С.Л. Василенко

Золотая константа в числовых рядах

Аннотация. В работе исследуются уникальные золотоносные конструкции в виде числовых последовательностей с присущими им внутренними закономерностями, в основе которых лежит константа золотого сечения $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$. Одни ряды имеют чёткую содержательную трактовку и практическую применимость. Другие – больше теоретико-академическую направленность. В целом числовые множества оригинальны в своём построении и, как правило, предполагают альтернативные формы образования: аналитические и рекуррентные.

Легче представить себе понятие бога, чем числа.
Хотя и то, и другое созерцается по "делам" их.

Мир чисел. В современном прагматическом мире до сих пор широко распространёно мнение, что «…число служит ключом к форме, скрывающей жизнь, и замыслу в основе этой жизни» (А.Бейли "Лучи и посвящения"). – Здесь намеренно подчёркивается существующее представление об эзотерическом характере-оттенке чисел, которое берёт начало ещё со времён Пифагора.

Почти буквальное "одушевление" чисел было широко распространено в среде большинства учёных Древней Греции.

Алексей Лосев отмечал [1]: «Платон принадлежит к той тысячелетней антично-средневековой традиции, которая выше всего ставила в бытии и жизни числовые конструкции... *число пронизывает у Платона решительно все бытие*... каждое число Платон понимает как ту или иную *структуру*... Число у Платона не просто мыслится, не просто есть умственная абстракция и даже не просто самостоятельно существующий смысловой предмет, то есть не просто есть структура. Эта числовая структура активно определяет собою формы вещей».

Не вдаваясь в детали многовековой полемики, продолжающейся и поныне в этой области, внесём одно принципиальное уточнение.

Ключиком к познанию окружающего нас бытия и формирования миропонимания, конечно, является не само по себе число, так таковое. Ибо в своих "созвучиях" и написаниях-проявлениях оно, в частности, существенным образом зависит от систем счисления.

Но те смыслы и понятия, которые в него вкладывает человек.

Наиболее понятным и простым из них представляется привычное свойство числа характеризовать обычный счёт.

То есть мы описываем окружающую нас действительность не столько абстрактными символами или знаками-числами, которых в реальном мире нет, сколько их свойствами. – Свойством натурального числа один. Свойством мнимой единицы. И так далее...

По словам немецкого математика Р.Дедекинда «...то, что мы понимаем под числом... есть нечто новое... созданное нашим разумом», его организующей силой. «На иррациональные числа (так же как и на все другие) можно смотреть как на чистые знаки, которые могут быть и действительно бывают весьма полезны, между прочим, по той причине, что этими знаками удобно выражаются реальные свойства вещей» [2, с. 7].

«На числа мы, прежде всего, должны смотреть, как на ряд произвольно выбранных знаков» (Г.Гельмгольц). «Во всяком случае, число (numerus) есть произвольно созданный нами знак, который служит средством достижения весьма многообразных целей» (Е.Шрёдер) [2, с. 5]. К примеру, те же отрицательные числа.

Многие выдающиеся учёные убеждены, что «природе внутренне присуща некая скрытая гармония, которая отражается в наших умах в виде простых математических законов. Именно в силу этой гармонии математическое моделирование природных процессов способно описывать и предсказывать явления природы» [3].

А.Эйнштейн глубоко верил, что «чистое математическое <числовое> построение позволяет найти те понятия и те закономерные связи между ними, которые дают ключ к пониманию явлений природы» [4, с. 64].

В то же время «… иерархическую "конструкцию" очень неудобно описывать той математикой, которая основана на естественных для нас представлениях о числах. И это не техническое неудобство. Это проявление законов, которые нам еще предстоит изучить» [5].

Как бы там ни было, но для описания реальных физических процессов одного натурального ряда всё равно недостаточно. Даже с его рациональными дробями, нулём и зеркально-отрицательными отражениями.

Но точно также необъятно-расплывчатой и как бы бесформенной (аморфной) выглядит бесконечная непрерывная числовая ось.

Поэтому на смену им часто приходят адекватно-упорядоченные числовые последовательности, в которых натуральный ряд служит их нумератором.

Так появились арифметические, геометрические последовательности.

Подобным образом были выделены разнообразные множества других чисел с характерными особенностями их формирования-исчисления.

Подводные камни знаковой системы. Конечно, в любом числе изначально заложена некая магия, поскольку в отличие от слова или метафоры оно обладает незримым присутствием авторитета *точности* и *беспристрастности* [6]. Поэтому число всегда было и остается одним из главных объектов манипуляции.

Сила "языка чисел" объясняется тем, что он нам кажется максимально достоверным и не может лгать [7, гл. 5, § 3].

Это снимает с исследователей, оперирующих числами, множество ограничений, и дает максимальную независимость, с которой не сравнится никакая "свобода слова".

Один из великих математиков Г.Кантор утверждал, что сущность математики лежит в её свободе.

Ну, а «там, где терпит неудачу язык математики, человеческий дух ничего уже не сможет понять и узнать» (Н.Кузанский, 1401–1464).

Число, как и слово, было изначально связано с *вещью*. Пифагорейцы считали, что в нём выражена сущность и природа вещи. Но числа не могут лгать, и в этом их преимущество перед словом. И якобы только через число может быть понят мир.

Пифагорейское учение в этой части имеет отчетливо выраженный идеалистический характер постижения количественной стороны мира.

Математический подход к миру заключается в объяснении определенных количественных отношений между реально существующими вещами.

«Арифметизация геометрии означает выражение пространственных отношений в "чистых" числах и делает возможным их постепенное отторжение от отношений в объективной реальности, котирую они, собственно, представляют.

Возможность мысленной манипуляции с числами (как абстрактными объектами) ведет к тому, что эти числа могут быть понимаемы как самостоятельно существующие объекты. Отсюда остается всего лишь шаг к тому, чтобы эти числа были провозглашены собственно сущностью вещей. С помощью этой операции пифагорейцы приходят к идеалистическому объяснению действительности» [8].

Манипуляция с числами как абстрактными объектами приводит пифагорейцев к тому, что числа понимаются ими как единственно истинно сущее, то есть числа отождествляются с сущностью вещей, а не просто являются их количественными характеристиками.

Математика – весьма специальная сфера интеллектуального творчества, обладающая неповторимыми, только ей присущими особенностями.

Свобода математики далеко не сводится к отсутствию экзогенных ограничений на объекты и методы исследования.

Свобода математики в немалой мере проявляется в предоставляемых нею новых интеллектуальных средствах овладения окружающим миром, которые раскрепощают человека, раздвигая границы его независимости [9].

Сила убеждения чисел огромна. Но часто предполагает полную замену качеств их количественным суррогатом [7].

Мы далеки от мысли, что числа представляют собой главный инструмент познания.

Так или иначе, но в результате алгоритмических манипуляций формируются определенные устойчивые последовательные наборы чисел (ряды). Манипуляции с такими цифровыми структурами часто позволяют увидеть ранее не проявляемые закономерности.

Именно эта составляющая вызывает подлинный интерес к исследованию чисел, собирательно выражающих те или иные свойства золотой пропорции.

Золотоносные числовые конструкции. В общем случае числовая последовательность или числовой ряд – это множество элементов числового пространства.

