

Мега-золотые конструкции: изоморфизм прямоугольников

У Бога всего много...

В теории золотого сечения хорошо известен золотой прямоугольник [1] с соотношением сторон $a : b = 1 : \Phi$, где $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ – константа золотой пропорции.

Он примечателен уникальным свойством: отрезая от его края квадрат, мы получаем прямоугольник меньших размеров, но с тем же отношением сторон. То есть новый и старый прямоугольники (исходный и обрезанный) имеют одинаковую форму.

Логарифмическая спираль, проходящая через однотипные характерные точки фигур такого разбиения, например, одинаково расположенные или одноимённые углы, называется золотой спиралью [2].

Многие исследователи – ортодоксы золотого сечения часто демонстрируют раковины моллюсков, особенно Nautilus, как пример природного проявления золотой пропорции и золотой спирали.



Действительно, разрез оболочки моллюска Nautilus показывает (см. рисунок), что расположение его камер можно примерно аппроксимировать логарифмической спиралью.

Но золотое сечение здесь просматривается с большим трудом, если оно вообще наличествует (рис. 1).

Гораздо точнее ложится на подопытный объект логарифмическая спираль с основанием «корня из двух» $\sqrt{2}$, как диагонали квадрата с единичной стороной.

В этом есть и особый содержательный смысл.

Двойка воплощает распространённое деление биологических клеток, сама спираль – структурирование и рост объекта.

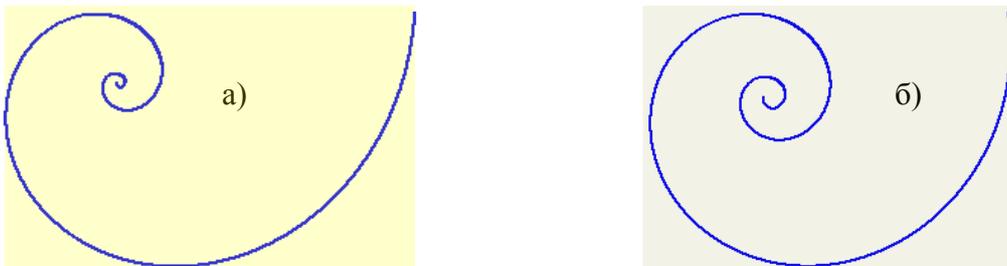


Рис. 1. Примеры логарифмических спиралей в полярных координатах:
 а) золотая спираль $r = \Phi^{2\theta/\pi}$; б) спираль с квадратичной основой $r = (\sqrt{2})^{2\theta/\pi} = 2^{\theta/\pi}$.

Конечно, если задаться самоцелью, то путём нехитрого манипуляционного подбора можно формально найти элементы золотого сечения практически во всём, что «ползает и летает». В раковине моллюске тоже.

Тем более что двойка вместе с базовой единицей, как два катета прямоугольного треугольника, становятся прообразом корня из пяти – математического предвестника-прототипа золотой константы.

Так что наутилус, как и многие другие раковины моллюсков, имеют логарифмические спирали роста, но под углом, значительно отличающимся от угла золотой спирали.

И всё же золотая пропорция чрезвычайно распространена в формообразовании живых организмов различного уровня структурной биологической сложности.

В частности, поверхности так называемых объектов со свойствами филлотаксиса (цветки и семена подсолнуха, ромашки, чешуйки в плодах ананаса, кактусов, хвойных шишек и др.) действительно "упакованы" по логарифмическим спиральям с расположением объектов между собой под определёнными золотыми углами.

Поэтому есть смысл рассмотреть иные похожие на золотую спираль математические, а точнее геометрические формы-закономерности.

Но сначала несколько слов ... о семечках.

Подсолнечник "под лупой".

Буквально фрагментарно рассмотрим модель структурирования семян подсолнечника.

Механизм их расположения нам понадобится для дальнейшего изложения материала.

