С.Л. Василенко

Золотая основа локсодромии целующихся кругов

Хорошему танцору любой круг не тесен

Феномен золотого сечения в силу своего образования, прежде всего, имеет непосредственное отношение к математическим объектам. К сожалению, авторы-золотоискатели в последние несколько десятилетий перевели этот увлекательнейший предмет исследования в сферу, весьма отдалённую от истинного содержания ЗС.

На ощупь рассекают произведения искусства.

Произвольно режут на части архитектурные сооружения.

Как заблагорассудится, кромсают музыкальные произведения.

Непостижимо реструктуризируют стихотворные формы.

И так далее. И так далее.

Чего только стоит несчастная голова египетской царицы Нефертити, которую некто испестрил сплошной паутиной всевозможных золотых сечений.

Хотя, нужно признать, что её неестественно удлинённо-вытянутая форма голова весьма далека от гармоничных канонов. Почему и прикрыта убором-одеянием.

Мы не собираемся как-то препятствовать такому необычному золотоносному энтузиазму и увлечению (развлечению).

Уважение к свободе человека выражено в известной пословице: «Вольному – воля, а спасённому – рай». Да и мечтать – полезно. Куда вреднее – не мечтать.

В конечном счёте, предпочтения человека – за ним самим. Он ответствен за свой выбор и пожинает плоды этого выбора. А наши желания не всегда производят нужные действия. Как известно, благими побуждениями <намерениями> выложена дорога в ад.

Тем не менее, смысловые нагрузки "золотой лихорадки" просматриваются весьма слабо, что со временем неизбежно приведёт к её неизбежному естественному угасанию.

Ибо многое там делается не то чтобы, походя. Но как-то уж всё на глазок и без надлежащего обоснования.

На том же художественном полотне можно провести миллиарды разнообразных золотых спиралей с разным шагом. Ну, и что с того?

Кроме того, константа золотого сечения (ЗС) абсолютна в своих уникальных свойствах.

Можно сказать, это фундаментальная мировая константой наивысшего порядка.

Поэтому её проявление в различных структурах также должно быть абсолютным.

Хотя бы с точностью до исчисления радикала $\sqrt{5}$ в обычных компьютерах.

Иначе нет смысла "городить огород".

Другими словами, золотоносность некоторой конструкции или структуры может быть признана таковой, если константа ЗС фигурирует в ней явно на уровне точных вычислений.

В настоящей работе рассматривается именно такая математическая конфигурация объектов. С подобающей геометрической и алгебраической трактовкой.

Локсодромические[1] круги. В "Божественной комедии" Данте Алигьери ад представляет собой девять кругов. А вот математики спокойно оперируют с бесконечным множеством кругов. И ничего...

Так, в геометрии известна бесконечная *локсодромическая последовательность касающихся кругов Кокстера*, которая по замыслу восходит ещё к Декарту.

---

[1] *Локсодрома* (локсодромия**)** – кривая на поверхности вращения, пересекающая все меридианы под постоянным углом. – Линия постоянного курса.

Она устроена так, что любые четыре последовательных круга взаимно касаются попарно [1, 2].

То есть каждый круг в последовательности касается трёх кругов, которые ему предшествуют, а также трёх кругов, которые следуют за ним.

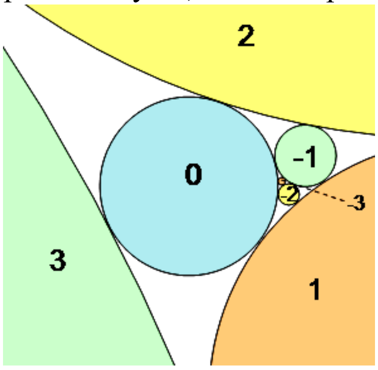


Рис. 1. Демонстрация локсодромических кругов

Например (рис. 1), круг 0 касается как последующих (1, 2, 3), так и предыдущих кругов (–1, –2, –3).

Радиусы кругов образуют геометрическую прогрессию $\ldots R_{-n}, \ldots R_{-1}, R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$.

