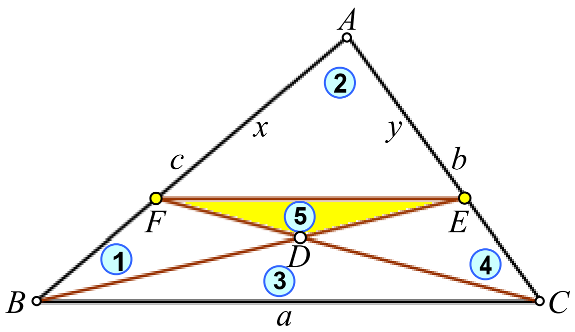

Рис. 3. Треугольник общего вида
с двумя пересекающимися чевианами

Теорема *о золотых чевианах*. Треугольник FED, образованный двумя внутренними чевианами (BE и CF с их пересечением в точке D), имеет наибольшую площадь, если эти чевианы золотые (рис. 3).

Иначе говоря, нужно доказать утверждение

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b} = \Phi \quad \Rightarrow \quad S_{FED} = \max \cdot$$

Без потери общности рассуждений примем площадь исходного треугольника ABC равной 1.

Тогда площадь треугольника, образованного двумя чевианами, равна [17]

$$S = S_{FED} = \frac{xy(b-y)(c-x)}{bc(bc-xy)}. \qquad (1)$$

Для нахождения экстремума данной функции двух аргументов x, y определим частные производные и положим их равными нулю:

$$\begin{cases} \partial S/\partial x = bc(c-2x) + x^2 y = 0, \\ \partial S/\partial y = bc(b-2y) + y^2 x = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Приравняв между собой величины bc из этих равенств, получаем

$$\frac{x^2 y}{2x-c} = \frac{y^2 x}{2y-b}.$$

Отсюда вытекает пропорция

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{b}. \qquad (3)$$

Прежде всего, из этой пропорции следует параллельность $FE \parallel BC$.

Подставим величину $b = cy/x$ из этой пропорции, например, в первое уравнение из (2):

$$x^3 - 2xc^2 + c^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-c)\left(x^2 + cx - c^2\right) = 0 .$$

Очевидное решение $x_0 = c$ означает совпадение чевианы с самой стороной исходного треугольника. При этом треугольник *FED* вырождается, превращаясь в линию.

То есть имеет место экстремум с нулевой площадью.

Следующие два решения приводят к золотому сечению:

$$x_1 = c\frac{\sqrt{5}-1}{2} = c\phi , \qquad x_2 = -c\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -c\Phi .$$

Отрицательная величина x_2 означает деление сторон треугольника в золотом сечении с помощью внешней точки.

Итак, треугольник *FED* имеет максимальную площадь, когда чевианы *BE*, *CF* проходят через точки золотого сечения E, F сторон AC, AB исходного треугольника.

Теорема доказана.

Расчёт площади *S*. Подставив в (1) величину $y = xb/c$ из пропорции (3), имеем

$$S = S_{FED} = \frac{x^2(c-x)}{c^2(c+x)} .$$

Выполнив нормирование переменной $u = x/c$, получаем $S(u) = \dfrac{1-u}{1+u}u^2$ (рис. 4).

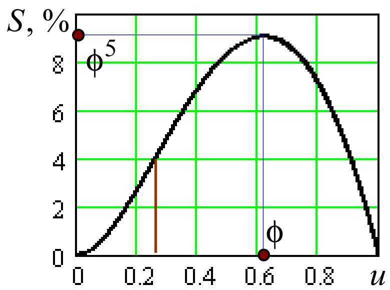

Рис. 4. Изменение площади треугольника (в процентах от исходного), образованного двумя чевианами

Максимальное значение площади численно равно

$$S_{\max} = \frac{1-\phi}{1+\phi}\phi^2 = \frac{\phi^2}{\Phi}\phi^2 = \phi^5 \approx 0{,}09017 .$$

То есть $S_{\max}$ составляет ϕ^5 или около $9\ \%$ от площади исходного треугольника.

Скорость подъёма левой стороны графика сначала растет, потом убывает. Точка перегиба соответствует величине $u = \sqrt[3]{2} - 1 \approx 0{,}26$.

Определение остальных площадей. Площадь исходного треугольника равна $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha = 1$. Тогда площадь верхнего треугольника составляет

$$S_2 = \frac{1}{2}xy\sin\alpha = \frac{1}{2}b\phi \cdot c\phi \cdot \sin\alpha = \left(\frac{1}{2}bc\sin\alpha\right)\phi^2 = \phi^2 .$$

Рассмотрим теперь трапецию *BCEF* (см. рис. 3), которая диагоналями разделена на четыре треугольника, один из которых равен $S_5 = \phi^5$.