Дело в том, что в научных публикациях часто можно встретить распространённое мнение, что семена подсолнечника располагаются по спиральям. А их количество по двум направлениям, якобы составляет 34/55 или 89/144 (числа Фибоначчи).

Это не совсем верно.

Спираль всего лишь одна!

В её основе лежит золотой угол $\sim 137,5^\circ$ [3], и она свободно воспроизводится простым моделированием.

Остальное – издержки зрительного восприятия и способности человеческого глаза улавливать отдельные линии.

Золотое сечение играет исключительную роль в проблемах синхронизации [4, с. 434].

Визуальное представление о ней дает рис. 2.

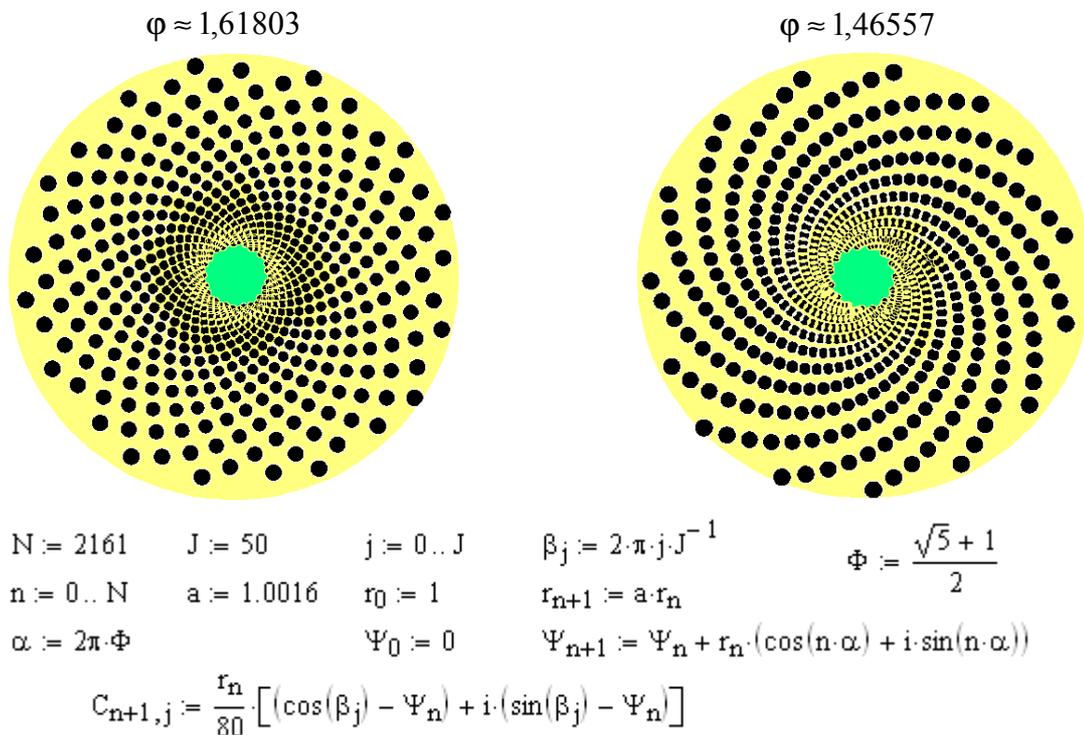


Рис. 2. Визуальная интерпретация обычного и обобщенного "золотых" углов на примере компьютерного изображения семян подсолнуха программными средствами MathCad и Paint

Здесь в качестве углового приращения для расположения объектов (семян для подсолнечника) используется шаг [5]

$$(r_{n+1}, \Psi_{n+1}) = (ar_n, \Psi_n + r_n e^{in \cdot 2\pi \varphi}),$$

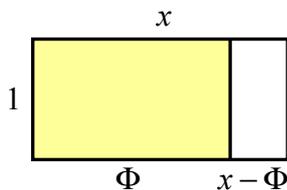
с двумя углами $2\pi\Phi$ и $2\pi\varphi$, где $\varphi = (c + 4/c + 2)/6$, $c = \sqrt[3]{116 + 12\sqrt{93}}$, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Сопоставление рисунков показывает, что достаточно реалистичная картина расположения семян в виде совокупности гладких линий (21 по часовой и 34 против часовой стрелки) при изменении параметров $\Phi \rightarrow \varphi$ сменяется на 15 похожих, но уже отдельных и более отчетливо различимых спиралей (нарушение психовизуальной синхронизации).

