С.Л. Василенко

Квадратичная модель золотых степеней

Главное – вовремя остепениться

В недавние шестидесятые, когда я ещё ходил в школу, одна из отечественных газет привела любопытный пример на тему водочных цен:

– Знаете ли вы, что стоимость четвертинки, возведённая в степень, равную стоимости поллитровки, есть число π с точностью до первых трёх знаков?

Действительно, четвертинка стоила тогда – 1,49 руб., а поллитровка – 2,87 руб.

В результате получалась оригинальная степень $1{,}49^{2{,}87} \approx 3{,}14$.

Можно сказать, что вся малопьющая страна, которой, видимо, всегда было мало, жила под знаком "пи".

Конечно, это случайное совпадение. Не более того.

Да и цены те остались в безвозвратном прошлом, уже мало кого сегодня ностальгируя.

И всё-таки... Как гласит эпиграф, главное – вовремя остепениться.

То ли стать степенным и взяться за ум... То ли получить учёную степень...

Но лучше всего в идеале, раз и навсегда зафиксировать цены. Нечто по образу и подобию водочных степеней. Чтобы галопирующая инфляция не съедала те небольшие крохи, которые с большим трудом зарабатывает подавляющая часть жителей нашей планеты.

Возможно, именно поэтому привлекают внимание вечно неизменные математические константы, неподдающиеся влиянию времени.

Они содержат некую основательность. Стабильность и фундаментальность.

Об одной из них – числе золотого сечения – пойдёт речь ниже.

Исходный посыл. При делении целого на две произвольные части или синтезе целого из двух составляющих между ними возникает бесконечное множество отношений.

Одно из них – широко известное золотое сечение (ЗС).

В работе [1] частично затронут вопрос о расширении задачи ЗС в части степенных форм и масштабирования. Кстати, последнее в математике не столь важно.

В виду краткости изложения данного подраздела, некоторые немаловажные моменты остались за рамками рассмотрения, вероятно, порождая отдельные затруднения восприятия.

Разумно восполнить этот пробел и расширить характеристику предметной области.

Два частных случая отражены в работе [2], где предметом обобщения стало уравнение золотого сечения с его преобразованием в две характеристические формы второго порядка:

$$a^2 = da + d^2, \qquad b^2 = 3db - d^2 \cdot$$

На фоне видимой сложности и витиеватости преобразований [2] обе конфигурации в действительности весьма очевидны.

Причём они дают одинаковое решение

$$(a,\ b,\ c) \ = \ d\Phi \cdot \left(1,\ \Phi,\ \Phi^2\right) = d\Phi^3 \cdot \left(\phi^2,\ \phi,\ 1\right),$$

где $c = a + b$ – целое, состоящее из меньшей a и большей b частей; $d = (b - a)$ – их разность.

То есть, мы видим обычное золотое сечение $1 = \phi + \phi^2$, только с масштабированием единичного отрезка в $d\Phi^3$ раз.

Всё здесь достаточно корректно. Излишней является, пожалуй, гиперболизация значимости деления в золотом отношении отрезка произвольной длины по сравнению с его единичным аналогом. Ибо с точки зрения математики это практически одно и то же.

Идентичность упомянутых двух уравнений проявляется в самых разных ракурсах.

Например, по первому характеристическому уравнению можно составить эквивалентное разностное уравнение или обобщённую последовательность f_n с начальными условиями $(f_0, f_1) = (0,\ 1)$, которая непосредственно связана с числами Фибоначчи F_n исключительно по степенному фактору:

$$f_n = df_{n-1} + d^2 f_{n-2} = d^{n-1} F_n .$$

Развитие задачи. Основообразующие триномы $x^2 - x - 1$, $x^2 - 3x + 1$ являются частными случаями более общей квадратичной модели.

Она легко воссоздаётся, если за основу взять явную (аналитическую) формулу Муавра–Бине для чисел Люка $L_n = \Phi^n + (-\phi)^n$ и теорему Виета[1], выражающую коэффициенты квадратного уравнения через сумму и произведение его корней.

Можно также дополнительно ввести коэффициент пропорциональности k.

Изначально задавшись парой корней $\lambda'_{1,2} = k\{\Phi^n,\ (-\phi)^n\}$, приходим к следующему характеристическому уравнению:

$$x^2 - kL_n x + (-1)^n k^2 = 0 , \tag{1}$$

где L_n – числа Люка (n = 0, 1, 2 ...): 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29 ...;
n – степень константы золотого сечения Φ.

