

Золотые самородки в математике

Обычная математическая пропорция приводила в изумление многие человеческие умы, по праву получая необычные окраски-названия. Среди них – золотое тройное правило нахождения четвёртого члена пропорции по трём известным. Но, пожалуй, самым примечательным проявлением золотоносной терминологии стала геометрическая пропорция вида $(a+b):b=b:a$. Она была названной божественной, а впоследствии – золотой пропорцией или золотым сечением в его геометрическом толковании. К немалому удивлению эта математическая структура эффектно "выплывает" во всей своей красе в самых неожиданных структурах и приложениях, открывая новые горизонты в познании удивительного феномена...

*И самородки не рождаются сами,
но вот форму выбирают только сами...*

Наряду с маленькими крупинками в золотоносных районах Земли изредка находят большие куски золота – самородки.

Крупные образцы всегда привлекают к себе внимание.

О них пишут газеты, сообщают мировые информационные агентства.

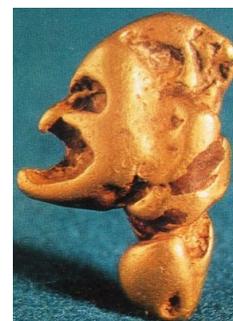
Им дают собственные имена и помещают в специальные фонды.

Например, "Мефистофель" – самая привлекательная находка в сокровищницах Алмазного Фонда России.

Не смотря на малый вес (20 г), самородок вызывает восхищение.

Когда его нашли, то даже стали сомневаться: творение это природы или деяние рук человека?

После тщательного обследования специальная комиссия решила, что "Мефистофель" не подвергался искусственной обработке.



Или взять самородок "Верблюд" (9,288 кг) – заставка в конце статьи.

Но самый крупный из всех добытых на территории России самородков золота – "Большой треугольник" (36 кг).

При общей неправильной форме толщиной в среднем 8 см его очертания приближаются к прямоугольному треугольнику с размерами катетов 27,5 и 31 см.

Взаимосвязи золотых названий с математически-сопряжёнными образами не ограничиваются только природными самородками типа треугольника.

Часто под впечатлением упоённого восхищения воистину сравнительно простыми и одновременно удивительными свойствами математических объектов их экзальтированно облачали в золотоносные одежды.

Вероятно, первый из таких моментов связан с пропорцией – равенством двух отношений $a:b=c:d$, и в частности, с *тройным правилом* или нахождением четвёртого члена пропорции по трём известным [1, с. 311–312].

Название тройного правила имеет индийское происхождение (Брамагупта, VII в.).

Немецкий математик Иоганн Видман¹ (XVI в.) различает 28 задач, решаемых тройным правилом, даёт им названия и восторженно отмечает: «это *золотое правило*, превосходящее все другие правила, в той же мере, как золото превосходит все остальные металлы».

¹ Получил известность тем, что первым употребил и опубликовал знаки *плюса* и *минуса* в своем главном труде «Быстрый и приятный счёт для всех торговцев» (Лейпциг, 1489).

У ранних авторов, включая известного педагога-математика Л.Магницкого² (1669–1739), тройное правило обычно называлось *строкой*, ибо для механизации вычислений данные писались в строку.

Русские учёные относились тройному правилу также с восхищением и в своих математических рукописях отмечали, что «строка похвальная и лучшая из всех иных строк, которую философы зовут золотой строкой».

Но, пожалуй, самым примечательным проявлением золотоносной терминологии стал иной математический феномен, связанный ... опять же с пропорцией.

На этот раз выделение её специального частного случая – геометрической пропорции вида $(a + b) : b = b : a$, названной божественной, а впоследствии – золотой пропорцией или золотым сечением в её геометрическом толковании.

Настоящая статья является продолжением начатых исследований [2–12] по анализу и систематизации проявления уникальных свойств золотого сечения.

Данная тема оказалась весьма плодотворной, интересной и полезной.

Золотое число Φ к немалому удивлению внезапно и эффектно "выплывает" во всей своей красе в самых неожиданных структурах и приложениях, открывая новые горизонты в познании этого феномена в его абсолютно точном значении-понимании.

Исторические корни.

Прообраз золотой пропорции в её современном представлении восходит ещё к античности и впервые описан в "Началах" Евклида в двух формах.