Последовательность, как функция натурального аргумента $y = f(n)$, $n \in N$, описывается различными способами, среди которых наиболее важными являются три:

аналитический – задаётся формула n-го члена;

описательный – объясняется, из каких элементов строится последовательность;

рекуррентный – (*recurrere* – возвращаться) указывается правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности по уже известным предыдущим элементам.

Золотоносный ряд – последовательность чисел с внутренней закономерностью, в основе которой лежит константа золотого сечения $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$.

В теории золотого сечения долгое время был известен только один ряд в виде чисел Фибоначчи с их аттрактором-константой Φ.

У нас также были обобщённые последовательности Фибоначчи, отличающиеся друг от друга начальными условиями.

Современные исследования позволяют выйти на бесконечные множества бесчисленных множеств иных последовательностей, но тоже с аттрактором золотого сечения либо наличием его других уникальных свойств.

Так, можно отметить рассмотрение известных и новых свойств семейства числовых золотоносных моделей [10, 11]: обобщённая k-Витгоф игра, матрица Витгофа, ряд Голомба, последовательности Хофштадтера, функциональные матрёшки Василенко.

В работах [12–15] изложены основы новой теории обобщения задач, приводящих к уникальной константе золотого сечения (ЗС).

Впервые для ЗС используется аддитивная модель обобщённой рекурсии с внешними условиями [13] в виде неоднородного уравнения, характерного для открытых систем

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + g(n).$$

Кроме того, в развитие алгоритма Рассела рассмотрен новый класс "золотоносных" моделей в виде вариабельных пар рекурсий триномиального вида, а также систем двух взаимосвязанных числовых последовательностей [14]:

– модель парно-золотых рекурсий;
– модель нечётных степеней ЗС;
– модель чётных степеней ЗС;
– модель целочисленных аттракторов.

Выражаясь сухим языком, здесь имеет место видоизменение линейного разностного уравнения второго порядка в виде взаимосвязанной пары двух уравнений первого порядка, отражающих два параллельных синхронно-увязанных процесса.

Заслуживают внимания числовые рекурсии с периодически изменяемой структурой [15].

В их основе лежит периодически изменяемая структура (ПИС), когда по мере развития процесса рекуррентная формула периодически переключает на альтернативные формообразующие структуры.

Алгоритм подобного "перескока" на расчётные функции может быть самым разнообразным и зависит от заданного набора функций-переключателей.

В целом тема, начатая в работах [10–15], оказалась весьма плодотворной и полезной.

Безусловный интерес представляют дальнейшие исследования золотоносных структур (моделей, числовых рядов и др.).

В развитие тематики золотоносных рядов ниже представлена подборка новых результатов исследований в части составления числовых последовательностей, в основе которых лежит золотая константа.

"Индексное" золотое сечение.

Имеет место быть любопытная двучленно-аддитивная числовая последовательность (A006336[1])

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1-m}, \tag{1}$$

где m – изменяемое количество предшествующих чётных элементов, $a_1 = 1$.

По мере формирования последовательности одновременно идёт подсчёт числа m её чётных элементов, которое затем участвует в индексации второго члена суммирующей рекурсии. Исходная величина $m = 0$.

n	a_n	m	n–1–m
1	**1**	0	0
2	1+1 = **2**	0	1
3	2+1 = **3**	1	1
4	3+2 = **5**	1	2
5	5+3 = **8**	1	3
6	8+3 = **11**	2	3
7	11+5 = **16**	2	4
8	16+5 = **21**	3	4
9	21+8 = **29**	3	5
10	29+11 = **40**	3	6
11	40+11 = **51**	4	6

И здесь обнаруживается наиболее занимательное.

Оказывается, можно и не подсчитывать чётные элементы.

Достаточно просто изменить индекс у второго слагаемого (формула *P.Hanna*)[2]:

$$a_n = a_{n-1} + a_{\lfloor n\phi \rfloor}.$$

где $\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ – малая константа золотого сечения, $\lfloor \xi \rfloor$ – целая часть числа ξ или наибольшее целое $\leq \xi$.

[1] http://oeis.org/A006336.

[2] Доказательство – http://oeis.org/A006336/a006336.txt.

В результате генерирования количества чётных и нечётных чисел в последовательности a_n соотносятся в золотой пропорции $\phi^2 : \phi \approx 0{,}382 : 0{,}618$.

Поразительный результат. В определённой мере он корреспондируется с уникальным свойством золотой константы, когда две последовательности

$$u_n = \lfloor n\Phi \rfloor \quad \text{и} \quad v_n = \lfloor n\Phi^2 \rfloor$$

не содержат одинаковых чисел (не пересекаются), а вместе содержат весь натуральный ряд!

То есть каждое натуральное число принадлежит одному и только одному из наборов.

Существуют и другие последовательности с похожим (1) алгоритмом формирования, например (A060714, A060729 – A060733):

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-m},$$

где m – количество термов такой же чётности, что и n или $n + 1$;

– количество термов таких, что $a_i = 0 \,(\mathrm{mod}\, k),\ i \le n,\quad k = 3, 4, 5, \ldots$

Однако они не представляют особого интереса.

Во всяком случае, пока никак себя особо не проявили в смежных областях.

Переупорядоченный натуральный ряд.

Речь идёт об уникальной самообратимой последовательности a_n такой, что для любого натурального n выполняется соотношение

$$a_{a_n} = n. \tag{2}$$

Числовой ряд имеет вид (A132664):

(1, 2), (5, 4, 3), (9, 8, 7, 6), (16, 15, 14, 13, 12, 11, 10), (27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20, 19, 18, 17), (45, 44, 43, 42, 41, 40, 39, 38, 37, 36, 35, 34, 33, 32, 31, 30, 29, 28), 74, 73, 72, 71, 70,...

Первые два элемента заданы $(a_1, a_2) = (1,\ 2)$.

Следующий 3-й элемент равен предыдущему 2 плюс 3, то есть 5.

Далее числа уменьшаются до трёх.

Следующий n-й элемент a_n равен предыдущему a_{n-1} плюс n.

Затем снова числа уменьшаются до n и так далее.

Таким образом, начиная с $n = 3$, a_n – это максимальное положительное число $< a_{n-1}$, которое ещё не встречалось (среди чисел a_k, $k < n$), в противном случае $a_n = a_{n-1} + n$.

То есть числа последовательно уменьшаются по схеме $a_n = a_{n-1} - 1$ до тех пор, пока не встретится уже имеющееся число в ряде. Тогда новое число скачком увеличивается $a_n = a_{n-1} + n$. После этого снова формируется убывающее подмножество чисел и т.д.

Оказывается, что количество элементов (заключённых в скобки) образуют свою самостоятельную последовательность, составленную из чисел Люка:

$$L_m = L_{m-1} + L_{m-2}:\ \ (2, 1), 3, 4, 7, 11, 18, 29, \ldots$$

С учётом этого свойства модель (2) образует оригинальную аналитическую (явную, не рекуррентную) форму вычисления элементов последовательности:

$$a_n = L\left(2 + \log_\Phi \frac{2n+3}{2}\right) - n - 3,$$

где $L(\xi)$ – числа Люка с индексом ξ, округлённым до ближайшего целого числа.