Хотя на самом деле на обоих рисунках математически представлена всего лишь одна спираль, закрученная против часовой стрелки.

"Нарезка" из золотых прямоугольников. Рассматривая золотоносную тематику, достаточно быстро и очевидно возникает идея попробовать изменить условия в задаче формирования золотой спирали.

В частности, от некоторого исходного прямоугольника пошагово отрезать не квадраты, а скажем, золотые прямоугольники $1 \times \Phi$.



Пусть изначально фигура имеет стороны $a \times b = 1 \times x$ с пока неизвестной длиной b .

Отрежем от неё золотой прямоугольник $1 \times \Phi$.

Приравняем отношения сторон исходного и нового (укороченного) прямоугольника:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x - \Phi} \Rightarrow x^2 - \Phi x - 1 = 0.$$

Данная пропорция имеет простую геометрическую интерпретацию:

длина прямоугольника так относится к его ширине как ширина – к остатку.

Положительный корень уравнения равен (A136319¹)

$$\lambda = \frac{\Phi + \sqrt{\Phi^2 + 4}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{22 + 2\sqrt{5}}}{4} \approx 2,0953.$$

Корневое тождество $\lambda^2 = \Phi\lambda + 1$ легко преобразуется в бесконечную периодическую цепную (непрерывную) дробь с нецелыми коэффициентами:

$$\lambda = \Phi + \frac{1}{\lambda} = \Phi + \frac{1}{\Phi + \frac{1}{\lambda}} = \Phi + \frac{1}{\Phi + \frac{1}{\Phi + \frac{1}{\lambda}}}$$

Непрерывная дробь является подосновой разбиения исходного прямоугольника на бесконечное множество золотых прямоугольников ($\Phi + 1 \dots$).

Это даёт основание особо выделить специальный вид геометрической фигуры:

мега-золотой прямоугольник (МЗП) – такой, что при отрезании от него золотого прямоугольника он не меняет форму или исходное отношение сторон.

Отношение неодинаковых сторон мега-золотого прямоугольника и образует геометрическую реализацию числа λ .

¹ <http://oeis.org/A136319>.

Итак,

- отрезая от золотых прямоугольников (ЗП) квадраты, получаем снова ЗП;
- отрезая от мега-золотых прямоугольников (МЗП) золотые прямоугольники, получаем снова МЗП.

Или схематично:

$$\text{ЗП} - \text{квадрат} \Rightarrow \text{ЗП} \dots;$$

$$\text{МЗП} - \text{ЗП} \Rightarrow \text{МЗП} \dots$$

При этом исходный ЗП разбивается на квадраты, МЗП – на золотые прямоугольники. На каждом шаге происходит следующее преобразование сторон

$$(a, b) \Rightarrow (b - pa, a).$$

Величина $p = 1$ свойственна ЗП и его разбиению на квадраты, $p = \Phi$ соответствует МЗП и его разбиению на золотые прямоугольники.

Как и любое иррациональное отношение λ раскладывается также в обычную непериодическую цепную дробь (по алгоритму Евклида) с постоянными коэффициентами (A188635):

$$\lambda = [2; 10, 2, 40, 10, 2, 2, 1, 14, 1 \dots] = \left(\begin{array}{cccccccc} 10 & 2 & 40 & 10 & 2 & 2 & 1 & \\ 21 & 44 & 1781 & 17854 & 37489 & 92832 & 130321 & \\ 10 & 21 & 850 & 8521 & 17892 & 44305 & 62197 & \end{array} \right)$$

Верхний ряд чисел представляет собой коэффициенты цепной дроби, два нижних ряда – соответственно числители и знаменатели подходящих рациональных дробей.

