С.Л. Василенко

Функциональные особенности золотой пропорции

Крой новый кафтан,
да к старому примеряй
Русская поговорка

В работах [1, 2] представлен своеобразный рубрикатор, названный «золотым калейдоскопом» и объединяющий разноплановые проявления золотой пропорции, в основе которой лежит уникальная числовая константа $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$.

Напомним, что словосочетание "калейдоскоп" (от греч. *красивый вид смотреть*) придумал сэр Дэвид Брюстер, написавший трактат про его теорию и историю [3, с. 62].

Это детская игрушка, в которой разноцветные кусочки стекла, многократно отражаясь в трёх зеркалах, воссоздают единый красивый узор. Зеркала составляют боковые грани правильной треугольной призмы, образуя между собой углы, равные $\pi/3 = 60^{\circ}$. Если бы эти углы были другими, то отражения накладывались бы друг на друга и не создавали единого симметричного узора.

Вместе с тем калейдоскоп – это не только забавная игрушка с её воспоминаниями незабываемого детства и сказочно-очаровательным взглядом на мир.

Здесь отображена серьёзная математика. Ибо описание теоретически возможных калейдоскопов равносильно описанию многоугольников <многогранников> Коксетера, <двугранные> углы которых являются целыми частями π [4].

Представляется, что *золотой калейдоскоп* как нельзя ладно подходит в качестве общей тезы, объединяющей разноплановые проявления золотого сечения (ЗС) с его константой Φ.

Одним из таких её слабоизученных проявлений являются взаимосвязи на уровне широко известных функций и/или функциональных уравнений специального вида.

ЗС и функция Эйлера

Эйлер и триединство констант. Эйлер по праву считается самым продуктивным и непревзойденным математиком в истории по объему полученных результатов.

Он – прирожденный и самый совершенный алгоритмист – ученый, который изобретает алгоритмы для решения задач специальных видов.

Эйлер – автор многочисленных математических открытий [5, с. 204–251; 6]. Мы уже обращались [7, 8] к его творчеству и наследию.

В частности, предметом рассмотрения был генезис общности чисел (π, e, ϕ), где e – основание натурального логарифма, ϕ – "малая" константа золотого сечения.

Как было показано, триединство констант вытекает из их совместного "квадратичного происхождения", которое порождают кривые второго порядка: окружность (эллипс), гипербола и парабола. С их хорошо просматриваемой онтологической подосновой в виде семейства конических сечений.

Шесть фундаментальных констант, включая 0, 1 и мнимую единицу i, объединены в расширении $e^{i\pi} + \phi(\phi+1) = 0$ знаменитого тождестве Эйлера и объяснены нами через всевозможные сечения обычного конуса в такой сводной транскрипции:

π	окружность (эллипс)	0	точка (вершина конуса)
ϕ	парабола	1	образующая конуса
e	гипербола	i	другая образующая

А теперь обратимся к теории чисел…

Функция Эйлера. В исследованиях числовых конструкций очень популярна функция Эйлера $\varphi(n)$ натурального числа n, которая выражает количество целых чисел отрезка $[1, n]$, взаимно простых с n.

Другими словами $\varphi(n)$ – количество натуральных чисел, не больших n и взаимно простых с ним.

На языке алгебры, это порядок группы обратимых элементов кольца Z_n (множества неотрицательных целых чисел с алгебраическими операциями сложения и умножения).

Для натурального числа n, представленного каноническим разложением на простые сомножители $n=\prod_i p_i^{\alpha_i}$, $i=\overline{1,k}$, функция Эйлера может быть вычислена по формуле[1]

$$\varphi(n)=\prod_i p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1).$$

Функцию Эйлера можно также представить в виде произведения <Эйлера>:

$$\varphi(n)=n\prod_{p\,|\,n}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

где p – простые числа, которые "пробегают" все значения, участвующие в разложении n на простые сомножители.

Для разнообразных вычислений весьма удобным является разложение в ряд Фурье [9]

$$\varphi(n)=\sum_{k=1}^{n}\gcd(k,n)\cdot e^{-\frac{2\pi k}{n}i},$$

где $\gcd(k, n)$ – наибольший общий делитель (НОД), $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица.

Взаимосвязь функции Эйлера и золотого сечения. Рассматривая историческую ретроспективу, наиболее вероятно предположить, что Эйлер в своё время и не думал о какой-либо связи своей функции с золотым сечением.