В любой трапеции площади треугольников удовлетворяют таким соотношениям [18]:

$$S_1 = S_4;$$

$$S_1 S_4 = S_3 S_5 \quad \text{или} \quad S_4^2 = S_3 \phi^5.$$

Треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

Площадь всей трапеции равна $1 - S_2 = 1 - \phi^2$ или

$$1 - \phi^2 = \phi^5 + 2S_4 + S_3.$$

Решая совместно два последних уравнения, получаем:

$$S_2 = S_4 = \phi^4 \quad \text{и} \quad S_3 = \phi^3.$$

Таким образом, имеем следующее разбиение исходного треугольника на пять более мелких составляющих треугольников (рис. 5).

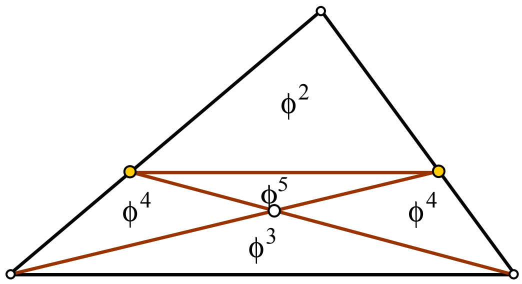

Рис. 5. Разбиение произвольного треугольника единичной площади двумя золотыми чевианами:

Данное разбиение единицы на пять элементов непосредственно следует также из алгебраической формы константы золотого сечения.

Возьмём исходное уравнение для малой константы ЗС $\phi^2 + \phi - 1 = 0$.

Умножим его на квадрат ϕ^2 и преобразуем:

$$\phi^4 + \phi^3 - \phi^2 \ = \ \phi^4 + \phi^3 + \phi - 1 \ = \ 0.$$

Далее умножим на x и подставим выражение $-\phi = \phi^4 + \phi^3 - 1$:

$$\phi^5 + \phi^4 + \phi^2 - \phi \ = \ \phi^5 + 2\phi^4 + \phi^3 + \phi^2 - 1 \ = \ 0.$$

Таким образом, имеем разложение единицы на пять слагаемых, два из которых равны между собой:

$$1 = \phi^5 + \phi^4 + \phi^4 + \phi^3 + \phi^2.$$

Это и есть разбиение произвольного треугольника единичной площади двумя золотыми чевианами на пять треугольников, площади которых численно выражаются различными степенями константы золотого сечения (см. рис. 5).

Свойства золотых чевиан. Точки пересечения золотых чевиан назовём золотыми фокусами (центрами) треугольника.

1) Золотые фокусы лежат на медианах треугольника.

Из вершины треугольника A проведём чевиану через золотой фокус D – точку пересечения двух золотых чевиан (рис. 6).

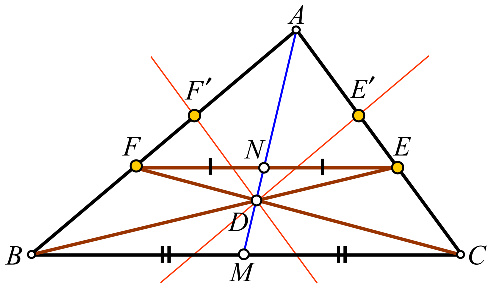

Рис. 6. Геометрическое построение золотых чевиан

Поскольку имеет место параллельность $FE \parallel BC$, то $BCEF$ – трапеция.

Известно следующее *свойство четырех точек*: в любой трапеции точка пересечения диагоналей D, точка пересечения продолжения её боковых сторон A и середины оснований N, M лежат на одной линии.

Иначе говоря, $FN = NE$, $BM = MC$.

То есть AM – медиана треугольника, на которой расположен золотой фокус D.

2) Как и для всех пересекающихся в одной точке чевиан, золотые чевианы и связанная с ними медиана удовлетворяют теореме Жергона [1]:

$$\frac{DM}{AM} + \frac{DE}{BE} + \frac{DF}{CF} = 1; \qquad \frac{AD}{AM} + \frac{BD}{BE} + \frac{CD}{CF} = 2.$$

3) Золотой фокус лежит на пересечении линий, проведенных через точки золотого сечения $\phi^2 b$, $\phi^2 c$ параллельно сторонам c и b соответственно.