Любая конфигурация из четырёх последовательных кругов отвечает "круговой" теореме Декарта[2] (1643) [3, 4]:

если четыре круга взаимно касаются в плоскости, то их кривизны $b_j = 1/R_j$, $j = \overline{1,\ 4}$ соотносятся между собой согласно равенству

$$2\sum b_j^2 = \left(\sum b_j\right)^2.$$

Вместо понятия кривизны английский радиохимик и лауреат Нобелевской премии «Содди предпочитал более простой термин *изгиб* <bend>, используемый в его поэме "The Kiss Precise" – "точный поцелуй", где есть такие стихи»[3] [5, с. 31]:

Четыре круга встретились в поцелуе
И тот, который меньше, тот больше изогнут.
Изгиб – это обратная величина
Для расстояния от центра.
Хотя Евклид молчал об их интригах,
Правило большого пальца теперь не нужно.
Изгиб равен нулю у прямой линии
И отрицателен у вогнутой,
А сумма квадратов четырёх изгибов
– Это половина квадрата их суммы.

Таким образом, коэффициент (знаменатель) прогрессии радиусов $v = R_{n+1}/R_n$ и его обратная величина удовлетворяют алгебраическому уравнению [6]

$$2 \cdot \left(1 + v^2 + v^4 + v^6\right) = \left(1 + v + v^2 + v^3\right)^2.$$

Данное уравнение сравнительно легко преобразуется

$$v^6 - 2v^5 - v^4 - 4v^3 - v^2 - 2v + 1 \;=\; \left(v^2+1\right)\cdot\left(v^4 - 2v^3 - 2v^2 - 2v + 1\right) \;=$$
$$= \left(v^2+1\right)\cdot\left[v^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)v + 1\right]\cdot\left[v^2 + \left(\sqrt{5}-1\right)v + 1\right] \;=\; \left(v^2+1\right)\cdot\left(v^2 - 2\Phi v + 1\right)\cdot\left(v^2 + 2\phi v + 1\right)$$

и приводит к следующим действительным и мнимым корням:

$$\lambda_{1,2} = \pm\, i\,;$$

$$\lambda_{3,4} \;=\; \Phi \pm \sqrt{\Phi} \;\approx\; (2{,}890\ \ 0{,}346)\,;$$

$$\lambda_{5,6} \;=\; -\phi \pm \sqrt{-\phi} \;\approx\; -0{,}618 \pm 0{,}786\, i\,.$$

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Descartes'_theorem. – Иногда называют "теоремой целующихся кругов".

[3] in Nature, June 20, 1936.

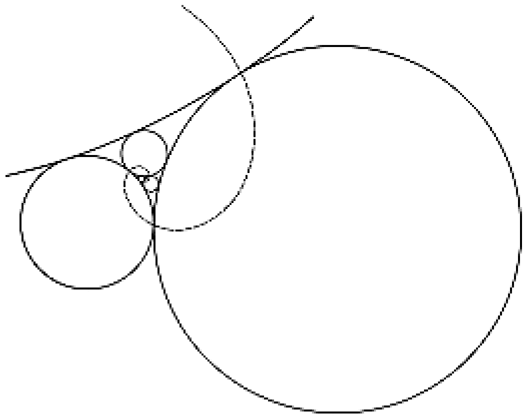
Здесь $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ – константа золотого сечения, $\phi = \Phi^{-1} = \Phi - 1$; $i = \sqrt{-1}$.

Как и следовало ожидать, положительные корни взаимно обратимы:

$$\lambda_3 \cdot \lambda_4 \;=\; \Phi^2 - \Phi \;=\; 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_4 = 1/\lambda_3 \,.$$

Таким образом, радиусы кругов в своей последовательности образуют геометрическую прогрессию с отношением $v = \Phi + \sqrt{\Phi}$ – на основе константы золотого сечения Φ.

Центры окружностей в последовательности лежат на логарифмической (равноугольной) спирали. Как и точки касания.



При обозрении спирали из её центра угол между центрами последовательных кругов составляет

$$\beta = \arccos(-\phi)\,\frac{180}{\pi} \approx 128{,}17^{\mathrm{o}} \cdot$$

Если косинус угла равен $\cos\beta = -\phi$, то его синус $\sin\beta = \sqrt{\phi}$.

Тогда $e^{i\beta} = -\phi + i\sqrt{\phi}$.

Любопытно, что $e^{\pm i\beta}$ – есть корни уравнения $x^2 + 2\phi x + 1 = 0$

Центры кругов лежат на спирали в полярных координатах с радиус-вектором точки $r = e^{\theta \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha}$, где θ – текущий угол отклонения точки от нуля, $\mathrm{ctg}\,\alpha$ – коэффициент, отвечающий за густоту спиральных витков.

Угол α даётся равенством $x = e^{\beta \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha}$, то есть [7]:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\beta}{\ln x} = \frac{\arccos\left(-\Phi^{-1}\right)}{\ln\left(\Phi + \sqrt{\Phi}\right)} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 64{,}62^{\mathrm{o}}.$$

Напомним, что логарифмическая спираль обладает замечательным свойством восстанавливать свою форму после различных преобразований.