Асимптотическую точку, к которой стремятся уменьшающиеся прямоугольники (ЗП или МЗП), но не достигают её, по аналогии с работой [6] назовём золотым полюсом G .

Точка сходимости (полюс) в данном случае определяется из условия равенства двух прямых (диагоналей прямоугольников – рис. 3) $y = 1 - \frac{x}{\lambda}$ и $y = \frac{x-p}{\lambda-p}$:

$$G(x_0, y_0) \Rightarrow \left(\frac{\lambda^2}{2\lambda - p}, \frac{\lambda - p}{2\lambda - p} \right).$$

В частности, для исходной фигуры в виде золотого прямоугольника с отсечением квадратов золотой полюс имеет координаты

$$G(x_0, y_0) \Rightarrow \left(\frac{\Phi + 1}{\sqrt{5}}, \frac{\Phi - 1}{\sqrt{5}} \right) \approx (1.171, 0.276).$$

Мега-золотой прямоугольник с бесконечным отсечением золотых прямоугольников сходится к точке

$$G(x_0, y_0) \Rightarrow \left(\frac{\lambda^2}{\sqrt{\Phi^2 + 4}}, \frac{\lambda - \Phi}{\sqrt{\Phi^2 + 4}} \right) \approx (1.707, 0.186).$$

А теперь построим подходящую логарифмическую спираль.

Она обычно описывается в полярных координатах формулой $r = c^\theta$, содержащую константу $c = e^b$,

где r – радиус-вектор точки;

θ – угол отклонения точки от нуля;

b – коэффициент, отвечающий за густоту витков;
 e – основание натурального логарифма.

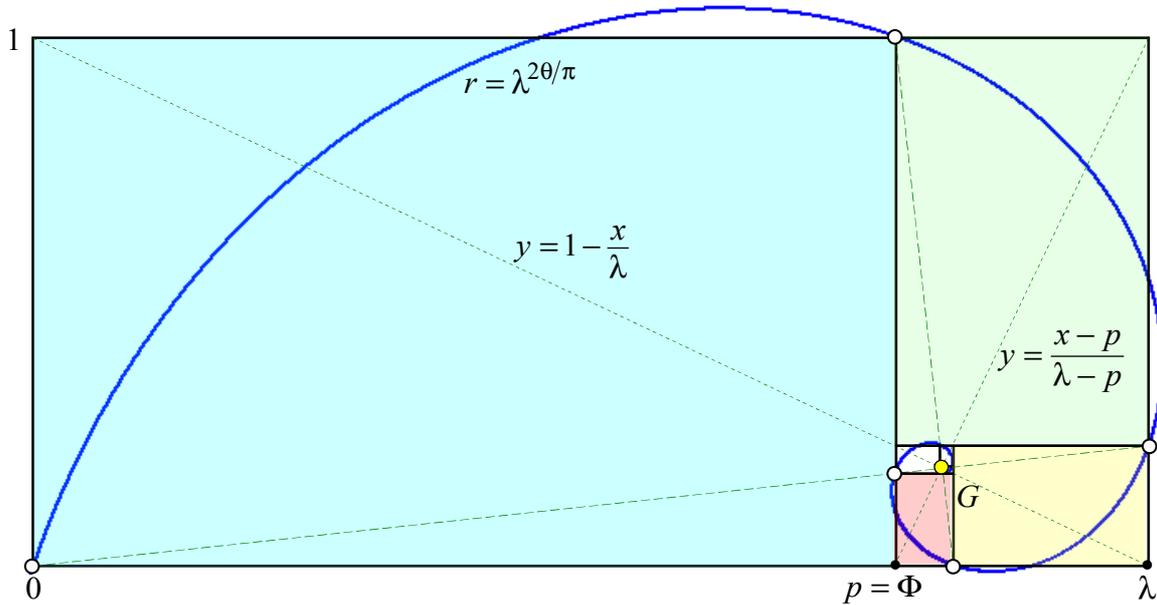


Рис. 3. Разбиение мега-золотого прямоугольника на золотые прямоугольники и совмещённая с ними мега-золотая логарифмическая спираль