Как-то уж сильно далеки друг от друга их математические трактовки.

Тем не менее, такую связь можно воспроизвести [10]. Пусть даже вкупе с иными числами, но всё-таки можно.

Искомая связь основана на двух леммах, устанавливающих универсальные тождества для положительной переменной $0<x<1$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k}\left[-\ln\left(1-x^k\right)\right]=\frac{x}{1-x}, \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(k)}{k}\left[-\ln\left(1-x^k\right)\right]=x, \qquad (2)$$

где $\mu(k)$ – функция Мёбиуса[2], хорошо известная в теории чисел и комбинаторике, со своим троичным набором значений $\{-1, 0, 1\}$.

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_totient_function#CITEREFSchramm2008.
[2] http://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius_function.

Тождества (1)–(2) справедливы для любого положительного вещественного числа, меньшего единицы. В том числе и для частного значения $x = \phi = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \Phi^{-1}$ – "малой" константы золотого сечения.

Здесь не наблюдается ничего специфично-золотого.

Вместе с тем, используя равенство $\phi^2 + \phi - 1 = 0$, характерное исключительно для золотой константы, получаем $\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{\phi}{1-\phi} = \phi^{-1} = \Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ или

$$\Phi + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \ln\left(1-\phi^k\right) = 0 .$$

Представленное тождественное соотношение теперь уникально и увязывает золотое сечение, натуральный логарифм и функцию Эйлера.

Выражение легко приводится к единичному тождеству

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \ln\left(1-\phi^k\right)^{-\phi} = 1 .$$

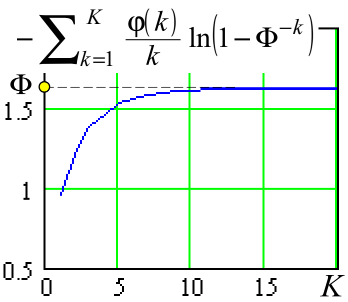


Рис. 1. Сходимость связующей формы

Сходимость частных сумм к константе золотого сечения Φ очень быстрая (рис. 1).

Обратим внимание, что данные соотношения выполняются исключительно для константы золотого сечения.

Малейшее отклонение переменной $\Phi \to x$ от истинного значения золотого числа приводит к нарушению равенств.

Это хорошо видно (рис. 2) из графика функции

$$f(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} \ln\left(1-x^{-k}\right) .$$

Она обращается в нуль точно в точке ЗС: $f(\Phi) = 0$.

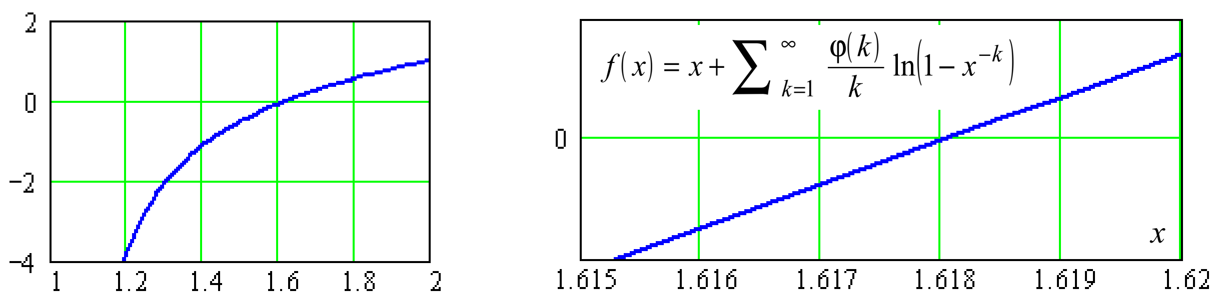


Рис. 2. Уникальность константы золотого сечения Φ
в её взаимосвязи с натуральным логарифмом и функцией Эйлера $\varphi(k)$

Кроме того, здесь возможны разные экзотические интерпретации.

Так, формальное вычитание двух равенств (1)–(2) легко приводит к любопытному единичному тождеству:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)-\varphi(k)}{k} \ln\left(1-\phi^{k}\right)=1.$$

Используя свойства экспоненциальной функции, можно получить выражения для основания натурального логарифма с переходом на бесконечное произведение:

$$e=\prod_{k=1}^{\infty} \ln\left(1-\phi^{k}\right)^{\frac{\mu(k)-\varphi(k)}{k}} \approx 2{,}718\ ;$$

$$e^{\Phi}=\prod_{k=1}^{\infty} \left(1-\phi^{k}\right)^{-\frac{\varphi(k)}{k}} \approx 5{,}043\ .$$

Как и следовало ожидать, формы взаимосвязи фундаментальных констант (e, Φ) имеют бесконечные формы (суммы, произведения) [8].