Запишем отрезок AD в векторном виде [17]:

$$\overline{AD} = x\frac{b-y}{bc-xy}\overline{AB} + y\frac{c-x}{bc-xy}\overline{AC}.$$

Подставив сюда значения отрезков $x = \phi c$, $y = \phi b$ и применяя основное тождество ЗС $1-\phi = \phi^2$, получаем:

$$\overline{AD} = \phi^2 \cdot \overline{AB} + \phi^2 \cdot \overline{AC}.$$

С учётом правила параллелограмма это означает, что линии, проходящие через точку D параллельно сторонам AB и AC, отсекают на них отрезки длиной соответственно $\phi^2 b$ и $\phi^2 c$ или ещё одни симметричные точки золотого сечения E' и F'.

А это значит, что три золотых фокуса образуют абсолютно сходящиеся линии и отрезки (рис. 7).

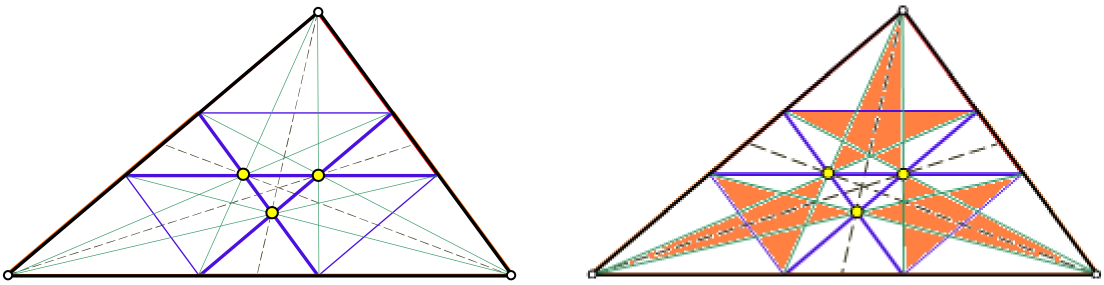

Рис. 7. Абсолютное схождение линий, проходящих через три золотых фокуса треугольника

Это наглядно демонстрируется, в частности совпадением и расположением на одной линии отдельных вершин трёх звёздчатых пятиугольников, выделенных цветом.

При этом золотые фокусы треугольника расположены на золотых чевианах и делят эти чевианы в золотой пропорции.

Такая взаимоувязанная картина (рис. 7) возникла исключительно благодаря тождественно обратимым свойствам константы золотого сечения.

Поэтому другие построения, которые не основаны на золотых чевианах, приводят к расхождению линий и образующих отрезков (рис. 8). В частности, хорошо видно, что концы трёх выделенных цветом звёзд располагаются на прямой линии лишь при золотом сечении.

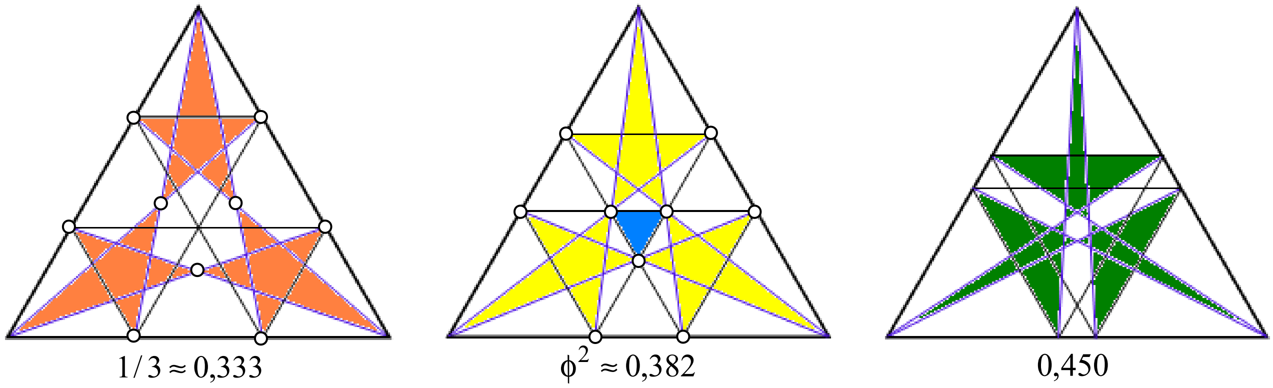

Рис. 8. Иллюстрация разной сходимости чевиан и образующих отрезков:
идеальное сочленение наблюдается лишь при золотом сечении сторон треугольника

