С.Л. Василенко

Мега-золотые конструкции: сверхбыстрое вычисление золотой константы

Нет ничего быстрее мысли

Золотая константа, которая часто называется также золотым сечением по наименованию исходной геометрической задачи Евклида, определяется иррациональным числом на основе корня пяти $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$.

Эта постоянная имеет чисто математический абстрактный смысл и относится к классу целых алгебраических чисел, как корень квадратного уравнения с целыми коэффициентами

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Обратная величина $\Phi^{-1} = \Phi - 1 = (-1+\sqrt{5})/2$ часто называется нами малой золотой константой, как положительный корень квадратного уравнения $x^2 + x - 1 = 0$.

Разложение в цепную (непрерывную) дробь для числа золотого сечения Φ содержит только единицы

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} = 1 + \frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\ldots,$$

что обуславливает самую медленную сходимость по этой форме среди всех других иррациональных чисел.

1. Ускоренное разложение в цепную дробь. В противовес старому мифу о черепашьей сходимости цепной дроби, состоящей из единиц, в работе [1] предложены уникальные формы непрерывных дробей со сколь угодно быстрой их сходимостью к числу золотого сечения Φ.

Новый метод расчёта имеет строгое математическое обоснование.

Известно, что числа Люка $(L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ L_0 = 2,\ L_1 = 1)$ могут быть точно представлены в следующей аналитической (не рекуррентной) форме:

$$L_n = \Phi^n + (-1)^n \Phi^{-n}.$$

Обозначив $x = \Phi^n$, перепишем это равенство как

$$\Phi^n \equiv x = L_n - \frac{(-1)^n}{x}.$$

Продолжим его в виде бесконечной цепной (непрерывной) дроби $[L_n ..]$, совместив с известной формулой [2, с. 39], устанавливающей зависимость степени золотого сечения через самоё себя и числа Фибоначчи $\Phi^n = F_n\Phi + F_{n-1}$:

$$F_n\Phi + F_{n-1} = L_n - \cfrac{(-1)^n}{L_n - \cfrac{(-1)^n}{L_n - \cfrac{(-1)^n}{L_n - \ldots}}} = L_n - [L_n ..].$$

С учётом известного равенства $L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$ окончательно находим:

$$\Phi = \frac{F_{n+1} - [L_n ..]}{F_n} = \frac{F_{n+1}}{F_n} - \frac{1}{F_n}[L_n ..]. \quad (1)$$

Это и есть многовариантное разложение (для разных n) числа золотого сечения Φ в виде множества цепных дробей, впервые описанных в работе [1].

Задавая достаточно большие взаимосвязанные числа Люка и Фибоначчи и количество членов k цепной дроби $[L_n ..]$, можно достичь невероятно огромных скоростей приближения к числу золотого сечения Φ, а значит, и $\phi = 1 - \Phi = \Phi^{-1}$.

По сути, отношение соседних чисел Фибоначчи – это уже является приближением золотой константы. Но теперь оно дополнительно корректируется дополнительным слагаемым, за счёт чего и повышается точность вычисления.

В целом данная форма (1) представления золотой константы является вполне ожидаемой, поскольку содержит специальную организацию цепных дробей на основе чисел Фибоначчи и Люка.

Её значимость определяется не столько эффективностью самого расчёта константы, который можно осуществить и путём обычного нахождения квадратного корня из пяти, сколько многовариантным подходом к подобному вычислению.

Количество вариаций здесь ничем не ограничено и определяется как выбором исходной пары соседних чисел Фибоначчи, так и последующим назначением числа этажей непрерывной дроби на базе уже n-го числа Люка.

Но и это далеко не всё.

Оказывается, есть и другие способы быстрого вычисления.

Конечно, дело здесь вовсе не в совершенствовании алгоритмов расчёта золотой константы или её подосновы в виде корня из пяти.

За быстрыми методами скрываются новые отличительные свойства золотого числа.

2. Разложение золотой константы на сомножители. Нечто похожее мы находим в построении числовой последовательности A001566[1].

Сначала формируется исходный целочисленный ряд чисел согласно простой рекурсии (*T.Baruchel*, 2003):

$$a_n = a_{n-1}^2 - 2, \quad a_0 = 3, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

3, 7, 47, 2207, 4870847, 23725150497407, 562882766124611619513723647, ...

Параллельно с этим определяются натуральные числа – знаменатели последующих дробей, также рекуррентно:

$$b_{n+1} = (b_n - 1) \cdot a_n, \quad b_1 = 3:$$

3, 14, 611, 1346270, 6557470319843, 155576970220531065681649694, ...