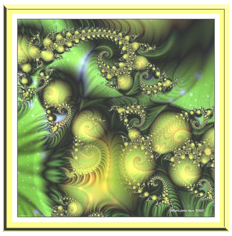
Дело в том, что, несмотря на своё "пролетарское" квадратичное происхождение, онтологически это совершенно разные числа:

Φ – целое алгебраическое число, как корень многочлена x^2-x-1 с целыми коэффициентами, старший из которых равен единице;

e – трансцендентное число.

Если и говорить об аналитических зависимостях, то они, на наш взгляд, возможны только на уровне бесконечных математических структур. Они способны "скрадывать" и нивелировать издержки несовместимости данных чисел под одним точным знаком равенства конечной аналитической формы.

II. ЗС и функциональные уравнения



Новой блестящей гранью константы золотой пропорции Φ становится её неожиданное "выныривание" в функциональном уравнении ассоциативности общего вида.

Но сначала несколько слов о математических понятиях функционального уравнения и свойства ассоциативности.

Функциональное уравнение в математике выражает связь между значениями функции в разных точках.

Многие свойства такой функции как раз и определяются функциональным уравнением.

Данный термин обычно используется для уравнений, несводимых простыми способами к алгебраическим уравнениям. Эта несводимость обычно обусловлена тем, что аргументами неизвестной функции в уравнении являются не сами независимые переменные, а некоторые функции от них.

Примеры: уравнения Коши (в классе непрерывных функций) [11]:

$f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\quad f(x)=ax$ – линейная однородная функции;

$f(x+y)=f(x)f(y)$, $\quad f(x)=a^{x}$ – показательная функция;

$f(xy)=f(x)+f(y)$, $\quad f(x)=\log_a x$ – логарифмическая функция;

$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$, $\quad f(x)=x^{a}$ – степенная функция.

С функциональными уравнениями многие наверняка сталкивались не раз.

Просто не предполагали или не подозревали, что они так называются.

Так, функциональные уравнения

$$f(x)=f(-x), \qquad f(-x)=-f(x), \qquad f(x+T)=f(x)$$

задают такие широко известные свойства функций, как чётность, нечётность, периодичность.

К функциональным уравнениям по существу относятся интегральные и дифференциальные уравнения [12].

Ещё одним из распространённых видов функционального уравнения является разностное (возвратное) уравнение.

Чаще всего оно выражается рекуррентным соотношением, которое содержит некоторую функцию от целых чисел и оператора сдвига.

Простым примером подобного соотношения является рекуррентная форма, с помощью которой генерируются числа Фибоначчи: $F(n)=F(n-1)+F(n-2)$.

Итак, в общем случае функциональное уравнение – это уравнение, в котором неизвестными являются функции.

Ассоциативность в математике – свойство любой операции $\otimes$ такое, что для неё и любых элементов x, y, z выполняется равенство:

$$x\otimes(y\otimes z) = (x\otimes y)\otimes z.$$

Ассоциативность иногда называют соединением или сочетательностью.

Например, ассоциативным является привычные свойства умножения и сложения чисел, выражаемые тождествами

$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z);$$
$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

С известным со школы правилом: от перемены мест сомножителей (слагаемых) произведение (сумма) не меняется.

Иначе говоря, для ассоциативной операции конечный результат вычисления $x\otimes y\otimes z$ не зависит от порядка операционных вычислений или расстановки скобок.

Поэтому скобки в записи можно просто опускать, а счёт производить в любом удобном порядке.

Точно так же, при наличии множества переменных $(x, y, ..., v)$, в каком бы порядке их ни расставили, и как бы ни поместили скобки, определяющие порядок вычислений, конечный результат не изменяется.

Константы золотого сечения в функциональном уравнении. Оказывается, и в области функциональных уравнений неожиданным образом "выныривает" золотое сечение.

Одним из таких проявлений становится простое разностное уравнение второго порядка или двучленно-аддитивная рекурсия $f_n = f_{n-1}+f_{n-2}$, где для удобства записи "временн*а*я" переменная представлена нижним индексом.