При повороте на прямой угол 90° мега-золотой прямоугольник уменьшается (для развёртывания спирали прямоугольник наоборот соответственно увеличивается) в λ раз, то есть величина $c = \lambda^{2/\pi}$.

Таким образом, логарифмическая спираль для мега-золотых прямоугольников определяется простой формулой $r = \lambda^{2\theta/\pi}$.

Заметим, что логарифмическая спираль при разбиении золотого прямоугольника на квадраты проходит так, что касается изнутри характерных точек фигур разбиения.

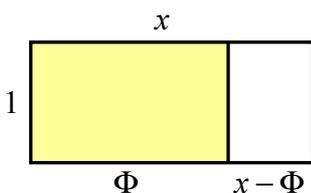
Такая же спираль при разбиении мега-золотого прямоугольника на золотые прямоугольники пересекает характерные точки под некоторым постоянным углом (см. рис. 3).

"Нарезка" из золотых прямоугольников и квадратов. Развивая начатую тему дальше, можно рассмотреть пропорцию

$$\frac{x}{1} = \frac{\Phi}{x - \Phi} \Rightarrow x^2 - \Phi x - \Phi = 0.$$

Данная пропорция имеет простую геометрическую интерпретацию:

длина так относится к ширине как отрезанная часть Φ – к остатку.



Отличие состоит в том, что с остатком соотносится уже не ширина прямоугольника, а отрезанная часть.

В такой интерпретации исходный прямоугольник несколько удлинится по сравнению с рассмотренным выше вариантом.

Положительный корень квадратного уравнения (или длина исходного прямоугольника) определяется как (A189970)

$$\gamma = \frac{\Phi + \sqrt{\Phi^2 + 4\Phi}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5} + \sqrt{14 + 10\sqrt{5}}}{4} \approx 2,3165.$$

Преобразуем корневое тождество $\gamma^2 = \Phi\gamma + \Phi$ в бесконечную периодическую цепную (непрерывную) дробь с нецелыми коэффициентами, сократив затем числитель и знаменатель на константу Φ :

$$\gamma = \Phi + \frac{\Phi}{\gamma} = \Phi + \frac{\Phi}{\Phi + \frac{\Phi}{\gamma}} = \Phi + \frac{\Phi}{\Phi + \frac{\Phi}{\Phi + \frac{\Phi}{\gamma}}} = \Phi + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi + \dots}}}}$$

По условию задачи число λ представляет отношение длины к ширине некоторого исходного прямоугольника.

Тогда полученная непрерывная дробь является подосновой его разбиения на бесконечное множество фигур двух типов:

золотых прямоугольников $(\Phi + 1\dots)$ и квадратов $(1 + 1\dots)$.

То есть модель фактически объединяет в себе свойства бесконечного разложения исходного мега-золотого прямоугольника с соотношением сторон $1 : \gamma$ (назовём его 2-МЗП) на пары смежных фигур: сначала золотого прямоугольника, затем квадрата.

Преобразование сторон осуществляется по прежней схеме переходов

$$(a, b) \Rightarrow (b - pa, a).$$

Только на первом полушаге для отрезания ЗП величина $p = \Phi$, на втором полушаге для отрезания квадрата величина $p = 1$.