Они различны и довольно далеки друг от друга в глазах греческого математика IV века до н.э. [13].

Первая форма связана с отношением и равенством площадей [14, с. 75]:

Предложение 2.11. Данную прямую рассечь так, чтобы прямоугольник, заключенный между целой и одним из отрезков, был равен квадрату на оставшемся отрезке³.

Вторая форма известна как задача деления отрезка в *крайнем и среднем отношении* (КСО), и впервые её описание звучит следующим образом:

Определение 6.3. Говорится, что прямая делится в *крайнем и среднем отношении*, если как целая к большему отрезку, так и больший отрезок меньшему [14, с. 173].

Алгебраически задача сводится к решению квадратного уравнения частного вида с единичными коэффициентами $x^2 = x + 1$.

История термина «золотого сечения» хорошо описана в работе [15] и берёт своё начало из книги «Die reine Elementar-Mathematik» (1835) Мартина Ома – младшего брата знаменитого немецкого физика Георга Ома, известного своими открытиями в области электричества.

Первое использование «golden section» в английском языке вероятнее всего относится к девятому изданию Британской энциклопедии (1875) в статье по эстетике (James Sully).

В силу своей простоты, наглядности и эстетичной сбалансированности, идеи золотой пропорциональности оказались весьма привлекательными и, возможно, использовались в творчестве отдельных архитекторов, художников, музыкантов и др.

Многие пытались объяснить, почему это так. Но их старания, как правило, не выходили дальше обычных интерпретаций в геометрических представлениях и потому не являлись достаточно убедительными.

² В знак почтения и признания достоинств Пётр I "жаловал" фамилию Магницкий «в сравнении того, как магнит привлекает к себе железо, так он природными и самообразованными способностями своими обратил внимание на себя». – <http://ru.wikipedia.org/?oldid=48065328>.

³ Нумерация 2.11 означает 2-ю книгу и 11-е предложение "Начал" Евклида.

Нечёткая логика в золотом сечении.

Оригинальное суждение об истоках широкого распространения золотого сечения в разных областях человеческой деятельности мы находим в статье [16].

Автор исходит из главного тезиса, когда последующее увеличение степени чего-либо приводит к обратному эффекту. Например, используемые нами в повседневности действия: добавление сахара в кофе, использование парфюмерии, употребление аспирина и т.п.

Формально наиболее благоприятное (оптимальное) условие между чрезмерным или наоборот недостаточным количеством чего-либо описывается как

$$\text{"очень"} x = \text{"не"} x .$$

Оригинальная интерпретация понятия "очень", как x^2 , была предложена Л.Заде в его пионерной статье [17]. Им описан подход по составлению простых отношений между лингвистическими переменными при помощи нечетких высказываний (теория нечётких множеств, нечёткая арифметика).

Понятие "не" x обычно интерпретируется как $1-x$. В частности, в теории вероятностей.

В результате формального построения получается искомое золотосное соотношение золотой пропорциональности $x^2 = x + 1$.

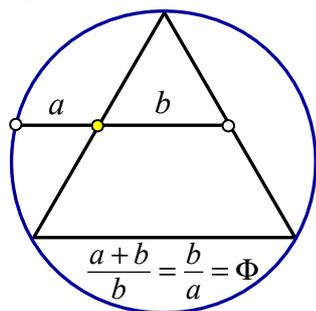
Во всяком случае, становятся более понятными и содержательно интерпретируемыми физические истоки золотого равновесия между большей и меньшей частью целого.

Здесь не нужно особо сомневаться или ставить под сомнение корректность формального приравнивания кажущегося несовпадения гипотетических размерностей между величинами x^2 и x . Ибо всегда можно подразумевать сопоставление x^2 и $x \cdot 1$.

Например, $x^2 = x + 1$ эквивалентно равенству $x^2 = x \cdot 1 + 1 \cdot 1$, что в геометрии равносильно равенству площадей: квадрата – сумме двух прямоугольников, одна из сторон которых равна единице.

Геометрия золотого сечения.

Широко распространённым представлением золотого сечения долгое время являлось традиционное деление отрезка с помощью его достройки до прямоугольного треугольника с соотношением катетов $1 : 2$.