а) Разностное уравнение золотого сечения. Действительно, разделив разностное уравнение на f_{n-1} и введя новую переменную x в виде отношения соседних элементов уравнения, получаем $(n\to\infty)$:

$$x=\frac{f_n}{f_{n-1}}=1+\left(\frac{f_{n-1}}{f_{n-2}}\right)^{-1}=1+\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad x^2=x+1\quad\Rightarrow\quad x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\left(\Phi,\ -\Phi^{-1}\right).$$

В принципе, это довольно известный факт.

Но есть и нечто более любопытное.

В работах [13, 14] изложены основы новой теории обобщения задач, приводящих к уникальной константе золотого сечения.

Впервые для золотого сечения используется аддитивная модель с внешними условиями в виде неоднородного уравнения, характерного для открытых систем.

Пусть $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}+g(n)$ и $g(n)=n^m$, где m – сколь угодно большое число.

Если неоднородная часть рекуррентного уравнения равна нулю $g(n)=0$, то числа обобщённой последовательности Фибоначчи f_n возрастают как целочисленные значения степенной функции Φ^n.

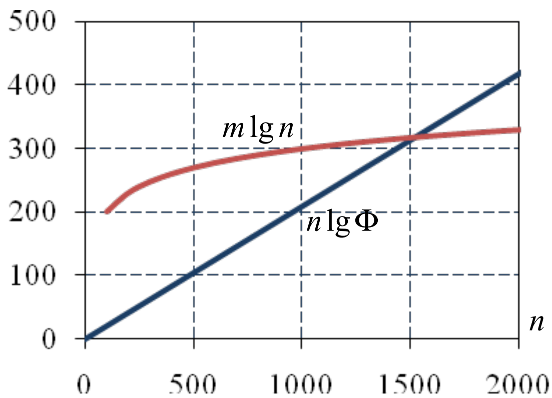


Рис. 3. Логарифмическое сравнение степеней Φ^n и n^m, $m = 100$

Сравним величины Φ^n и n^m.

Их сопоставление более наглядно проявляется в логарифмических координатах (рис. 3).

Независимо от значения степени m, функция Φ^n рано или поздно "перебивает" функцию n^m и становится главенствующей в их сумме.

Таким образом, аттрактором $x_1=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f_n}{f_{n-1}}$ последовательности становится число Φ.

Аналогичная картина наблюдается, если $g(n)=a_0n^k+a_1n^{k-1}+...+a_{k-1}n+a_k$ – любое алгебраическое уравнение.

Иначе говоря, функция $g(n)$ не должна расти со скоростью, превышающей скорость увеличения степенной функции Φ^n.

"Перебить" золотой аттрактор можно лишь такой функцией, возрастание которой происходит быстрее, чем Φ^n. Например, другая степенная функция $g(n)=G^n$ при $G>F$.

В этом случае аттрактор Φ сменяется на аттрактор G.

Другими словами, двучленно-аддитивная рекурсия f_n стремится к своему аттрактору золотого сечения Φ, если "мощность" обмена $g(n)$ с окружающей средой не превышает Φ^n.

В теории золотого сечения долгое время был один ряд в виде чисел Фибоначчи с их аттрактором-константой Φ.

Были также обобщённые последовательности Фибоначчи, отличающиеся друг от друга начальными условиями.

Теперь мы вышли на бесконечные множества бесчисленных множеств иных последовательностей, но тоже с аттрактором золотого сечения.

Возьмём, к примеру, рекурсию, включающую алгебраический многочлен общего вида

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}+a_0n^k+a_1n^{k-1}+...+a_{k-1}n+a_k.$$

Для любого конечного значения k любая из таких последовательностей сходится к константе золотого сечения.

Это по-настоящему обобщение большого круга задач, приводящих к единственной и уникально-неповторимой константе Ф. Существующие последовательности (числа Фибоначчи и т.п.), несомненно, стоят рангом ниже, как частные случаи.

Можно сказать, что известная аддитивная форма $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ характеризует замкнутую систему.

Всё здесь варится в собственном соку.

Неоднородное уравнение

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + g(n)$$

описывает уж*е* открытую систему.

Если оперировать историческими образами кроликов Фибоначчи, то теперь ушастые персонажи не только размножаются.

В новой модели их можно изымать для еды, причём в прогрессии. Они перестают быть бессмертными. Их допустимо привносить из других систем и так далее.