Надо сказать, что эта последовательность не одинока.

Стоит немного изменить начальные условия $(a_1, a_2) = (1,\ 3)$, как опять формируется новая последовательность, удовлетворяющая свойству (2):

(1), (3, 2), (6, 5, 4), (11, 10, 9, 8, 7), (19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12), (32, 31, 30, 29, 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20), (53, 52, 51, 50, 49, 48, 47, 46, 45, 44, 43, 42, 41, 40, 39, 38, 37, 36, 35, 34, 33), 87, 86, 85, ...

Только здесь количество элементов (заключённых в скобки) образует последовательность, составленную из чисел Фибоначчи

$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2} : (0,\ 1),\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ ...$$

С учётом этого образуется своя оригинальная аналитическая форма:

$$a_n = F\left(\log_\Phi\left(n\sqrt{5} + 2\Phi\right) + 2\right) - n - 3\,,$$

где $F(\xi)$ – числа Фибоначчи с индексом ξ, округлённым до ближайшего целого числа.

Триплетная золотая перестановка натурального ряда.

Натуральный ряд можно перестроить или скомбинировать в последовательность S триплетов (a, b, c) с выполнением следующих трёх правил (A171100, *E.Angelini*, 2010):

1) $c = a + b$;
2) числа (a, b, c) попарно взаимно простые, то есть каждая пара не имеет никаких общих делителей, кроме 1: gcd(a, b) = gcd(ab, c) = 1.
3) S – перестановка натуральных чисел.

Последнее правило означает, что каждое из чисел встречается только один раз, и из последующего рассмотрения исключается.

В принципе достаточно проверки взаимной простоты лишь слагаемых (a, b).

Если gcd(a, b) = 1, то gcd(ab, $a+b$) = 1.

Предположим обратное, то есть существует такое простое $p \neq 1$, которое делит $p|$ gcd(ab, $a+b$). Значит, $p|ab$, откуда следует $p|a$ или $p|b$.

Но p также делит сумму $p|(a+b)$, а значит теперь и каждое из слагаемых $p|a$ и $p|b$, поэтому $p|$gcd(a, b), что противоречит исходному условию gcd(a, b) = 1.

Сумма чётного и нечётного числа является нечётной. Поэтому, начиная со второй тройки, числа a являются чётными, соответственно b, c – нечётными.

a	b	c
1	2	3
4	5	9
6	7	13
8	11	19
10	17	27
12	23	35
14	15	29
16	21	37
...	...	...
6662	10773	17435
6664	10779	17443
6666	10787	17453
...	...	...
30000	48541	78541
...	...	...

Например, при подборе ближайшего кандидата к числу 8 мы не можем использовать число 9, которое уже встречалось во второй строке.

Для 10 не можем брать 11 и 13, которые уже были, а (12, 14, 15, 16) имеют общие сомножители с 10. И так далее.

Есть и другой нюанс.

Например, 48 + 79 = 127, 50 + 83 = 133, 52 + 75 = 127.

Но мы не можем принять b = 75, хотя оно ещё и не встречалось, поскольку уже была сумма c = 127. Чтобы не допускать повторов, ищется следующее число b, что приводит к тройке 52 + 85 = 137.

Последовательность S бесконечна.

Образование новой тройки всегда возможно, поскольку неизменно существует бесконечное количество кандидатов b, взаимно простых с самым маленьким ещё неиспользованным целым a.

Предыдущие тройки могут исключить только конечное множество чисел и их суммы, которые обязательно взаимно просты к a и b.

Исходя из результатов машинных экспериментов, можно высказать гипотезу:

наиболее вероятно, что по мере увеличения последовательности S
триплетное соотношение $a : b : c$ стремится к $1 : \Phi : \Phi^2$.

Замечательный результат.

Правда, пока остаётся вопрос о существовании строгого доказательства данного утверждения.

Тенденция в уменьшении ошибки приближения прослеживается весьма чётко (рис. 1). Хотя, возможно, и не так быстро, как хотелось бы.

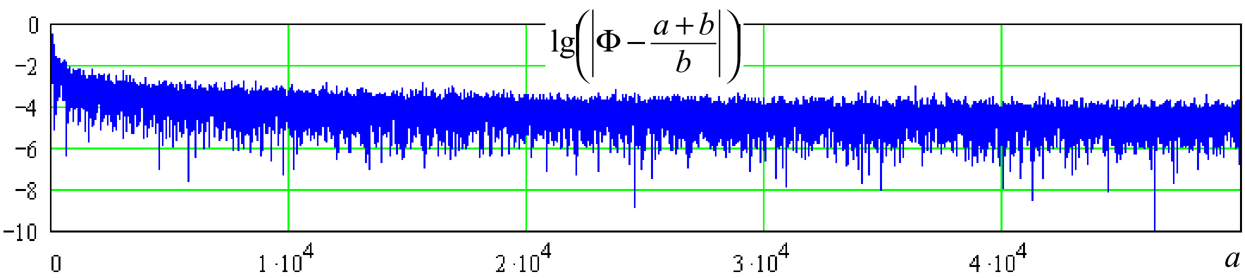


Рис. 1. Точность приближения триплетной перестановки натурального ряда к золотой константе

Порождающий золотой морфизм.

Запишем два соответствия $0 \to 010,\ 1 \to 10$.

А теперь построим бесконечный ряд последовательного наращивания, каждый раз сопоставляя нулю – 010 и единице – 10:

b_1			b_2		b_3			b_4		b_5			b_6			b_7		b_8		
0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
010	10	010	10	010	010	10	010	10	010	010	10	010	010	10	010	10	010	010	10	010

b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8 b_9 b_{10} …

Итак, имеем самопорождающийся числовой ряд (A189661):
0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0
1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 0 1 0 1 0 0 ...

Образуем текущие (парциальные) суммы (A189663):
0 1 1 2 2 2 3 3 4 4 4 5 5 5 6 6 7 7 7 8 8 9 9 9 10 10 10 11 11 12 12 12 13 13 13 14 14 15 15 15 16 16 17 17 17 18 18 18 19 19 20 20 20 21 21 22 22 22 23 23 23 24 24 25 25 25 26 26 26 27...

Данная последовательность имеет следующее рекурсивное формообразование, $n > 2$ (*F.Ruskey*, 2011):

$$a_n = a_{1+a_{n-2}} + a_{n-1-a_{n-2}}$$

или

$$a_n = a_m + a_{n-m}, \quad m = 1 + a_{n-2}\,.$$

Но самое примечательное состоит в том, что эти парциальные суммы выражаются через константу золотого сечения Φ:

$$a_{n+1} = 2n - \lfloor n\Phi \rfloor\,.$$

Причём количество нулей и единиц в первой последовательности соотносится в золотой пропорции, как $\phi : \phi^2$.

Похожие формы образуются при других соответствиях.