Ну, и конечно, традиционный равносторонний пятиугольник или звезда-пентаграмма

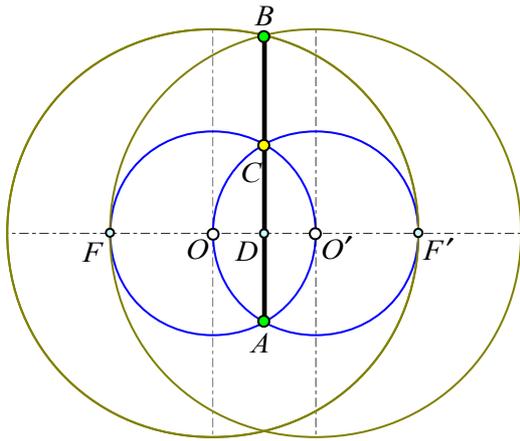
Со временем появились новые оригинальные геометрические построения.

Так, Д.Одом дал удивительно простую конструкцию золотого отношения с использованием равностороннего треугольника [18; 19, с. 105]: если в нём провести прямую через середины двух сторон до пересечения с описанной окружностью, то эти три точки

находятся в золотой пропорции с константой-отношением $\Phi = \phi^{-1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Это свойство использовано, в частности, при построении так называемой «русской матрешки в геометрических образах золотой пропорции» [20] (рис. 1).

Любопытный способ отображения золотого сечения представлен в работе [21] на основе двух одинаковых пар концентрических окружностей (в скобках фигурируют центры):



$$O'(O), O(O'), F'(O), F(O')$$

Примем для определённости радиус меньшей окружности равным $OO' = 2$.

Тогда

$$AC = 2CD = 2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3};$$

$$AB = AD + BD = \sqrt{3} + \sqrt{4^2 - 1^2} = (1 + \sqrt{5})\sqrt{3}.$$

Отсюда вытекает золотое отношение:

$$\frac{AB}{AC} = \Phi.$$

Примем в качестве переменной расстояние $x = OD/r$ в долях от радиуса r .

Тогда при удалении окружностей друг от друга площадь их общего (удвоенного) сегмента по отношению к площади круга равна $S(x) = \frac{\theta - \sin \theta}{\pi}$, где $\theta = 2 \arccos x$ – угол сектора COA .

В частности, $S(0.25) \approx 0.685$, $S(0.5) \approx 0.391$.

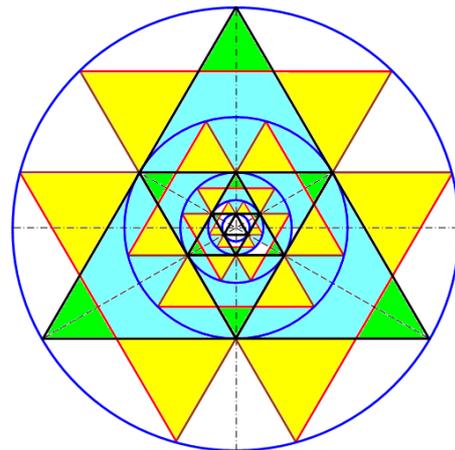
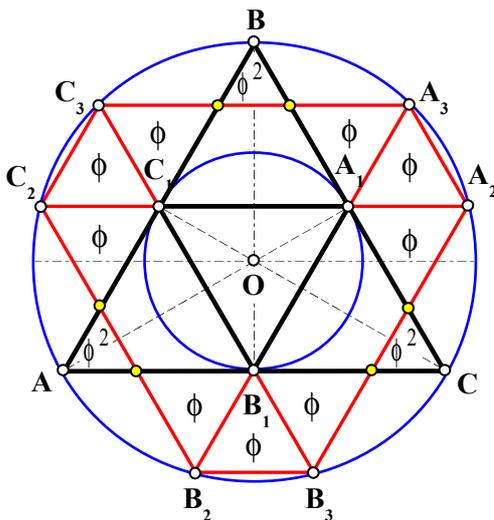


Рис. 1. Первооснова фрактальной структуры "золотоносных" равносторонних треугольников с начальной стороной $AB=2$ и фрактальная мозаика треугольных гармоничных гео-матрешек

А теперь один пример на гармоничность золотого сечения.

Очертим три концентрические полуокружности $A(O)$, $A'(O)$, $F(O)$ такие, что $AA' = FO$. Проведём прямые линии $A-B$ и $A'-B'$ до пересечения в точках C, C' (рис. 2).