Оценка малой константы золотого сечения вычисляется посредством простой, но весьма эффективной формулы умножения

$$\phi = \prod_n \left(1 - \frac{1}{b_n}\right). \quad (2)$$

Или в развёрнутом виде

[1] http://oeis.org/ A001566.

$$\phi = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{(3-1)\cdot 7}\right)\left(1-\frac{1}{((3-1)\cdot 7-1)\cdot 47}\right)\left(1-\frac{1}{(((3-1)\cdot 7-1)\cdot 47-1)\cdot 2207}\right)\cdots$$

Точность вычисления в зависимости от числа шагов (сомножителей) составляет:

$$4 - 10^{-13};\ 5 - 10^{-26};\ 6 - 10^{-53};\ 7 - 10^{-106};\ 8 - 10^{-213}.$$

То есть с каждым шагом ошибка приближения уменьшается в квадратичной зависимости.

Например, $10^{-106} = \left(10^{-53}\right)^2$.

Мы проанализировали формулу (2) на предмет поиска в ней каких-либо золотоносных проявлений. Всё-таки велика вероятность того, что левая и правая части соотношения содержат разные формы записей одного и того же математического свойства.

Внимательно присмотревшись к числам b_n, можно в них обнаружить увеличенные на единицу отдельные числа Фибоначчи, а именно

$$b_n = F_{2^{n+1}-1} + 1.$$

Таким образом, формулу (2) можно переписать в предельном выражении

$$\phi = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n-1}+1}.$$

При сверхбыстром росте чисел Фибоначчи дроби становятся практически равными единице. Именно поэтому и происходит уменьшение ошибки приближения квадратичным образом.

Нечто похожее мы находим в решении проблемного вопроса B-423 [3]. Там же представлен вывод соответствующего соотношения на основе свойств чисел

$$L_2 L_4 L_8 \cdots L_{2^n} = F_{2^{n+1}} \quad \text{и} \quad 1 + F_{2^{n+1}-1} = F_{2^n-1} L_{2^n},$$

которые можно получить с помощью формулы Бине.

3. Котангенс-аналогия непрерывных дробей. Американский математик Генри Лехмер [4] в своё время (1938) показал, что каждое положительное иррациональное число имеет уникальное разложение-представление через котангенсы [5]

$$x = \operatorname{ctg} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{arcctg} b_k,$$

где b_k – неотрицательные величины вида $b_k \ge b_{k-1}^2 + b_{k-1} + 1$.

Примечательно, что данное условие возрастания коэффициентов имеет принципиальное значение для единственности разложения Лехмера.

В частности, разложение для золотой константы имеет собственную красивую форму[2] через числа Люка L:

$$\Phi = \operatorname{ctg} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \operatorname{arcctg} L_{3^k}. \qquad (3)$$

[2] http://mathworld.wolfram.com/LehmerCotangentExpansion.html.

Точность вычислений просто потрясающая и в зависимости от числа шагов составляет:

$$3 - 10^{-17};\ 4 - 10^{-51};\ 5 - 10^{-153} \ldots$$

То есть с каждым шагом ошибка приближения уменьшается в кубической зависимости. Например, $10^{-153} = \left(10^{-51}\right)^3$.

Числа Люка выражаются простой формулой $L_n = \mathrm{round}\left(\Phi^n\right)$, $n \geq 2$.

Но если мы ведём речь о вычислении золотой константы, то использование данного соотношения не совсем корректно, ибо получается вычисление Φ через самоё себя.

В лучшем случае можно говорить о тождестве.

Поэтому для вычисления коэффициентов правильнее использовать простую рекуррентную форму, *A.Jasinski*, 2008 (A006267):

$$b_{k+1} = b_k^3 + 3b_k, \quad b_0 = 1, \quad b_1 = 4.$$

1, 4, 76, 439204, 84722519070079276, 6081302133740889412147474058177209421274907929744404, ...

Итак, для вычисления констант золотой пропорции продемонстрированы три (1)–(3) довольно интересные формулы-процедуры. Они отличаются сверхвысокой скоростью уменьшения ошибок приближения.

Одновременно демонстрируются уникальные свойства самого золотого сечения.

Представляется, что это не предел, и возможны иные расчётные схемы-варианты.

Литература:

1. *Василенко С.Л.* Златые цепи // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15557, 22.09.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161546.htm.

2. *Wells D*. The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers. – England: Penguin Books, 1986.

3. *Shallit J*. Problem B-423 // The Fibonacci Quarterly **18.1** (1980) p. 85. – Solution **19.1** (1981) p. 92.

4. *Brillhart J*. Derrick Henry Lehmer // Acta Arithmetica 62 (1992), 207–213. – http://matwbn.icm.edu.pl/ksiazki/aa/aa62/aa6231.pdf.

5. *Lehmer D.H*. A cotangent analogue of continued fractions // Duke Math. J. 4 (1938), 323–340.