Так, любая из пар замещения

$$0 \to (01 \text{ или } 10),\ 1 \to (001 \text{ или } 010 \text{ или } 100)\,.$$

приводит к отношению множеств единиц и нулей

$$\{0\}:\{1\} \;=\; \left(2-\sqrt{2}\right):\left(\sqrt{2}-1\right) \;\approx\; 0{,}586 : 0{,}414\,.$$

Любая из замен

$$0 \to (01 \text{ или } 10),\ 1 \to (011 \text{ или } 101 \text{ или } 110)$$

снова приводит к золотому сечению

$$\{0\}:\{1\} \;=\; \phi^2 : \phi \;\approx\; 0{,}382 : 0{,}618\,.$$

Один такой случай описан в работе [16]: $0 \to 01,\ 1 \to 011$, когда каждый элемент формируется из предыдущего путём замены 0 на 01 и 1 на 011 одновременно для всех цифр.

Так образуется бесконечная последовательность (A095907) с поэтапным наращиванием

$$0 \to \underline{0}1 \to \underline{01}011 \to \underline{01011}01011011 \to \underline{0101101011011}0101101011011010 11011 \to \ldots$$

Нами определена простая аналитическая форма проставления единиц в этом ряде:

$$a_n = \{\ 1, \quad n = 1 + \lfloor \Phi \cdot \lfloor n\phi \rfloor \ \rfloor\ \}\,.$$

Замена-соответствие $0 \to 10,\ 1 \to 110$ или $0 \to 01,\ 1 \to 101$ приводит к той же формуле, но с "временн*ы*м" (индексным) сдвигом

$$a_{n+1} = \{\ 1,\ n = 1 + \lfloor \Phi \cdot \lfloor n\phi \rfloor \ \rfloor\ \}\,.$$

Возможны и другие интерпретации. Среди них заслуживает внимание укороченные замены-морфизмы, например, (A003842) $1 \to 12,\ 2 \to 1$.

Выбрав исходное значение $a_1 = 1$ (с первой заменой $1 \to 12$), получаем бесконечный ряд единиц и двоек в соотношении $\{1\}:\{2\} \;=\; \phi : \phi^2$, с общей аналитической формулой

$$a_{n-1} = n - \lfloor \Phi \cdot \lfloor n\phi \rfloor \ \rfloor\,.$$

Последовательность «*смотри и говори*» (look-and-say sequence).

В своё время мы обращались к задаче упаковки шаров [17], к которой немало усилий приложил знаменитый математик Дж. Конвей [18–20].

Теперь речь пойдёт о его известной последовательности «*смотри и говори*».

Можно также назвать более точной триадой: «смотри, говори и записывай».

В оригинале ряд составляется (A005150) с использованием трёх цифр (1, 2, 3)[3].

Для нас представляет интерес такое же формирование, но с применением только двух цифр (1, 2).

Начнём, например, с единицы 1.

Говорим (произносим) и записываем:

«1 единица» – 11;
«2 единицы» – 21;
«1 двойка, 1 единица» – 12 11;
«1 единица, 1 двойка, 2 единицы» – 11 12 21;
«2 единицы, 1 единица, 2 двойки, 1 единица» – 21 11 22 11;
«1 двойка, 2 единицы, 1 единица, 2 двойки, 2 единицы» – 12 21 11 22 21...

Так образуется ряд (A110393[4]):

1, 11, 21, 1211, 111221, 21112211, 1221112221, 11222111221211, 2122122111122111221, 121122112221112221112211, 1112212221221221111221221112221, 21112211221211221122211122112221111221211,...

Что же здесь примечательного?

Длины этих записей-термов описываются последовательностью (A179999) и обладают средним ростом, равным корню квадратному из константы ЗС – $\sqrt{\Phi}$.

Но и это не всё! Отношение r числа единиц "1" к числу двоек "2" в каждом терме стремится к постоянной величине, в основе которой также лежит золотая константа [21]:

$$r = \frac{a}{a + 2\sqrt{\Phi}} \approx 0{,}8900544,$$

где $a = 4\sqrt{\Phi^3} + 5\Phi + \sqrt{\Phi} + 3 \cdot$

Золотоносные неоднородные модели.

В статьях [12, 13] изложены основы новой теории обобщения задач, приводящих к уникальной константе золотого сечения.

Впервые для золотого сечения используется аддитивная модель с внешними условиями в виде неоднородного разностного уравнения, характерного для открытых систем:

$$f(n) - f(n-1) - f(n-2) = g(n)$$

или

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + g(n) .$$

Числовая модель сходится к золотому аттрактору[5], если функция $g(n)$ растёт со скоростью, не превышающей скорость увеличения степенной функции Φ^n.

"Перебить" золотой аттрактор можно лишь такой функцией, возрастание которой происходит быстрее, чем Φ^n.

Например, другая степенная функция $g(n) = G^n$ при $G > F$.

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Look-and-say_sequence; http://mathworld.wolfram.com/LookandSaySequence.html.
[4] http://oeis.org/A110393.
[5] Аттрактор числовой последовательности – предельное отношение соседних элементов ряда.

В этом случае аттрактор Φ сменяется на аттрактор G.

Другими словами, двучленно-аддитивная рекурсия f_n стремится к своему аттрактору золотого сечения Φ, если "мощность" обмена $g(n)$ с окружающей средой не превышает Φ^n.

Рассмотрим одну весьма показательную в этом контексте рекуррентную последовательность (A073845[6])

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + (-2)^n,$$

где начальные условия равны $(a_1, a_2) = (1,\ 1)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Её отличие от обычной фибоначчиевой модели состоит в дополнительном аддитивном слагаемом $(-2)^n$.

Искомый знакопеременный числовой ряд имеет вид:

1, 1, 0, 5, –3, 18, –17, 65, –80, 241, –351, 914, –1485, 3525, –6152, 13757, –25163, 54130, ...

Аналитическая форма выражается через золотую константу (*B.Cloitre*, 2002):

$$a_n = (-1)^n \left\lfloor \frac{2^n + \left(2\sqrt{5} - 3\right)(-\Phi)^n}{5} \right\rfloor,$$

где $\lfloor \xi \rfloor$ – целая часть числа ξ, $\sqrt{5} = \Phi + \Phi^{-1}$.

Но аттрактором или предельным отношением соседних элементов согласно [12, 13] является число (–2), которое по абсолютной величине больше золотой константы $\Phi \approx 1{,}618$.

Небезынтересна и такая двучленно-аддитивная последовательность, в которой первое слагаемое заменено на число Фибоначчи

$$a_n = F_n + k a_{n-2} - n \pmod 2,$$

где величина $n \pmod 2$ равна единице для нечётных значений n. Она практически не значима в сравнение с больш*и*ми числами и добавляется исключительно для подравнивания симметрии.

Эта последовательность также сходится к своему аттрактору – золотому сечению для любых значений $k < \Phi^2 = 1 + \Phi$.

Причём, чем больше коэффициент k, тем хуже сходимость (рис. 2).