Без потери общности рассуждений примем для простоты $AO = 1$.

Прямоугольные треугольники ACD и $A'C'D'$ (с гипотенузами на диаметрах) подобны, если равны отношения катетов (тангенсы углов):

$$\frac{x}{x+(1-2x)} = \frac{x+(1-2x)}{1} \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Искомым решением является корень квадратного уравнения, который меньше 1:

$$x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \phi = \phi^2.$$

Из подобия треугольников следует параллельность сторон: $AC \parallel A'C'$, $CD \parallel C'D'$.

Кроме того, при данных условиях прямоугольные треугольники $\triangle A'CD'$ и $\triangle EOD'$ с одинаковым острым углом при вершине D также подобны.

Следовательно, точки E, C', D' расположены на одной прямой.

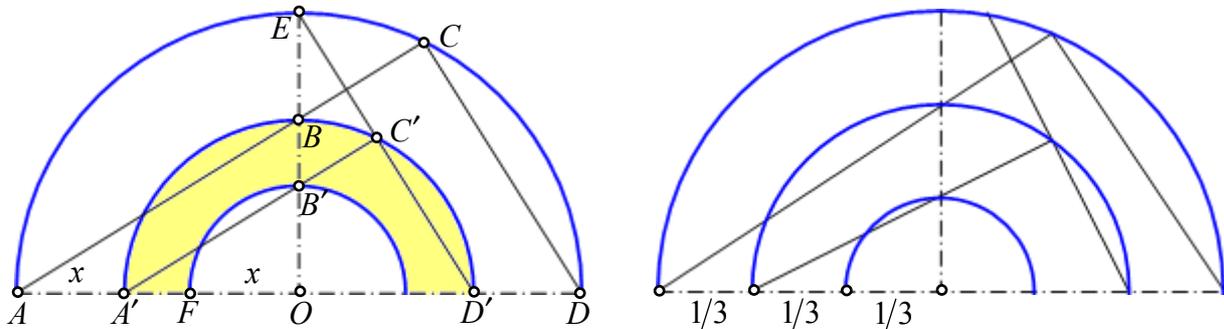


Рис. 2. Иллюстрация разной сходимости образующих отрезков в концентрических окружностях: идеальное сочленение наблюдается лишь при золотой пропорции радиусов

Несмотря на, казалось бы, равное наращивание радиусов окружности на одну треть, более компактное и гармоничное образующих отрезков для концентрических окружностей идеальное сочленение наблюдается лишь при золотой пропорции радиусов.

Здесь просматриваются некоторые аналогии с идеальным сочленением чевиан и образующих линий, проходящих через три золотых фокуса треугольника [22].

Константа Солднера и логарифмический интеграл.

В математике известна [23, с. 34] константа Солднера⁴ или Рамануджана-Солднера (A070769⁵)

$$\mu = 1,45136923488338105028396848589\dots$$

Это такое число, для которого логарифмический интеграл⁶ равен нулю $\text{li}(\mu) = 0$.

$$\text{Соответственно } \text{li}(x) = \int_{\mu}^x \frac{dt}{\ln t} \text{ для } x > \mu.$$

Примечательно, что сумма (константа Солднера + 1/6) близка к золотому числу Φ с различием лишь в шестом знаке после запятой:

$$s = \mu + \frac{1}{6} \approx 1.618036, \quad \Phi \approx 1.618034.$$

Цепная (непрерывная) дробь суммы s имеет начало, состоящее из единиц (A160923):

$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 5, 11, 1, 3, 1, 1, 4, 1, 1, 1, \dots$$

То есть её начальными приближениями являются числа Фибоначчи.

⁴ <http://mathworld.wolfram.com/SoldnersConstant.html>.

⁵ Библиотека числовых последовательностей OEIS – <http://oeis.org/>.

⁶ <http://mathworld.wolfram.com/LogarithmicIntegral.html>.

Альтернативная константа.

Подобно рекурсии для чисел Фибоначчи $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ в математике известны случайные последовательности Фибоначчи⁷ путём простой модификации

$$v_n = \pm v_{n-1} \pm v_{n-2}, \quad v_1 = v_2 = 1,$$

где знаки \pm выбираются наугад с равной вероятностью 0,5 независимо друг от друга для разных значений n .