Полученное уравнение (1) допустимо именовать «уравнением <моделью> золотых степеней».

Кроме того, можно провести традиционные аналогии между целым и его двумя частями.

Например, на основе геометрического отрезка фиксированной длины.

Так, величина k представляет собой численное выражение целого или длины отрезка в соответствующей метрике или единицах измерения.

Без потери общности рассуждений обычно принимается, что целое равно единице.

В противном случае имеет место обычное линейное масштабирование с коэффициентом пропорциональности k.

Тогда меньшая часть целого составляет

$$a \;=\; \lambda'_1 \phi^{n+2} \;=\; k\Phi^n \phi^{n+2} \;=\; k\phi^2 \;\approx\; k \cdot 0{,}382 .$$

Большая часть – соответственно

$$b \;=\; k - a \;=\; k\phi \;\approx\; k \cdot 0{,}618 .$$

В таблице 1 для обзора представлены некоторые частные случаи модели золотых степеней.

Примечательно, что сумма всех степеней $(-\phi)^i$ равна ϕ:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-\phi)^i = \phi .$$

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Vieta%27s_formulas.

А сумма удвоенных или чётных степеней равна Ф:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i} = \Phi .$$

Имеет место также единичное тождество

$$\sum_{i=0}^{\infty} \phi^{2i+1} = \sum_{i=2}^{\infty} \phi^{i} \equiv 1 .$$

Если это тождество умножить на степень ϕ^n, то получим выражение для этой степени через суммирование последующих степеней [3, с. 108–109]:

$$\phi^n = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{n+2i+1} = \sum_{i=2+n}^{\infty} \phi^{i} .$$

Таблица 1

Начальные параметры уравнения золотых степеней

n	L_n	Квадратный трёхчлен	Корни тринома $\lambda'_{1,2} = \Phi^n,\ (-\phi)^n$	
0	2	$x^2 - 2x + 1$	1, 1	1, 1
1	1	$x^2 - x - 1$	$\Phi,\ -\phi$	1.618, –0.618
2	3	$x^2 - 3x + 1$	$\Phi^2,\ \phi^2$	2.618, 0.382
3	4	$x^2 - 4x - 1$	$\Phi^3,\ -\phi^3$	4.236, –0.236
4	7	$x^2 - 7x + 1$	$\Phi^4,\ \phi^4$	6.854, 0.146
5	11	$x^2 - 11x - 1$	$\Phi^5,\ -\phi^5$	11.090, –0.090
6	18	$x^2 - 18x + 1$	$\Phi^6,\ \phi^6$	17.944, 0.056

Итак, для разных чисел Люка получаем бесконечное множество квадратных уравнений общего вида (1), дающих не только степени золотой константы $\Phi^{\pm n}$, но также их пропорциональное изменение за счёт параметра k.

Отсюда становится ясным происхождение в уравнении квадрата k^2: в результате произведения корней, имеющих одинаковый коэффициент пропорциональности.

Вполне понятным оказываются значения средних коэффициентов 1 и 3, а также смена знака при свободном члене триномов $x^2 - x - 1$, $x^2 - 3x + 1$.

Если k – целое число, то квадратное уравнение имеет целочисленные коэффициенты.

Полученное соотношение вполне подходит под категорию обобщённого квадратичного уравнения (модели <второго порядка>) степеней золотого сечения.

При желании степени образуемых корней $\Phi^{\pm n}$ можно назвать «семейством степеней золотой константы».

Говорить о каких-то проявлениях родовых признаков, типа отношении корней в нашем уравнении $|\lambda_1/\lambda_2| = \Phi^{2n}$, особо не приходится. В силу очевидности.

Единственный отличительный признак здесь неизменно связан с самим присутствием в решение константы Ф.

Вместе с тем подобных золотосодержащих структур существует превеликое множество. Даже в разрезе квадратных уравнений.

Так, модель нечётных коэффициентов квадратного уравнения общего вида $x^2 = px + q$ для любой тройки целых нечётных чисел m, p и $q = \dfrac{5m^2 - p^2}{4}$ приводит к решению $\lambda_{1,2} = \dfrac{p \pm m\sqrt{5}}{4}$ с иррациональностью $\sqrt{5} = \Phi + \phi$.