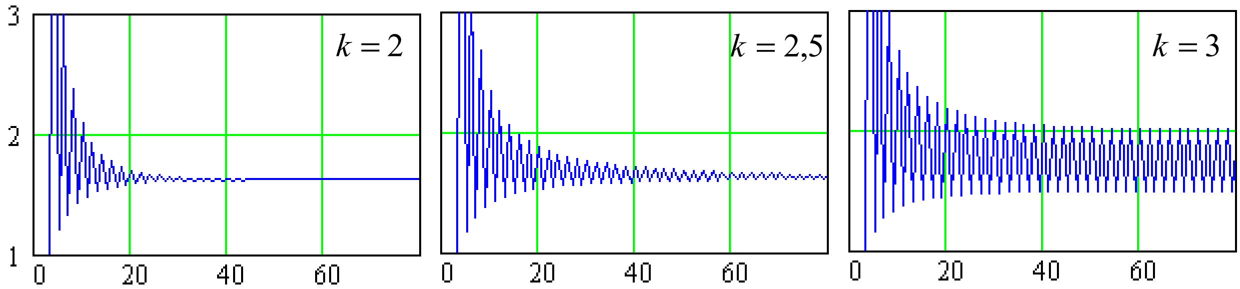


Рис. 2. Варианты сходимости числовой последовательности

[6] http://oeis.org/A073845.

В этой модели квадрат золотой константы Φ^2 становится пороговым значением, при котором отношение соседних элементов начинает резонировать и входит в автоколебательный (не сходящийся) процесс с равными амплитудами.

Оно и понятно, ибо коэффициент k стоит возле переменной a_{n-2} с запаздыванием её шага на две позиции, а для обычной модели Фибоначчи $\lim\limits_{n\to\infty} F_n / F_{n-2} = \Phi^2$.

Последовательность золотого шага для сортировки данных.

Это эмпирически хорошая последовательность шагов-приращений d для алгоритма сортировки Шелла[7].

В основе последовательности лежат числа Фибоначчи (с их аналитической формой представления), дополнительно "усиленные" степенью 2Φ

$$a_n = \left\lfloor \mathrm{round}\left(\frac{\Phi^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)^{2\Phi} \right\rfloor,$$

где $\lfloor \xi \rfloor$ – целая часть числа ξ; $\mathrm{round}\left(\Phi^{n+1}/\sqrt{5}\right) = F_n$ – округление нормированной (на корень из пяти) степени золотого сечения Φ до ближайшего целого числа.

Множество положительных целых чисел, задаваемых данной формулой-моделью, имеет вид (A154393):

1, 9, 34, 182, 836, 4025, 19001, 90358, 428481, 2034035, 9651787, 45806244, 217378076, ...

Хотя для сортировки данных есть и другие способы формирования длин шагов d, в основном на базе степеней чисел 2 и 3.

Особенно хорошо золотоносные шаги $d = a_n$ работают на больших массивах.

Напомним, что идея метода Шелла состоит в сравнении элементов, стоящих не только рядом, но и на определённом расстоянии друг от друга.

Сначала сортируются между собой значения, отстоящие один от другого на некотором расстоянии d. Далее процедура повторяется для меньших значений d вплоть до упорядочивания элементов при $d = 1$, то есть обычной сортировкой вставками.

В ряде случаев подобная сортировка a_n бывает не очень быстрой.

Но зато она имеет существенные преимущества.

В частности, нет потребности в дополнительной памяти под стек, что особенно важно для огромных массивов.

Но главное – это устойчивость метода, когда отсутствует его "деградация" при неудачных (неподходящих) наборах данных. То есть он "инфантилен" к исходным данным.

Описанная последовательность шагов полуэмпирическая, однако, очень надёжно работает практически на любых числовых множествах.

Всё это благодаря свойствам золотой константы!

И в этом видится её реальная практическая применимость.

Необычное рядом.

Мы привыкли к тому, что числа Фибоначчи описываются самой незамысловатой линейной рекурсией типа "ЗАВТРА = СЕГОДНЯ + ВЧЕРА":

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

[7] Сортировка Шелла // Википедия. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=45872789.

Оказывается, если аддитивную схему "сегодня + вчера" перенести на более поздние сроки, например на одни сутки и даже двое суток, то в результате получим ... снова числа Фибоначчи. – Только удвоенные.

Рассмотрим рекурсивный алгоритм, состоящий из двух похожих частей, выбираемых в зависимости от чётности-нечётности порядкового шага n:

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_{n-1} + a_{n-2}, & n = 1\,(\mathrm{mod}\ 2), \\ a_{n-2} + a_{n-3}, & n = 0\,(\mathrm{mod}\ 2). \end{cases}$$

При заданных начальных условиях $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$ образуется следующий числовой ряд (A173388):

1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 6, 6, 10, 10, 16, 16, 26, 26, 42, 42, 68, 68, 110, 110, 178, 178, 288, 288, 466, 466, 754, 754, 1220, 1220, 1974, 1974, 3194, 3194, 5168, 5168, 8362, 8362,...

В данной последовательности, начиная с 8-го шага, элементы следуют парами одинаковых величин.

Более того, они являются удвоенными числами Фибоначчи $2F_n$.

Следовательно, отношение соседних элементов равно 1, либо стремится к золотой константе Ф.

Естественно, что $a_n = a_{n-2} + a_{n-4},\ n > 7$.

Диофантова разность куба и квадрата $x^3 - y^2$.

В работе [22] показано, что неравенства $0 < \left|x^3 - y^2\right| < \sqrt{|x|}$ имеют бесконечно много решений в целых числах x, y.

Поиск решений эквивалентен нахождению значения x, удовлетворяющего неравенству

$$0 < \left| x^3 - \left(\mathrm{round}\sqrt{x^3} \right)^2 \right| < \sqrt{|x|}\,.$$

Заметим, что разность больше нуля. В противном случае имеют место тривиальные решения $x = a^2$.

Последовательность <решений> Данилова x_n имеет вид (A200216):

93844, 322001299796379844, 1114592308630995805123571151844,...

Эти числа выражаются общей формулой, n = 1, 2, 3, …

$$x_n = \frac{L_{2k} - 12(-1)^n L_k + 14}{20},$$

где $L_k = \Phi^k + (-\Phi)^{-k}$ – числа Люка, $k = 15(2n-1)$.

Исходное неравенство разрешается также относительно переменной y_n (A200217):

28748141, 182720147509505842286585077, 1176722513851727970194784616032383058302343205,...

Аддитивно-мультипликативная модель № 1.

Рассмотрим следующую рекурсию третьего порядка

$$a_n = a_{n-1}a_{n-2} + a_{n-3}.$$

С начальными условиями $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$ формируется ряд чисел (A074394):

1, 2, 3, 5, 13, 62, 801, 49649, 39768787, 1974480504962, 7852269463748617l445,
1550415297588006253290156654413O3, 12174278697379026530632791354719900462885271361687873, ...

Он имеет весьма примечательные свойства.

Прежде всего, любые последовательные четверки чисел $\left\{a_k,\ k = \overline{i+1..\,i+4}\right\}$ попарно взаимно просты.

Сами числа периодически повторяют кратность:

a_n кратно	если $n =$
2	2 (mod 4)
3	3 (mod 4)
5	4 (mod 7)
7	10 (mod 14)
9	7 (mod 24) или 11 (mod 24)
10	18 (mod 28)

Кратности 4, 6 и 8 отсутствуют.

Но самое интересное, что аддитивно-мультипликативная форма образования ряда нашла своё оригинальное воплощение и в необычном проявлении аттрактора – отношения, связывающего соседние элементы,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n^{\Phi}} = 1\,.$$

То есть в пределе последующий член ряда равен "золотой степени" предыдущего элемента

$$a_{n+1} \approx a_n^{\Phi}\,.$$

Вот такая необычная золотоносная модель-последовательность.