Данное свойство характерно не только для равностороннего, но и треугольника произвольной формы (рис. 9)

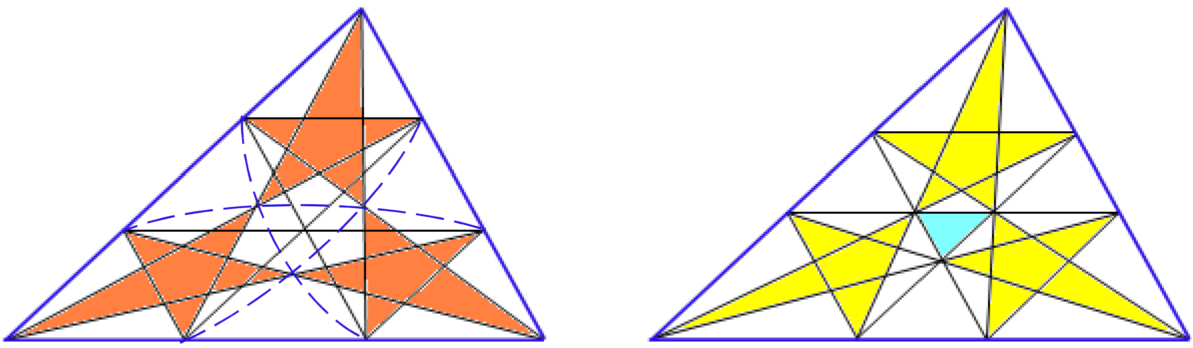

Рис. 9. Сходимость-расходимость чевиан и образующих отрезков
произвольного треугольника

Хотя отрезки, проведенные через точки деления отношением «треть – две трети» $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}$, имеют абсолютное схождение в одной центральной точке (левая фигура на рис. 8).

4) Длины секущих типа FE в Ф раз меньше сторон треугольника и равны $\phi \cdot \{a,b,c\}$. Каждая из них разбивается золотыми фокусами на три части $\{\phi^2, \phi^3, \phi^2\}$. Значит, треугольник, образованный золотыми фокусами, подобен исходному треугольнику, имеет стороны $\phi^4 \cdot \{a,b,c\}$ и площадь $\phi^8 \approx 2{,}13\ \%$ от изначальной площади.

Если исходный треугольник равносторонний, то золотые фокусы находятся на медианах (они же высоты и биссектрисы) на расстоянии $\left(\phi + \phi^4\right)\sqrt{3}/2 = \phi^2\sqrt{3} \approx 0{,}662$ от вершины треугольника.

5) Отношение разности квадратов сторон треугольника к разности квадратов к ним проведенных золотых чевиан равно константе золотого сечения Φ.

Покажем это, исходя из теоремы Стюарта[1].

Запишем два равенства с участием длин d_1, d_2 двух золотых чевиан (см. рис. 3):

$$\begin{cases} a^2 y + c^2 (b-y) = b\left[d_1^2 + y(b-y)\right], \\ a^2 x + b^2 (c-x) = c\left[d_2^2 + x(c-x)\right]. \end{cases}$$

Подставив величины отрезков $x = \phi c,\ \ y = \phi b$, после упрощения получим:

$$\begin{cases} a^2\phi + c^2\phi^2 = d_1^2 + \phi^3 b^2 , \\ a^2\phi + b^2\phi^2 = d_2^2 + \phi^3 c^2 . \end{cases}$$

Вычтем из одного равенства другое.

В результате приходим к сформулированному выше утверждению

$$\frac{c^2 - b^2}{d_1^2 - d_2^2} = \Phi .$$

Аккумулирование полезных признаков треугольно-золотых чевиан можно продолжить и далее.

Но уже сейчас понятно главное.

Перед нами действительно новый и оригинальный геометрический феномен золотоносного содержания.

Чрезвычайно простой в построении и одновременно насыщенный полезной информацией, выходящей далеко за пределы обычной начертательной интерпретации.

Заключение. Геометрия треугольников пополнилась дополнительным набором замечательных и необычных свойств.

Они обусловлены золотыми чевианами, которые проводятся через точки золотого сечения соответствующих сторон треугольника.

Выявленные "золотоносные" особенности находились, что называется, на виду. Даже странно, что к их описанию подошли с таким большим опозданием.

Невольно создаётся впечатление, что тематика золотого сечения в целом остаётся всё ещё мало востребованной и в основном ограниченной кругом энтузиастов.