Например, для $m = 7$ получаем такие пары коэффициентов уравнения:

$(p\ \ q) = (1\ \ 61), (3\ \ 59), (5\ \ 55), (7\ \ 49), (9\ \ 41), (11\ \ 31), (13\ \ 19), (15\ \ 5), (17\ \ –11), (19\ \ –29)$ …

Все они дают решение $\lambda_{1,2} = \dfrac{p \pm 7(\Phi + \phi)}{4}$.

Параллели с квадратным уравнением общего вида. Необходимо отметить, что описанное свойство степеней золотого сечения вовсе не является чем-то уникальным или характерным исключительно для "золотой" модели.

Оно во многом присуще действительным корням квадратного уравнения общего вида.

Так, уравнение $x^2 - px - q = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$.

Образуем обобщённую квадратичную последовательность Люка $L_n = pL_{n-1} + qL_{n-2}$ с начальными условиями $(L_0, L_1) = (2, p)$.

Не сложно показать, что за счёт принятой пары "затравочных" чисел $(2, p)$ данная рекуррентная последовательность допускает простое явное представление своих членов

$$L_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n.$$

Тогда видоизменённое квадратное уравнение $x^2 - kL_n x + (-q)^n k^2 = 0$ имеет корни $\lambda'_{1,2} = k \cdot \lambda_{1,2}^n$, которые равны k-масштабированным степеням исходных корней $\lambda_{1,2}$.

Обычно коэффициент пропорциональности выражается единицей $k = 1$.

В этом случае соответствующее модифицированное уравнение записывается, как $x^2 - L_n x + (-q)^n = 0$, и содержит корни $\lambda'_{1,2} = \lambda_{1,2}^n$.

То есть оно выражает n-е степени корней исходного трёхчлена:

$$x^2 - px - q \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 + 4q}}{2};$$

$$x^2 - L_n x + (-q)^n \quad \Rightarrow \quad \lambda'_{1,2} = \lambda_{1,2}^n.$$

При этом соотношение корней равно $\dfrac{\lambda'_1}{\lambda'_2} = \lambda_1^{2n} \cdot (-q)^{-n}$.

Заметим, что возведение в степень имеет две обратные функции.

Это логарифм и корень n-й степени.

Вместо заключения.

Квадратичная модель позволяет выстраивать любопытные конструкции обобщения квадратного уравнения ЗС, например, в предложенном нами виде $x^2 - kL_n x + (-1)^n k^2 = 0$, где $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ – числа Люка, $(L_0, L_1) = (2,\ 1)$.

Уравнение выражает степени золотой константы $\Phi^{\pm n}$, а при желании одновременно и пропорциональное изменение за счёт параметра k.

За множеством целочисленных степеней $\Phi^{\pm n}$ вполне могло бы прижиться, например, понятие «семейства золотых степеней».

Исследуемый вариант можно рассматривать как частичную реструктуризацию золотого сечения в направлении от частного к общему.

В данном случае он не выходит за пределы чётко ограниченного "золотого" поля и сводится к частичным видоизменениям, как-то: выражению степеней константы ЗС, масштабированию и т.п.

В других случаях, чаще всего происходит коренная ломка структуры ЗС, с переходом на совершенно новое формирование отношений в пропорции и образование иных отличительных конструкций.

Естественно, это требует привлечения новой соответствующей терминологии. Согласно получаемым результатам. И конечно, безо всяких там позолот.

То есть, золотое сечение заканчивается сразу же, как только уходит корень из пяти $\sqrt{5} = \Phi + \phi$. Органичное присутствие именно этой величины в математических формах становится своеобразной визитной карточкой золотого сечения.

С незримым присутствием диагонали $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$ прямоугольника 1×2.

Все иные искусственные позолоты с другими квадратичными иррациональностями становятся «как бы обманчивым источником, неверною водою» (Иер. 15:18).

Их участь чрезвычайно проста – введение новых формообразующих терминов.

Понятных, удобоваримых и сообразных. Без ненужных золотых прикрас.

Литература:

1. *Василенко С.Л.* Реструктуризация золотого сечения: от частного к общему // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17556, 03.07.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161975.htm.

2. *Владимиров В.Л.* О "родовых признаках" обобщенного и классического уравнений золотого сечения для рекурсий 2-го порядка и 2-й степени // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17537, 20.06.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321263.htm.

3. *Алфёров С.А.* По саду "Золотой пропорции". – http://www.sci.aha.ru/ots/alf1.htm.