Описанная конструкция названа в честь геометра Дональда Кокстера[4], который обобщил двумерный случай на последовательности сфер более высоких размерностей [7].

Целочисленные радиусы. Локсодромическую последовательность кругов δ_n, где каждые четыре последовательных круга взаимно касаются, можно сформировать на базе целых значений их радиусов.

Так, целочисленное расстояние между δ_0 и δ_n кругами (или δ_m и δ_{m+n} для любого m) выражается формулой [8, 9]:

$$d_n = 2(d_{n-1} + d_{n-2} + d_{n-3}) - d_{n-4}\,.$$

[4] Гарольд Скотт Макдональд Кокстер (или Дональд Кокстер) – выдающийся канадский геометр, 1907–2003. Его часто называют "The man who saved geometry" – человеком, который спас геометрию. В 1959 г. на одной из конференций Ж.Дьедоне (из основателей группы Бурабаки), произнес печально известную фразу "Смерть Треугольникам!" Её подхватило поколение молодых математиков, пытаясь уничтожить геометрию на благо алгебры. Возможно, они добились бы своего, если бы не Дональд Кокстер.

Данная рекуррентная форма образует ряд (A045821[5]): –1, 1, 1, 1, 7, 17, 49, 145, 415, 1201, 3473, 10033, 28999...

Четыре корня характеристического полинома $x^4-2x^3-2x^2-2x+1$ всё также равны:

$$\Phi \pm \sqrt{\Phi}, \quad -\Phi' \pm \sqrt{-\Phi'},$$

где $\Phi' = 1-\Phi = -\phi$.

Согласно теореме Бернулли (о последовательном приближении корней) предельное отношение соседних членов последовательности d_n сходится к своему аттрактору – наибольшему по модулю корню:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d_{n+1}}{d_n} = \Phi + \sqrt{\Phi} \approx 2{,}890 .$$

По аналогии с известной формулой Муавра–Бине для чисел Фибоначчи *F*, представляет безусловный интерес явная формула Кокстера на основе биномиальных коэффициентов C_n^m

$$d_n = \sum_{k=0}^{\lceil n/2 \rceil} C_n^{2k} \cdot F_{n-k-2} ,$$

где $C_n^m = \binom{n}{m} = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ – число сочетаний из n по m;

$\lceil \xi \rceil$ – целая часть от величины ξ.

Локсодромические сферы.

Рассмотренный плоскостной вариант последовательности касающихся кругов является наиболее простым частным случаем взаимно касающихся $N+2$ гиперсфер в *N*-мерном Евклидовом пространстве ($N \geq 2$), кривизны которых удовлетворяют общему равенству [7]

$$N \sum b_j^2 = \left(\sum b_j \right)^2 , \tag{1}$$

где выполняются суммирования $N+2$ слагаемых.

Произведя вычитание двух равенств с разной начальной индексацией

$$N\left(b_0^2 + \ldots + b_{N+1}^2\right) - \left(b_0 + \ldots + b_{N+1}\right)^2 = 0 ,$$

$$N\left(b_1^2 + \ldots + b_{N+2}^2\right) - \left(b_1 + \ldots + b_{N+2}\right)^2 = 0 ,$$

можно избавиться от квадратов

$$(b_0 - b_{N+2})(Nb_0 + Nb_{N+2} - b_0 - 2b_1 - 2b_2 - 2b_{N+1} - b_{N+2}) = 0 .$$

Приняв $b_0 \neq b_{N+2}$, имеем

$$(N-1)(b_0 + b_{N+2}) = 2(b_1 + b_2 + \ldots + b_{N+1}) .$$

Конечно, любопытно сравнить поведение локсодромических объектов в плоскости и трёхмерном пространстве ($N = 3$).

[5] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences™ (OEIS™) – http://oeis.org/.

Численное расстояние между сферами в локсодромической последовательности сфер, в которой каждый пять последовательных сфер имеют взаимные контакты, описывается формулой (после деления на 2 и изменения индексной нумерации):

$$D_n = (D_{n-1} + D_{n-2} + D_{n-3} + D_{n-4}) - D_{n-5},$$

образуя ряд (A027674): –1, 1, 1, 1, 1, 5, 7, 13, 25, 49, 89, 169, 319, 601, 1129, 2129...

Характеристический полином $x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1$ этого разностного (возвратного) уравнения имеет явный отрицательный корень –1.