Программно-машинная интерпретация (реализация), в частности, имеет вид:

$$v_n = \text{sign}(\text{rnd } 2-1) v_{n-1} + \text{sign}(\text{rnd } 2-1) v_{n-2},$$

где $\text{rnd } x$ – случайное число, равномерно распределённое в интервале $[0, x]$;

$\text{sign}(x) = \{-1, x < 0; 1, x \geq 0\}$ – знаковая функция, принимающая значения ± 1 .

Случайные рекуррентные последовательности подобного рода растут в определенной геометрической прогрессии, но их знаменатели трудно вычислить.

В 2000 г. было показано (D.Viswanath) [24], что с вероятностью 1 существует предел

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} |v_n|^{1/n} = 1,1319882487943\dots,$$

как новая математическая константа [25, 26] (A078416).

То есть абсолютное значение n -го числа в любой случайной последовательности Фибоначчи с ростом n примерно равно степени числа V .

Обоснование данного результата включает в себя теорию случайных матриц, фрактальную меру, компьютерный расчет и анализ погрешности округления.

Но в целом, он остаётся прямым потомком пары итальянских кроликов XIII века.

В работе [27] обосновывается, что среднее значение n -го члена последовательности определяется рекуррентным соотношением $g_n = |g_{n-1} \pm g_{n-2}|$ (\pm знак выбирается случайно) и увеличивается в геометрической прогрессии со скоростью роста, определяемой алгебраическим числом 3-го порядка.

Доказательство включает бинарное дерево, в котором число узлов в каждой строке – есть числа Фибоначчи.

Если определить m_n как среднее n -го члена случайной последовательности Фибоначчи, стартующей с двух произвольных начальных значений g_0, g_0 , не равных одновременно нулю, то отношение $m_{n+1}/m_n, n \rightarrow \infty$ имеет предел $\alpha - 1 \approx 1,20557$, где

$$\alpha = \frac{c}{6} + \frac{8}{3c} + \frac{2}{3} \approx 2,20557 \text{ – вещественный корень кубического уравнения } \alpha^3 = 2\alpha^2 + 1,$$

$$c = \sqrt[3]{172 + 12\sqrt{177}}.$$

Как известно, отношение соседних чисел Фибоначчи стремится к золотому числу.

Потому константу $\alpha - 1$ некоторым образом можно считать родственной или альтернативной величине Φ , то есть её стохастическим аналогом.

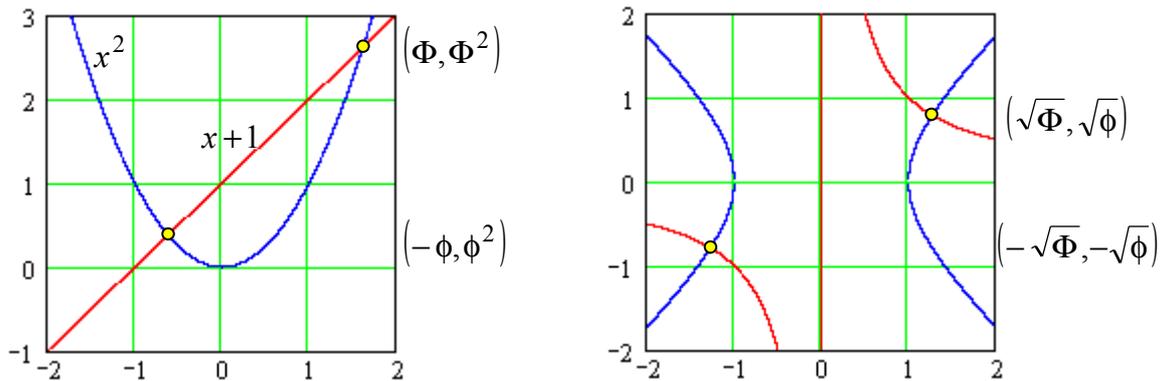
Хотя здесь ещё остаются некоторые разночтения (A083404), например, в части обоснованности среднего значения для n -го стохастического термина Фибоначчи.

Золотая константа в гиперболическом измерении.

Золотое сечение имеет несколько альтернативных интерпретаций.