Слагаемое $g(n)$ отражает динамическую связь системы с внешним миром.

b) Функциональное уравнение ассоциативности и золотое сечение. В общем виде функциональное уравнение ассоциативности можно записать как

$$f(x, f(y, z)) = f(f(x, y), z) .$$

Оно имеет два решения в области комплексных чисел [15, 16]:

- несимметричные решения $f(x, y) = x, \quad f(x, y) = y$;
- симметричное решение $f(x, y) = a + b\cdot(x + y) + cxy$, где a, b, c – любые константы, удовлетворяющие равенству $b^2 - b - ac = 0$.

Последнее равенство можно также записать в виде пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{b-1}{c} .$$

Представляет интерес один особый частный случай.

При равенстве единице $a = c = 1$ операция $x \otimes y = 1 + b\cdot(x + y) + xy$ становится ассоциативной, если только $b_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = (\Phi, \ -\phi)$ – константы золотого сечения.

В общем случае золотоносное ассоциативное свойство проявляется при взаимной обратимости параметров $a = c^{-1}$.

То есть модель золотого сечения приводит к таким вариантам функциональной связи:

$$f(x, y) = a + \Phi\cdot(x + y) + a^{-1}xy ;$$

$$f(x, y) = a - \phi\cdot(x + y) \ + a^{-1}xy .$$

Действительно, например, для первого уравнения последовательно имеем:

$$f\left(x, a + \Phi\cdot(y + z) + a^{-1}yz\right) = f\left(a + \Phi\cdot(x + y) + a^{-1}xy, z\right);$$

$$a + \Phi\cdot\left(x + a + \Phi\cdot(y + z) + a^{-1}yz\right) + a^{-1}x\left(a + \Phi\cdot(y + z) + a^{-1}yz\right) =$$
$$= a + \Phi\cdot\left(a + \Phi\cdot(x + y) + a^{-1}xy + z\right) + a^{-1}z\left(a + \Phi\cdot(x + y) + a^{-1}xy\right);$$

$$\Phi\cdot(x+\Phi\cdot(y+z))+x=\Phi\cdot(\Phi\cdot(x+y)+z)+z\,;$$

$$\Phi^2(z-x)-\Phi(z-x)-(z-x)=0 \quad\Rightarrow\quad \Phi^2-\Phi-1=0\,.$$

Аналогично для второго корня приходим к другому тождеству $\phi^2+\phi-1=0$.

Здесь хорошо видно, что конечный результат не зависит от расстановки скобок или выполнения порядка операционных вычислений.

Размышлизмы. Итак, функциональное уравнение в виде простейшей двучленно-аддитивной рекурсии $f_n - f_{n-1} - f_{n-2} = g(n)$ даже с неоднородной частью $g(n) \neq 0$ имеет устойчивый аттрактор, равный константе золотого сечения Ф.

Главное условие – функция $g(n)$ не должна возрастать быстрее, чем показательная функция Φ^n.

Кроме того, золотое сечение воочию проявляет себя в функциональном уравнении ассоциативности. Это означает, что порядок выполнения операций суммирования-умножения не имеет значения.

Всё вместе позволяет утверждать об исключительной роли золотой пропорции в синтезе-формировании живых структур в природе.

Вероятно, золотая пропорция играет роль базиса-подосновы, фиксируя алгоритм построения-развития и предопределяя генерацию синтезируемых объектов.

Что касается взаимосвязи ЗС и функции Эйлера, то сразу трудно высказать нечто определённое в части ожидаемой полезности представленных тождеств.

Их применимость пока остаётся под вопросом.

Скорее всего, они имеют формообразующий характер, закрепляя соответствующее математическое построение. Возможно, предопределяют-предвосхищают формирование новых математико-объектных построений. Так или иначе, но данность не должна ставить подобные исследования под сомнение.

Известны десятки и сотни разных математических соотношений (того же Эйлера, Рамануджана и других великих математиков), которые до сих пор остались не востребованными.

И вряд ли таковыми когда-нибудь станут.

Они лишь подчёркивают внутреннее совершенство и упорядоченность самих математических структур.

В определённых условиях это тоже важно.

Описанная в данной работе взаимосвязь функции Эйлера с золотой константой, по-видимому, вычленена из похожей обоймы.

Ну, и что с того? – В любом случае мы имеем дело с проявлением неожиданного свойства числа золотой пропорции.

Всё это позволяет шире представить золотоносный феномен.