Остальные корни для сокращённого полинома $x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1$ легко находятся путём деления на x^2 и замены $y = x + x^{-1}$:

$$x^2 - 2x + 1 - 2x^{-1} + x^{-2} = \left(x^2 + x^{-2}\right) - 2\left(x + x^{-1}\right) + 1 = \left(y^2 - 2\right) - 2y + 1 = y^2 - 2y - 1,$$

откуда $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Окончательно имеем

$$x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1) \cdot \left[x^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)x + 1\right] \cdot \left[x^2 + \left(\sqrt{2}-1\right)x + 1\right].$$

Сравните с полиномом для кругов:

$$x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = \left[x^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)x + 1\right] \cdot \left[x^2 + \left(\sqrt{5}-1\right)x + 1\right].$$

Итак, все корни уравнения для локсодромической последовательности сфер равны:

$$-1, \quad \lambda \pm \sqrt{\lambda - q'}, \quad \lambda' \pm \sqrt{\lambda' - q'},$$

где $\lambda = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}207$ – положительный корень квадратного уравнения $x^2 - x - q = 0$, $q = \dfrac{1}{4}$ или среднеарифметическое стороны квадрата 1×1 и его диагонали $\sqrt{2}$; $\lambda' = 1 - \lambda$, $q' = 1 - q$.

Предельное отношение соседних членов последовательности D_n сходится к своему аттрактору – наибольшему по модулю корню:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_{n+1}}{D_n} = \lambda + \sqrt{\lambda - q'} = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \approx 1{,}883.$$

Исходя из простого анализа, довольно легко просматривается взаимосвязь форм для кругов и сфер (рис. 2).

Построение очень простое.

Сначала радиусом-диагональю фигуры проводится окружность до горизонтали – оси абсцисс.

Затем полученный отрезок (единица плюс радикал) делится пополам.

Только в случае кругов $q = 1$, $q' = 0$.

Соответствующий "золотой" корень $\lambda = \Phi$ численно равен среднеарифметическому меньшей стороны прямоугольника $1:2$ и его диагонали $\sqrt{5}$.

Примечательно, что в полной записи уравнение (1) преобразуется так, что содержит мнимые корни с их представлением через константу золотого сечения:

$$3\left(1 + q^2 + q^4 + q^6 + q^8\right) - \left(1 + q + q^2 + q^3 + q^4\right)^2 = 2\left(q^2 - \phi q + 1\right)\left(q^2 + \Phi q + 1\right)\left(x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1\right) \cdot$$

Произведение сопряжённых комплексных корней триномов $q^2-\phi q+1$ и $q^2+\Phi q+1$ по теореме Виета равно 1.

То есть своими уникальными свойствами числа золотого сечения как бы понижают степень исходного уравнения, приводя его к более простому виду и выводя на окончательное решение $\lambda+\sqrt{\lambda-q'}\approx 1{,}883$.

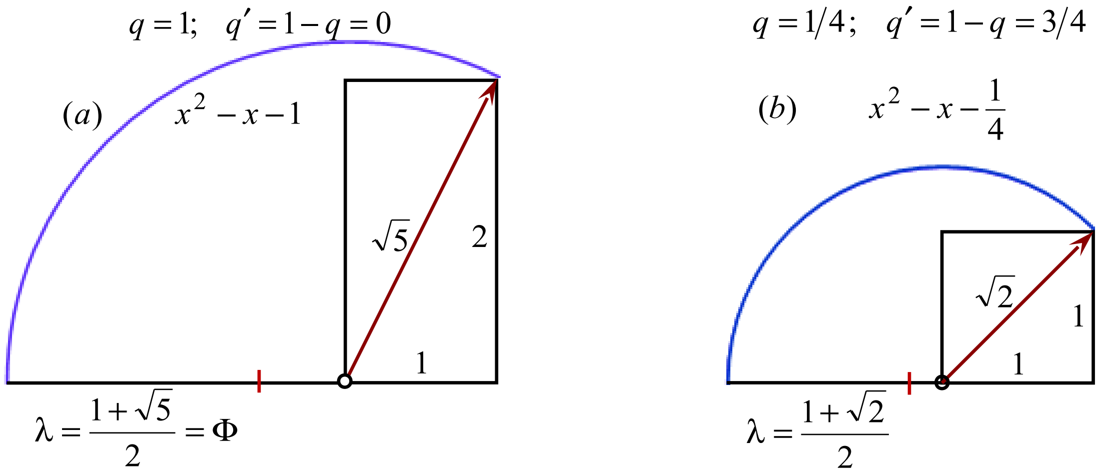


Рис. 2. Построение подосновы λ для аттракторов численного расстояния между кругами (a) и сферами (b) в их локсодромической последовательности

Всё это невольно подводит к мысли о глубинном присутствии золотого феномена Ф в локсодромии касающихся кругов и сфер.