Аддитивно-мультипликативная модель № 2 (A003686, A064847), *B.Cloitre*, 2002.

Две взаимосвязанные числовые последовательности с начальными условиями $a_1 = b_1 = 1$ определяются следующим образом:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n\,, \\ b_{n+1} = a_n \cdot b_n\,. \end{cases}$$

Один ряд определяется через сумму, другой – через произведение предшествующих элементов каждого ряда:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	1	2	3	5	11	41	371	13901	5033531	69782910161	351229174914190691
b	1	1	2	6	30	330	13530	5019630	69777876630	351229105131280530	...

Эти последовательности имеют также обособленно-рекуррентное представление, то есть без взаимного пересечения:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n-1}(a_n - a_{n-1}) = a_n + \prod\limits_{k=1}^{n-1} a_k, \\ b_{n+1} = b_n\left(\dfrac{b_n}{b_{n-1}} + b_{n-1}\right) \end{cases}$$

с начальными условиями $(a_1, a_2) = (1,\ 2),\quad (b_1, b_2) = (1,\ 1)$.

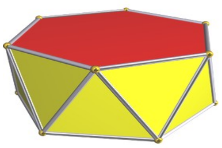
Предельные значения элементов удовлетворяют единичным отношениям:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_{n-1}} = 1;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{\Phi}}{b_n} = 1.$$

Следует сказать, что сходимость первого предела, в отличие от второго, гораздо быстрее. Тем не менее, золотоносная фактура в отношении смежных элементов числовых последовательностей всё же имеет место. Несмотря на то, что двучленно-аддитивная форма $a_{n+1} = a_n + b_n$ на каждом шаге "перебивается" более весомой (в плане образования больш*их* чисел) мультипликативной формой $b_{n+1} = a_n \cdot b_n$.

Антипризматический граф.



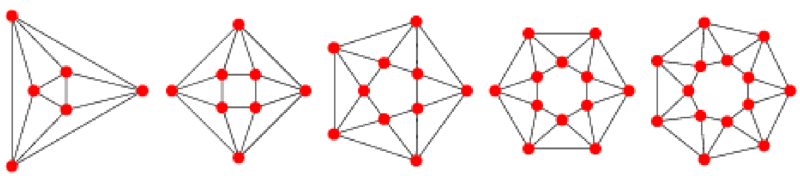
Несмотря на своё *анти*-происхождение через "анти" приставку, на самом деле выявляется очень даже красивый математический объект.

Он имеет непосредственное отношение к так называемой антипризме.

Антипризма[8] – полуправильный многогранник, у которого две параллельные грани-основания – равные между собой правильные n-угольники, а остальные $2n$ боковых граней – правильные треугольники.

Можно сказать, своеобразные барабаны.

Вполне естественно образовать графы, которые корреспондируются с рёбрами тела или его скелетом[9]:



Следующее важное для нас понятие связано с понятием остова.

Остовное дерево связанного неориентированного графа[10] – ациклический связный подграф данного графа, в который входят все его вершины.

Проще говоря, остовное дерево состоит из подмножества рёбер, если двигаясь по этим рёбрами, из любой вершины графа можно попасть в любую другую вершину, и в нём нет

[8] http://mathworld.wolfram.com/Antiprism.html, http://en.wikipedia.org/wiki/Antiprism.
[9] http://mathworld.wolfram.com/AntiprismGraph.html;
[10] http://en.wikipedia.org/wiki/Spanning_tree.

циклов. То есть из любой вершины нельзя попасть в саму себя, не пройдя какое-то ребро дважды.

Количество остовных деревьев в антипризматических графах описывается такой последовательностью (A193127):

2, 36, 384, 3528, 30250, 248832, 1989806, 15586704, 120187008, 915304500, ...

Для больших значений $n > 6$ справедлива рекуррентная форма:

$$a_n = 16a_{n-1} - 80a_{n-2} + 130a_{n-3} - 80a_{n-4} + 16a_{n-5} - a_{n-6}.$$

Ей соответствует характеристический полином 6-й степени, содержащий константу золотого сечения Φ:

$$x^6 - 16x^5 + 80x^4 - 130x^3 + 80x^2 - 16x + 1 = (x-1)^2\left(x - \Phi^4\right)^2\left(x - \Phi^{-4}\right)^2.$$

Аналитическая форма имеет довольно простой вид и основана на золотой константе[11]:

$$a_n = 2n \cdot \left(\Phi^{4n} + \Phi^{-4n} - 2\right)/5.$$

Так или иначе, но содержательная интерпретация данного свойства определённым образом связана с наличием двух правильных оснований, соединённых между собой треугольниками, что приводит к числу 5 и далее через корень из пяти – к алгебраическому решению золотой пропорции.

Циклический граф.

Количество путей длиной $2n+1$ между двумя соседними вершинами в циклическом графе C_10 выражается последовательностью (A078789):

1, 3, 10, 35, 127, 474, 1807, 6995, 27370, 107883, 427351, 1698458, 6765175, ...

Данные числа могут быть представлены комбинаторно-суммирующей формулой

$$a_n = \frac{1}{2}\sum_{k=-m}^{m} C_{2n}^{n+5k},$$

где $m = \lfloor n/5 \rfloor$.

Кроме того, допустимы аналитико-золотоносные формы:

$$a_n = \frac{2^{3n-1} + \left(3+\sqrt{5}\right)^n + \left(3-\sqrt{5}\right)^n}{5 \cdot 2^n};$$

$$a_n = \frac{2^{2n-1} + \Phi^{2n} + \Phi^{-2n}}{5} = \frac{2^{2n-1} + \sqrt{5} \cdot F_{2n}}{5}.$$

Данные формулы связаны с более общими представлениями по суммированию косинусов [23].

В свою очередь, из правильного десятиугольника следует, что $\Phi = 2\cos\frac{2\pi}{10}$.

Именно поэтому золотое сечение "выныривает" в циклическом графе C_10.

Эквивалентная рекурсия третьего порядка имеет вид

$$a_n = 7a_{n-1} - 13a_{n-2} + 4a_{n-3}.$$

[11] http://mathworld.wolfram.com/SpanningTree.html.

Она обусловлена производящей функцией

$$F(x) = \frac{1-4x+2x^2}{1-7x+13x^2-4x^3} \Rightarrow 1,\ 3,\ 10,\ 35,\ 127, \ldots$$

Необычные суммы.

В библиотеке числовых последовательностей (http://oeis.org) наличествует необычное суммирование произведений предыдущих элементов с исходным значением $a_1 = 1$:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k a_{\lfloor n/k \rfloor} .$$

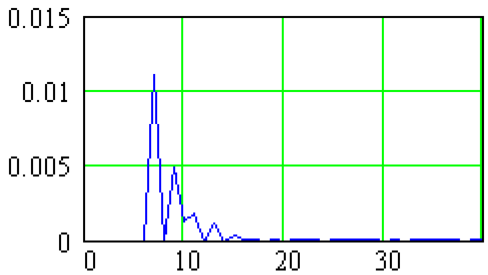
Числовой ряд имеет вид (A097417[12]):

1, 1, 2, 5, 13, 34, 90, 236, 621, 1629, 4274, 11193, 29337, 76818, 201173, 526730, 1379178, 3610804, 9453695, 24750281, 64798235, 169644626, 444138288, 444138288, 1162770238, ...