⁷ <http://mathworld.wolfram.com/RandomFibonacciSequence.html>.

В частности, одна из его трактовок отображается графическим решением квадратного уравнения $x^2 = x + 1$ как точка пересечения параболы x^2 и прямой $x + 1$.



Параболическое описание здесь геометрически характеризует квадрат Φ^2 , который по площади равен прямоугольнику $(\Phi + 1) \cdot 1$.

Похожее представление золотого числа также на языке гипербол.

Наиболее частый пример гиперболы – график функции $y = 1/x$. Такая же гипербола, только повернутая на 45° , определяется каноническим уравнением $x^2 - y^2 = 1$.

Обе они пересекаются в точках (c, c^{-1}) и $(-c, -c^{-1})$, где $c = \sqrt{\Phi} \approx 1,2720$, что отвечает алгебраическому уравнению $x^4 = x^2 + 1$.

Как правило, отрицательные решения соответствуют внешней области исследуемой задачи, например, точке золотого сечения, лежащей за пределами разделяемого отрезка.

Обратимая степень.

В математике имеется красивое "обратимое" алгебраическое уравнение.

$$x^z = z^x.$$

В зависимости от выбора функции $z(x)$, могут быть любопытные решения.

Например, функция-радикал $z(x) = \sqrt{1+x}$ образует уравнение:

$$x^{\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+x}^x.$$

Решить его в общем виде, несмотря на кажущуюся простоту, затруднительно.

Но один частный случай находится сравнительно просто.

Исходя из очевидного тождества $c^c \equiv c^c$, можно попытаться определить такое число x , для которого выполняется равенство основания и степени $x = \sqrt{1+x}$ или после возведения в квадрат $x^2 = x + 1$, что приводит к одному из решений $x = \Phi$ – золотой константе.

Есть и другое решение, которое находится численно и равно $\sim 3,6015\dots$ (A182196).

Похожее уравнение $x^{\sqrt{1-x}} = \sqrt{1-x}^x$ имеет решение $x = \phi = \Phi^{-1}$.

А вот функция $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ подобным образом, но уже через приравнение

$x = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, преобразуется в кубическое уравнение $x^3 + x^2 - 1 = 0$.

Комплексные числа – прародители золотого сечения.

Есть одна особенность, когда отдельные мнимые числа в их альтернативной записи содержат константу золотого сечения.

Например, имеет место такое тождество [28]:

$$\sqrt{1+2i} = \sqrt{\Phi} + i\sqrt{\phi}.$$

Действительно,

$$\sqrt{1+2i} = a + ib \rightarrow 1+2i = a^2 + i2ab - b^2 \rightarrow ab=1 \rightarrow a^4 - a^2 - 1 = 0 \rightarrow a = \sqrt{\Phi}.$$

На самом деле всё довольно просто, если учесть истоки появления золотой константы из алгебраической геометрии на основе прямоугольного треугольника с соотношением катетов 1:2.

По теореме Пифагора это приводит к гипотенузе, длина которой кратна корню из пяти $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ – иррациональному базису числа Φ .

Отсюда, подобно разложению константы $\Phi = 1 + \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \dots$ в виде бесконечной цепной (непрерывной) дроби, получается и разложение мнимого числа

$$\sqrt{1+2i} = 1+i + \frac{0,5}{1+i+} \frac{0,5}{1+i+} \frac{0,5}{1+i+} \dots$$

Аналогично получаем следующее тождество:

$$\sqrt{1+\frac{i}{2}} = \frac{\sqrt{\Phi^3} + i\sqrt{\phi^3}}{2}$$

или его похожая запись

$$\sqrt{2+i} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{i}{2}} = \frac{\sqrt{\Phi^3} + i\sqrt{\phi^3}}{\sqrt{2}}.$$

Например, преобразование второй иррациональности даёт:

$$\sqrt{2+i} = a + ib \rightarrow 2+i = a^2 + i2ab - b^2 \rightarrow 2ab=1 \rightarrow a^4 - 2a^2 - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow a = \sqrt{\frac{\Phi^3}{2}}.$$

Соответствующая непрерывная дробь имеет вид:

$$\sqrt{1+\frac{i}{2}} = \frac{1+i}{2} + \frac{1}{1+i+} \frac{1}{1+i+} \frac{1}{1+i+} \dots$$

Это была демонстрация квадратного корня.