Возможно, всё это имеет прикладную часть в иных областях знаний.

Не случайно, Дональд Кокстер – один из немногих профессиональных математиков, который уделяет внимание золотому сечению в своей геометрии [5, с. 236–252].

Треугольные мотивы (вместо заключения). Итак, известная в геометрии локсодромическая последовательность касающихся кругов Кокстера в своём строении зиждется на константе золотого сечения. Радиусы последовательных кругов образуют геометрическую прогрессию с отношением $\nu=\Phi+\sqrt{\Phi}$.

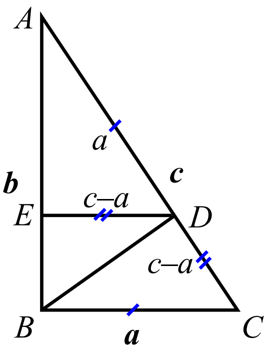


Рис. 3. "Золотой" треугольник Кеплера

Нечто золотого поля для целующихся <касающихся> кругов.

Сочетание двух чисел $(\Phi,\sqrt{\Phi})$, в свою очередь имеет необычное проявление в треугольной тематике [10].

Так, к "золотоносному аттрактору", имеющему более выраженную преемственно-онтологическую связь с ЗС, можно отнести прямоугольный "золотой" треугольник, описанный в работе [11] на языке пропорций: гипотенуза c так относится к меньшему катету a, как этот катет относится к его дополнению $c-a$ до гипотенузы (рис. 3).

Из подобия треугольников ΔABC и ΔABD вытекает еще одна альтернативная пропорция: больший катет (высота) b "золотого" треугольника является средним геометрическим между его гипотенузой c и меньшим катетом a.

В литературе по пирамидам его называют Δ Кеплера или Δ Прайса [12].

Это единственный прямоугольный треугольник, стороны которого образуют геометрическую пропорцию $c:b=b:a$ и вытекающую из этого геометрическую прогрессию сторон $a:b:c=1:\sqrt{\Phi}:\Phi$ [13].

Литература:

1. *Gardner M.* Mathematical Games: The Diverse Pleasures of Circles that Are Tangent to One Another // Sci. Amer. 240 (Jan. 1979), 18–28.
2. *Gardner M.* Mathematical Games: How to be a Psychic, Even if You are a Horse or Some Other Animal // Sci. Amer. 240 (May 1979), 18–25.
3. *Lagarias J.C.*, *Mallows C.L.*, *Wilks A.R.* Beyond the Descartes Circle Theorem // Cornell University Library, 2001. – http://arxiv.org/pdf/math/0101066v1.pdf.
4. *Descartes R.* Oeuvres de Descartes, Correspondance IV, (C. Adam and P. Tannery, Eds.), Paris: Leopold Cerf 1901, 45–50.
5. *Кокстер Г.С.М.* Введение в геометрию: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с. – http://eek.diary.ru/p165970944.htm.
6. *Coxeter's loxodromic* sequence of tangent circles // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Coxeter%27s_loxodromic_sequence_of_tangent_circles.
7. *Coxeter H.S.M.* Loxodromic Sequences of Tangent Spheres // Aequationes Math., 1 (1968), 104–121. – http://bookfi.org/md5/6b26c1f46c44727f5ea38eb6df8d48ff.
8. *Coxeter H.S.M.* The Descartes circle theorem and Fibonacci numbers / Canadian Mathematical Society / 1998 CMS Winter Meeting. – http://www.math.ca/Events/winter98/w98-abs/node6.html.
9. *Coxeter H.S.M.* Numerical distances among the circles in a loxodromic sequence, Nieuw Arch. Wisk, 1998, 16, 1–9.
10. *Василенко С.Л.* Треугольники и золотые чевианы // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.06.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=76&sm=2 / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17549, 23.06.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161974.htm.
11. *Щетников А.И.* Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Математ. образование. – 2006. – № 3. – С. 59–71. – http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Pyramis.pdf.
12. *Василенко С.Л.* В поисках математической гармонии мира // Академия Тринитаризма. – М., Эл № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.
13. *Василенко С.Л.* Пирамидальная золотоносность // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.02.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=64&sm=2 / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17305, 11.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161930.htm.