2-мега-золотой прямоугольник с бесконечно-поочерёдным отсечением золотых прямоугольников и квадратов сходится к точке (золотому полюсу)

$$G(x_0, y_0) \Rightarrow \left(\frac{\gamma^2}{\sqrt{\Phi^2 + 4\Phi}}, \frac{\gamma - \Phi}{\sqrt{\Phi^2 + 4\Phi}} \right) \approx (1.780, 0.232).$$

Как и любое иррациональный корень-отношение γ раскладывается также в обычную непериодическую цепную дробь с постоянными коэффициентами (A189971):

$$\gamma = [2; 3, 6, 3, 1, 2, 15, 2, 3, 6, \dots] = \left(\begin{array}{cccccccc} 3 & 6 & 3 & 1 & 2 & 15 & 2 & 3 & 6 \\ 7 & 44 & 139 & 183 & 505 & 7758 & 16021 & 55821 & 350947 \\ 3 & 19 & 60 & 79 & 218 & 3349 & 6916 & 24097 & 151498 \end{array} \right)$$

То есть имеет место дуальное представление иррационального числа в виде двух цепных дробей: с целыми и нецелыми коэффициентами.

Но вот с построением логарифмической спирали возникают определённые проблемы, поскольку наличествует периодическая изменчивость шага отрезания-разбивки: режется либо золотой прямоугольник, либо квадрат.

Попробуем несколько видоизменить задачу.

Желательно её привести к уже рассмотренному случаю.

Для этого преобразуем квадратное уравнение общего вида:

$$x^2 - px - q = 0 \Rightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{q}} \right)^2 - \frac{p}{\sqrt{q}} \frac{x}{\sqrt{q}} - 1 = 0.$$

Введя новую переменную $z = \frac{x}{\sqrt{q}}$, получаем $z^2 - \frac{p}{\sqrt{q}}z - 1 = 0$.

В частном случае $p = q = \Phi$ имеем $z^2 - \sqrt{\Phi}z - 1 = 0$.

Таким образом, квадратичная модель

$$x^2 - \Phi x - \Phi = 0$$

становится эквивалентной уравнению с одним отличным от единицы коэффициентом $z^2 - \sqrt{\Phi}z - 1 = 0$ и последующим линейным масштабированием $x = z\sqrt{q}$.

Соответственно новое представление корня (длины исходного прямоугольника с единичной шириной) приобретает вид

$$\gamma = \Phi + \frac{\Phi}{\gamma} = \sqrt{\Phi} \cdot A, \quad A = \sqrt{\Phi} + \frac{1}{\sqrt{\Phi} + \frac{1}{\sqrt{\Phi} + \frac{1}{\sqrt{\Phi} + \dots}}}$$

Положительный корень квадратного уравнения $z^2 - \sqrt{\Phi}z - 1 = 0$ равен

$$\mu = \frac{\sqrt{\Phi} + \sqrt{\Phi + 4}}{2} \approx 1,8211.$$

Теперь логарифмическую спираль можно выразить формулой $r = \mu^{2\theta/\pi}$ с тем или иным масштабированием для конкретных точек множества геометрических фигур разбиения мега-золотого прямоугольника (рис. 4).