Тем не менее, даже в такой разработанной и веками "паханой" тематике, как геометрия треугольника, обнаружено много новых интересных взаимосвязей.

Показано, что в разных вариантах деления сторон треугольника чевианами, наиболее совершенное их сочленение и сходимость других образующих отрезков наблюдается лишь при золотом сечении сторон треугольника.

Одновременно золотое сечение проявляет характерные для него минимаксные признаки.

В частности, треугольник, образованный двумя внутренними чевианами, имеет наибольшую площадь, если эти чевианы золотые.

Невольно напрашивается сравнение с явлением филлотаксиса, при котором отдельные компоненты растений в борьбе за свет максимизируют свою площадь контакта с солнцем именно по схеме золотоносной спирали (рис. 10).

---

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Stewart_theorem.

Каждое новое семя выскакивает на спирали по закону золотого сечения, тем самым образуя весьма плотную упаковку.

С этим прекрасно корреспондируется расположение волос на голове человека.

Правда, оптимизация рассредоточения объектов здесь, вероятнее всего, уже решает обратную задачу – солнцезащитную: минимальными средствами распределиться на максимальной площади.

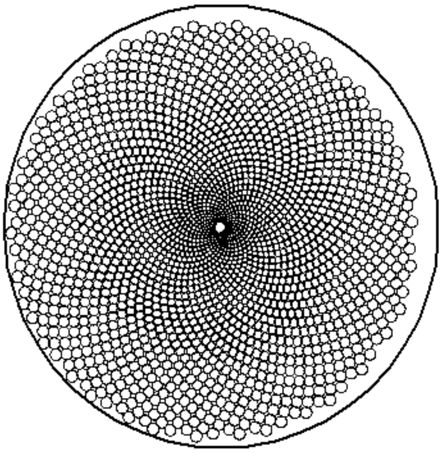

Рис. 10. Золотоносные структуры расположения семян подсолнечника
и волос на человеческой голове

Так что природные закономерности носят общий характер. В том числе благодаря когнитивным механизмам, оттачиваемым миллиарды лет эволюцию живых систем.

Не случайно волосы частенько называют "растительностью" на голове.

А саму голову – "золотой".

И это, конечно, далеко не всё.

Даже не горизонт познания, а только путь к нему.

Продолжение непременно последует...

Литература:

1. *Мякишев Г.* Элементы геометрии треугольника. – М.: Изд-во Моск. центра непрерывного математ. образования, 2002. – 33 с.

2. *Kimberling C.* Encyclopedia of Triangle Centers (ETC). – Last update: 04.03.2010. – http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia.

3. *Kimberling C.* Triangle Centers and Central Triangles // Congr. Numer. – 1998. – **129.** – P. 1–295.

4. *Wolfram* Interactive Demonstrations Project. – Triangles. – http://demonstrations.wolfram.com/topic.html?topic=Triangles&limit=20.

5. *Платон*. Тимей. / Собр. соч. в 4-х т. Т 3. – М.: Мысль, 1994. – С. 432–498.

6. *Никомах Геразский*. Теологумены арифметики. – Новосибирск: АНТ, 2007. – http://www.nsu.ru/classics/bibliotheca/Theologoumena.pdf.

7. *Weisstein E.W.* Golden Triangle // MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html.

8. *Golden triangle* (mathematics) // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_triangle_(mathematics).

9. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи: 4-е изд., доп. – М.: Наука, 1978. – 144 с.

10. *Корепин В.Е.* Узоры Пенроуза и квазикристаллы // Квант. – 1987. – № 6. – с. 2–6.

11. *Щетников А.И.* Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Математ. образование. – 2006. – № 3. – С. 59–71. – http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Pyramis.pdf.

12. *Василенко С.Л.* В поисках математической гармонии мира // Академия Тринитаризма. – М., Эл № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

13. *Василенко С.Л.* Пирамидальная золотоносность // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.02.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=64&sm=2 / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17305, 11.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161930.htm.

14. *Василенко С.Л.* Математические начала гармонии: гармонические треугольники // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16007, 22.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.

15. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии и экстремумы длин площадей и их производных в обобщённой модели золотого сечения. Актуальные проблемы современной науки. – 2010. – № 6. – С.162–164.

16. *Шелаев А.Н.* Обобщённая геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17431, 29.04.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321252.htm.

17. *Maximum Cevian Triangle*. – 2011. – http://perplexus.info/show.php?pid=7441&op=sol.

18. *Weisstein E.W.* Trapezoid // From MathWorld. – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/Trapezoid.html.