Что же в нём примечательного?

– Оказывается, он имеет устойчивый аттрактор, равный квадрату золотого числа,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi^2 = \Phi + 1 \approx 2{,}618 .$$



Строгое доказательство данного утверждения пока отсутствует.

Но можно привести косвенную аргументацию.

Анализ показывает, что элементы данного ряда приблизительно выражаются формулой:

$${}^{\cdot}a_n \approx 3a_{n-1} - a_{n-2} .$$

Относительная точность приближения $\Delta_k = |1 - {}^{\cdot}a_n / a_n|$ чрезвычайно высока (рисунок).

Причём в отдельные моменты происходит абсолютно полное совпадение.

Например,

$$a_{38} - (3a_{37} - a_{36}) = 826323150578610 - (3\cdot 315627357480852 - 120558921863946) = 0.$$

Максимальный положительный корень характеристического уравнения $x^2 = 3x - 1$ равен квадрату золотой константы Φ^2.

Следовательно, отношение соседних элементов по теореме Бернулли равно Φ^2.

Продолжая тему суммирования, можно также упомянуть хорошо известную в математике формулу бесконечного суммирования степеней[13]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r},\ |r| < 1 .$$

Именно поэтому, дополнительно используя свойства ЗС, получаются примечательные тождественные суммы

[12] http://oeis.org/ A097417.
[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s_Soldiers.

$$\sum_{k=m}^{\infty} \phi^k = \phi^{m-2},$$

в том числе любопытные модификации:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k = \Phi^2, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k = \Phi, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \phi^k = 1.$$

Сама же малая золотая константа, в свою очередь, может быть определена с использованием чисел Фибоначчи и быстро сходящегося произведения [24]

$$\phi = \prod_{n=2}^{\infty} \frac{F_{2^n-1}}{F_{2^n-1}+1}$$

или суммы

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{F_n F_{n+1}}.$$

После замены (по формуле Бине) $F_n = \dfrac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}$ последняя сумма сводится к такому тождеству

$$\phi = \Phi^{-1} = 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\Phi^{2n+1} - \Phi^{-2n-1}}.$$

Асимптотически-золотой ряд. В библиотеке числовых последовательностей есть довольно необычная комбинаторно-суммирующая форма

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} C_k^{n(\operatorname{mod} k)}.$$

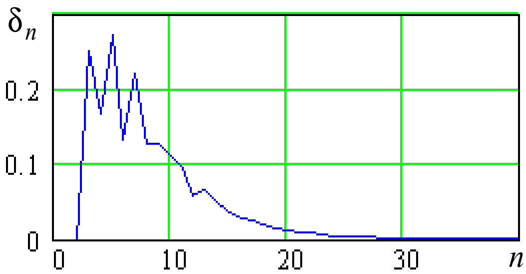
Она воспроизводит такие целые числа (A072951):

1, 2, 4, 6, 11, 15, 27, 39, 63, 100, 159, 247, 403, 641, 1023, 1644, 2653, 4264, 6872, 11081, ...

Здесь $n(\operatorname{mod} k)$ – остаток от деления целых чисел n на k.

Числовой ряд асимптотически тяготеет к показательной функции с основанием золотого сечения и значит к числам Фибоначчи:

$$a_n \sim \frac{5+\sqrt{5}}{10}\Phi^n = \frac{\Phi^{n+1}}{\sqrt{5}} \approx F_{n+1}.$$



Относительная ошибка приближения

$$\delta_n = 1 - \frac{\Phi^{n+1}}{\sqrt{5}\cdot a_n}$$

пошагово уменьшается (рисунок), но не так быстро.

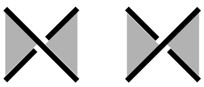
Отношение соседних элементов в пределе стремится к числу золотого сечения $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi$.

"Золотые" узлы.

Речь пойдёт о положительных рациональных узлах.

Или образно говоря, об их золотоносных вариациях.

В математической теории узлов *рациональный узел*[14] (rational knot, 2-bridge knot) – узел, который может быть представлен таким образом, что естественная функция высоты, определяемая координатой z, имеет только два максимум и два минимума, как критические точки.



$[+1]$ $[-1]$

Пересечение в узлах чисто условно относят к положительному или отрицательному типу [25].

Положительных рациональных узлов с чётным числом пересечений не бывает.

А вот количество положительных рациональных узлов с $2n+1$ пересечениями определяется с помощью золотого сечения или среднеарифметического двух чисел Фибоначчи:

$$a_n = \operatorname{round} \frac{1+\Phi^n+\Phi^{2n}}{2\sqrt{5}} = \frac{F_n+F_{2n}}{2},$$

образуя числовую последовательность (A051450):

1, 2, 5, 12, 30, 76, 195, 504, 1309, 3410, 8900, 23256, 60813, 159094, 416325, 1089648, ...

"Вложенные" числа Фибоначчи.

Довольно интересны свойства "вложенной" последовательности $a_n = F(F(n)) = F_{F_n}$, составленной из чисел Фибоначчи, индексы которых – числа Фибоначчи.

Она имеет вид (A007570):

0, 1, 1, 1, 2, 5, 21, 233, 10946, 5702887, 139583862445, 1779979416004714189, 555565404224292694404015791808, 2211236406303914545699412969744873993387956988653, ...

Здесь приемлемы некоторые рекуррентные формулы [26, 27]. Однако они весьма громоздкие и потому нечётко отражают содержательный смысл.

В то же время весьма эффектно выглядит рекурсивная форма на основе золотой константы

$$a_{n+1} = \left\langle a_n \Phi^{F_{n-1}} \right\rangle \quad \text{или} \quad F_{F_{n+1}} = \left\langle F_{F_n} \cdot \Phi^{F_{n-1}} \right\rangle,$$

где $\operatorname{round}(\xi) = \langle \xi \rangle$ – округление до ближайшего целого числа.

Теософская периодичность чисел Фибоначчи.

В своё время некоторые русскоязычные авторы [28–30] наперебой заявляли о своём открытии уникальных периодических последовательностей Фибоначчи в их теософском или нумерологическом построении:

1, **1**, 2, 3, 5, 8, 4, 3, 7, 1, 8, 9 , 8, 8, 7, 6, 4, 1, 5, 6, 2, 8, 1, 9...

Аналогично для чисел Люка:

1, **3**, 4, 7, 2, 9, 2, 2, 4, 6, 1, 7, 8, 6, 5, 2, 7, 9, 7, 7, 5, 3, 8, 2...

[14] http://en.wikipedia.org/wiki/Rational_knot.

В работах [31–33] показано, что подобное нумерологическое представление чисел Фибоначчи совсем не ново и эквивалентно операнду (mod 9) – одному из бесконечного множества "свертываний" данных рядов по модулю m.

То есть применительно к нумерологическому исчислению речь идет о числовых рядах по модулю 9 или (mod 9) с периодом 24, что равносильно "свертыванию" чисел по теософской редукции (Num-суммированию) через многократное сложение цифр, до одной конечной цифры.