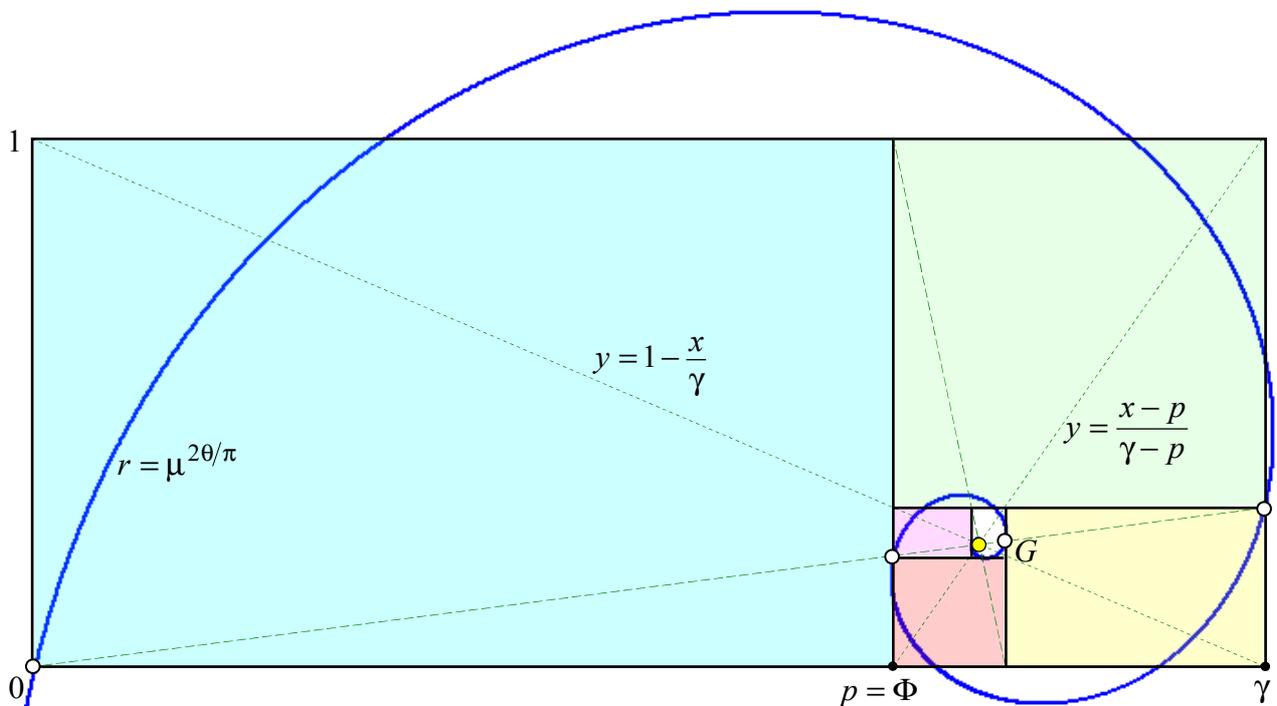


Рис. 4. Разбиение 2-мега-золотого прямоугольника (второго типа) на золотые прямоугольники и квадраты и совмещённая с ними мега-золотая логарифмическая спираль

Только теперь мега-золотая логарифмическая спираль пересекает характерные точки при уменьшении и соответствующем повороте геометрических фигур не на 90, а на 180 градусов.

То есть с пропуском соседних фигур.

Поэтому в данном случае речь идёт о точках, лежащих на одной прямой, которая проходит через золотой полюс МЗП.

За счёт линейного масштабирования спираль проходит через выбранные углы золотых прямоугольников или квадратов (рис. 5) либо иные однотипные точки геометрических фигур.