Выводы:

1. Исследовано новое свойство константы золотой пропорции Ф в её любопытной взаимосвязи с основанием натурального логарифма и функцией Эйлера $\varphi(n)$, определяющей количество натуральных чисел, которые не больше n и взаимно просты с ним.

Искомая связь выражается бесконечной суммой, приведенной к единице.

2. Исследованы новые грани константы золотой пропорции Ф в её неожиданном проявлении в двух функциональных уравнениях.

Одна из них корреспондируется с простейшей двучленно-аддитивной рекурсией с неоднородной частью $g(n)$.

Другая грань открывается в функциональном уравнении ассоциативности общего вида в области комплексных чисел. Когда порядок выполнения операций суммирования-умножения не имеет значения.

3. Всё это вместе позволяет утверждать об исключительной роли золотой пропорции в синтезе-формировании живых структур в природе.

Она имеет формообразующий характер и фиксирует алгоритм построения-развития, предопределяя генерацию синтезируемых живых объектов:

– в живом имеет место деление клетки на две ей подобные;

– плюс к этому последовательное объединение продуктов деления в разных сочетаниях;

– в целочисленных переменных, коими являются клетки, константа-аттрактор Ф обеспечивает оптимально плотную и одновременно подвижную упаковку животворящих элементов (типа подсолнуха);

– функция $g(n)$ характеризует устойчивость синтезируемой системы к внешним аддитивным воздействиям;

– наличие поворотной симметрии пятого порядка и отсутствие трансляционной симметрии, что свойственно пентагональным формам, позволяет конструировать самые разнообразные живые органы.

В целом это тема отдельного изучения. Одно точно ясно, проведенные исследования позволяет шире представить золотоносный феномен, который наверняка ещё не раз порадует нас своими необыкновенными функциональными проявлениями.

Литература:

1. *Василенко С.Л.* Золотой калейдоскоп: функция Эйлера и золотое сечение // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 18.08.2012. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12187.html.

2. *Василенко С.Л.* Золотой калейдоскоп: функциональные уравнения и золотое сечение // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 30.08.2012. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12197.html.

3. *Кокстер Г.С.М.* Введение в геометрию: Пер. с англ. – М.: Наука, 1966. – 648 с. – http://eek.diary.ru/p165970944.htm.

4. *Винберг Э.Б.* Калейдоскопы // Соросовский образовательный журнал. – 1997. – № 2. – С. 121–127. – http://window.edu.ru/resource/746/20746/files/9702_121.pdf.

5. *Гиндикин С.Г.* Рассказы о математиках и физиках: 3-е изд., расширенное. – М.: МЦНМО, 2001. – 440 с.

6. *Sandifer E.* Euler's Greatest Hits // MAA Online, February 2007. – http://www.maa.org/editorial/euler/How%20Euler%20Did%20It%2040%20Greatest%20Hits.pdf.

7. *Василенко С.Л.* Базовое тождество математических основ гармонии // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16069, 10.09.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161700.htm.

8. *Василенко С.Л.* Базовые соотношения между фундаментальными константами // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm.

9. *Schramm W.* The Fourier Transform of Functions of the Greatest Common Divisor // Electronic J. of Comb. Number Theory, A50, vol. 8(1), 2008. – http://www.integers-ejcnt.org/vol8.html.

10. *Schneider R.P.* A Golden Pair of Identities in the Theory of Numbers // Cornell University Library. – http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1109/1109.3216.pdf; http://arxiv.org/pdf/1010.4298.pdf.

11. *Андреев А.А.*, *Кузьмин Ю.Н.*, *Савин А.Н.*, *Саушкин И.Н.* Функциональные уравнения. – http://ermine.narod.ru/MATH/STAT/Funceq/sect0.html.

12. *EqWorld* / The World of Mathematical Equations / Functional Equations – http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/fe.htm.

13. *Василенко С.Л.* Обобщённые рекурсии с аттрактором золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=49&sm=2.

14. *Василенко С.Л.* Новые рекуррентные формы золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16997, 18.11.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322035.htm / Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 20.11.2011. – http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11534.html.

15. *Bell E.T.* A functional equation in arithmetic // Trans. Amer. Math. Soc. – **39** (1936), 341–344.

16. *Gould H.W.* Associativity and the Golden Section // Fibonacci Quarterly. – **2.3** (1964), p. 203. – http://www.fq.math.ca/Scanned/2-3/gould.pdf.

Украина, Харьков

Авторские страницы:
http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html