Эти любопытные наблюдения восходят ещё к 1960 году [34], когда была установлена периодичность подобных последовательностей по модулю m (Fibonacci Sequence Modulo m).

Размышлизмы. Итак, золотая копилка пополнилась ещё одной подборкой систематизированного материала. В этот раз в виде гармоничных числовых последовательностей, основанных на проявлениях константы золотого сечения.

Вместо легковесных фантазий по золотым сечениям-расчленениям произведений искусства, архитектуры, литературы и т.п. на смену приходят математически выверенные золотоносные конструкции с их абсолютной достоверностью в пределах общепринятой числовой аксиоматики.

Вполне очевидно, что это не предел.

Широта математических моделей и материалов, в которых золотое сечение фигурирует в его абсолютно точном значении-понимании, распахивает новые горизонты в познании этого необычного феномена.

Золотое число Ф к немалому удивлению внезапно и эффектно "выплывает" в самых неожиданных структурах и приложениях во всей своей красе.

Пожалуй, конкурировать с ним в этом вопросе может только число π.

Не все из представленных нами рядов предполагают готовую практическую применимость. Возможно, что некоторые из них имеют главным образом теоретико-академическую направленность.

В то же время анализируемы числовые ряды, как правило, допускают аналитическое представление и содержательную трактовку. Что выгодно дополняет их рекуррентные формы генерирования.

В целом золотая пропорция в её истинном (точном, буквальном) проявлении только начинает по-настоящему "отвоёвывать" в науке своё место-пространство, принадлежащее ей по праву.

Эра "золотых свершений" в познании мироздания только начинается.

И вместе с другими авторами мы ещё не раз вернёмся к данной теме.

Литература:

1. *Лосев А.Ф.* История античной эстетики. Том. 2. Софисты. Сократ. Платон / §2. Элементарные структурно-числовые модификации. – М.: Искусство, 1969. – http://gzvon.pyramid.volia.ua/biblioteka/kafedra_filosofii/libph/losev/iae2/txt15.htm.

2. *Дедикинд Р.* Непрерывность и рациональные числа: Пер. с нем. – 4-е изд., испр. – Одесса: Матезис, 1923. – http://www.mathesis.ru/book/dedekind4.

3. *Якушко С.И.* Симметричный числовой ряд Фибоначчи для описания реальных физических процессов // Международный клуб золотого сечения. – Винница, 2011. – http://essuir.sumdu.edu.ua/handle/123456789/23607.

4. *Эйнштейн А.* Физика и реальность. – М.: Наука, 1965. – 360 с.

5. *Кутушов М.В.* Диссиметрия жизни – симметрия рака. – 2008. – http://fictionbook.ru/author/m_v_kutushov/dissimmetriya_jizni_simmetriya_raka/.

6. *Василенко С.Л.* 108 (число) в предыстории золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16377, 20.02.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161794.htm.

7. *Кара-Мурза С.Г.* Манипуляция сознанием: изд. юбил., доп. – М.: Эксмо: Алгоритм, 2010. – 862 с. – http://www.situation.ru/app/rs/books/manipul/manipul_content.htm.

8. *История философии* в кратком изложении: Пер. с чеш. – М.: Мысль, 1995. – 590 с.

9. *Наука в Сибири*. – Еженедельная газета СО РАН. – № 2 (2388), 2003.

10. *Василенко С.Л.* Золотые россыпи в целочисленных прогрессиях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16520, 18.05.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161833.htm.

11. *Василенко С.Л.* Удивительный мир золотоносных числовых рядов // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.10.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=52&sm=2 // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17269, 29.01.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322142.htm.

12. *Василенко С.Л.* Новые рекуррентные формы золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16997, 18.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322035.htm / Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 20.11.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11534.html.

13. *Василенко С.Л.* Обобщённые рекурсии с аттрактором золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=49&sm=2.

14. *Василенко С.Л.* Парные двухчленно-аддитивные рекурсии // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 08.10.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=51&sm=2.

15. *Василенко С.Л.* Рекурсии с периодически изменяемой структурой // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.10.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=53&sm=2.

16. *Long C.* A Strange Recursive Sequence. – http://www.math.rutgers.edu/~clong/math/problems/recursive.pdf.

17. *Василенко С.Л.* Золотые купола в задаче конусной упаковки евклидового пространства // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 17.07.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11225.html // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17147, 26.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322102.htm.

18. *Конвей Дж.*, *Слоэн Н.* Упаковки шаров, решётки и группы: Пер с англ. В 2-х томах. – М.: Мир, 1990. – т. 1, 413 с.; т. 2, 418 с.

19. *Конвей Дж.* Квадратичные формы, данные нам в ощущениях: Пер. с англ. – М.: МЦНМО, 2008. – 144 с.

20. *Конвей Дж.*, *Смит Д.* О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях: Пер. с англ. – М.: МЦНМО, 2009. – 182 с.

21. *Johnston N.* Further Variants of the “Look-and-Say” Sequence, 2011. – http://www.nathanieljohnston.com/2011/01/further-variants-of-the-look-and-say-sequence/.

22. *Данилов Л.В.* Письмо в редакцию // Математ. заметки, **36**:3 (1984), 457–458. – http://www.mathnet.ru/links/ebc77e3197cb9825716e95be47b3f88b/mzm5944.pdf.

23. *Merca M.* A Note on Cosine Power Sums // J. Integer Sequences. – Vol. 15 (2012), Article 12.5.3. – https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL15/Merca1/merca6.pdf.

24. *Василенко С.Л.* Мега-золотые конструкции: сверхбыстрое вычисление золотой константы // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 24.09.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=85&sm=2.

25. *Kauffman L.H.* Classifying and Applying Rational Knots and Rational Tangles. – http://homepages.math.uic.edu/~kauffman/VegasAMS.pdf.

26. *Parberry E.A.* Two Recursion Relations for F(F(n)) // Fibonacci Quarterly. – **15.2** (1977). – http://www.fq.math.ca/15-2.html.

27. *A recurrence* for the sequence F(F(n)). – http://www.codehappy.net/fibo.pdf.

28. *Сергиенко П.Я.* Триалектика. Святая Троица как символ знания. – Пущино, 1999. – 82 с.

29. *Каменская В.Г.*, *Зверева С.В.* Ряд Фибоначчи и его странные свойства: фрактальные и нумерологические характеристики // Сознание и физическая реальность. – 2001.– № 5. – С. 17–30. – http://www.numbernautics.ru/content/view/314/35/.

30. *Корнеев А.А.* Структурные тайны золотого ряда // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14359, 21.04.2007. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321047.htm.

31. *Василенко С.Л.* Циклические структуры и сокрытые периодичности суммирующих рекурсий // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15756, 17.01.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161603.htm.

32. *Василенко С.Л.* Цикличность динамического хаоса в аддитивно-рекуррентных последовательностях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16113, 13.10.2010. – http://trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161712.htm.

33. *Василенко С.Л.* Научная балда // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 04.09.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11333.html // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 09.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=48&sm=2.

34. *Wall D.D.* Fibonacci Series Modulo *m* // American Mathematical Monthly. – 67, 525–532, 1960.

© ВаСиЛенко, 2012

Украина, Харьков

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html