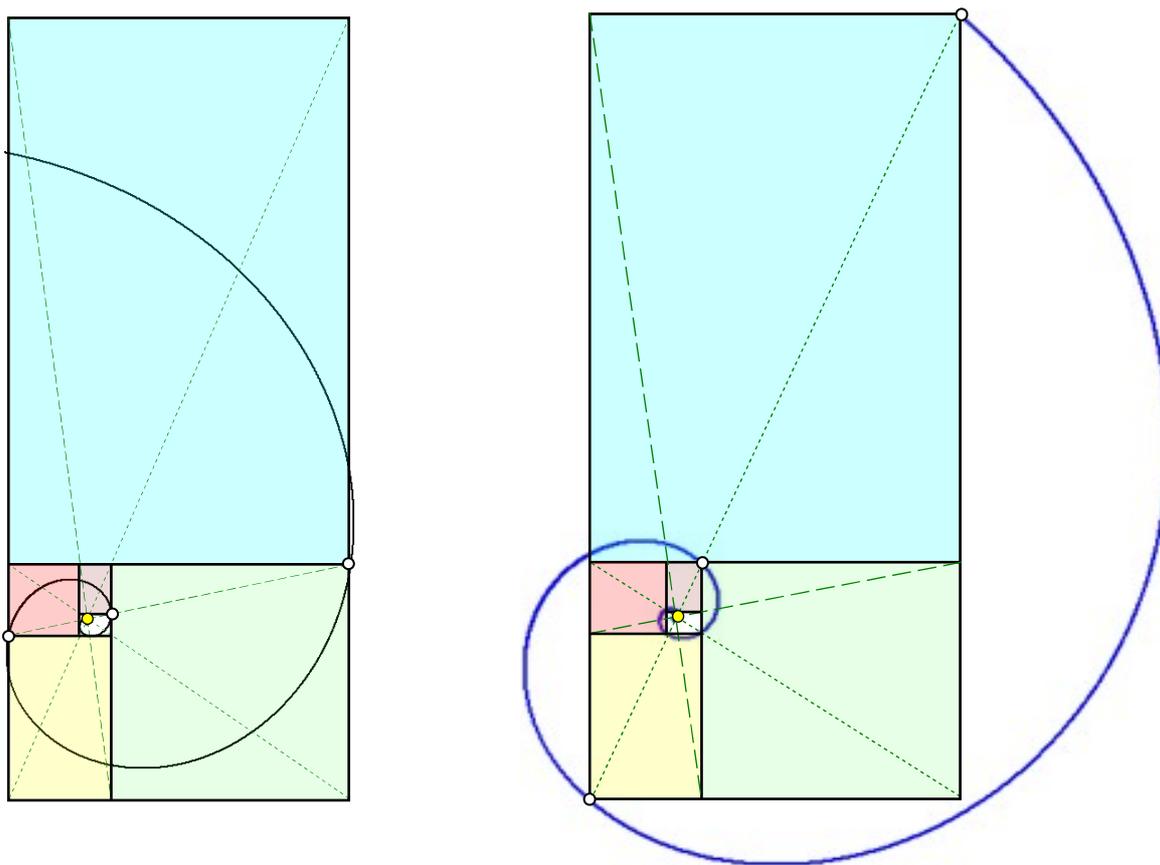


Рис. 5. Варианты прохождения одной и той же масштабируемой логарифмической спирали через характерные точки разбиения 2-мега-золотого прямоугольника на золотые прямоугольники и квадраты

Таким образом, наряду с уже привычным золотым прямоугольником мы исследовали другие золотоносные варианты. На базе так называемых мега-золотых прямоугольников.

Их отличительная особенность заключается в сохранении исходной формы или соотношения сторон при отрезании золотых прямоугольников $1 : \Phi$ либо последовательной комбинации из квадратов и золотых прямоугольников.

Образно говоря, что-то уж больно близкое классике литературного жанра:

– Пилите Шура, пилите, они <гири> золотые...

(по мотивам Ильфа и Петрова "Золотой телёнок").

А нам после успешного "распила-разбиения" мега-золотых прямоугольников остаётся надеяться, что со временем они обязательно найдут достойное применение в теории и практике золотой пропорции.

Ибо, как гласит русская мудрость, «у Бога всего много».

Литература:

1. *Золотой прямоугольник*. – http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_rectangle.
2. *Золотая спираль*. – http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_spiral.
3. *Золотой угол*. – http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_angle.
4. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного ряда: Пер. с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528 с.
5. *Василенко С.Л.* Развитие задачи о "золотом" сечении и связанных с ним числах Фибоначчи и Люка // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14833 от 05.07.2008. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321086.htm>.
6. *Белянин В.С.* Таинство чисел золотой пропорции. 3. Секрет золотого полюса // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 2011. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=33&sm=2>.

© ВаСиЛенко, 2012