А вот квадрат любого комплексного числа $(a + ib)^2 = x + iy$ даёт пифагорову тройку чисел $(x, y, z) = (a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ таких, что $x^2 + y^2 = z^2$.

В частности прямоугольный египетский треугольник (3, 4, 5) образуется при раскрытии комплексного числа

$$(2+i)^2 = 3 + 4i, \quad z = 2^2 + 1^2 = 5.$$

Числа π – Φ .

В работе [29] описаны базовые соотношения между фундаментальными константами (π , e , Φ). Высказана мысль, что связующее триединство замечательных констант (π , e , Φ) наиболее отчётливо проявляется через их "квадратичное происхождение" в обычных конических сечениях с порождением кривых второго порядка: окружности–эллипса, гиперболы и параболы.

Приближенная взаимосвязь между этими числами эвристическими формулами малопродуктивна, разве как полезная тренировка ума, ибо отсутствует содержательность и математическая обусловленность.

Одновременно поражают своей необыкновенностью формулы Рамануджана. Они не тривиальны и абсолютно точны в своём предельном представлении, – с использованием непростых непрерывных (цепных) дробей и бесконечных сумм.

В этой связи весьма любопытна необычная формула связи чисел π и Φ [30] с использованием вложенных корней числа 2:

$$\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2 + \sqrt{2 + \Phi}}}}} \quad \text{\small } n \text{ корней}$$

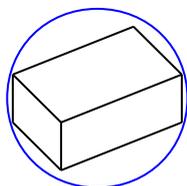
Достаточно эффектно выглядит одна разновидность геометрической связи двух фундаментальных констант.

Золотой кубоид.

Золотой кубоид [31] – это прямоугольный параллелепипед с отношением рёбер $\phi : 1 : \Phi$.

Конкретику размеров $\phi \times 1 \times \Phi$ иногда называют кирпичом (брикетом) Фибоначчи

Его объём численно равен 1.



Площадь боковой поверхности составляет $2(\phi + \Phi + 1) = 4\Phi$.

Диагональ равна $d = \sqrt{1^2 + \phi^2 + \Phi^2} = 2$.

Опишем вокруг брикета сферу так, чтобы она касалась всех его вершин.

Поскольку радиус этой сферы равен половине диагонали d , то её площадь вычисляется как 4π .

Таким образом, площади поверхности брикета Фибоначчи $\phi \times 1 \times \Phi$ и описанного вокруг него шара соотносятся как $\Phi : \pi$.

Золотой ромбоэдр.

Ромбоэдр⁸ – параллелепипед (трёхмерная фигура, обычно наклонная) с гранями в виде ромбов. Все рёбра имеют одинаковую длину.

По крайней мере, две вершины ромбоэдра таковы, что все прилежащие к ним углы равны между собой. Параллелепипед является ромбоэдром тогда и только тогда, когда он имеет ось симметрии третьего порядка.

*Золотой ромбоэдр*⁹ содержит шесть одинаковых граней в форме золотых ромбов, у которых отношение диагоналей равно константе золотого сечения Φ .

В общем случае возможен остро- и тупоугольный вариант формирования золотого ромбоэдра с длиной ребра a .

⁸ <http://en.wikipedia.org/wiki/Rhombohedron>.

⁹ <http://mathworld.wolfram.com/GoldenRhombohedron.html>.

Они имеют одинаковую площадь поверхности

$$S = \frac{12}{5}\sqrt{5} \cdot a^2 = \frac{12}{5}(\Phi + \phi) \cdot a^2,$$

но два разных объёма

$$V = \frac{1}{5}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}} \cdot a^3,$$

или соответственно для "острой" или "тупой" модификации

$$V_o = \frac{2}{5}\sqrt{2 + \Phi} \cdot a^3, \quad V_T = \frac{2}{5}\sqrt{2 - \phi} \cdot a^3.$$

Если "привязаться" к длине большей диагонали $d = \frac{2a}{\sqrt{2 - \phi}}$ ромбов и принять её равной единице, то данные формулы выглядят гораздо проще и более выразительно

$$S = 3\phi^2, \quad V_o = \frac{\phi^3}{4}, \quad V_T = \frac{\phi^2}{4}.$$

Золотой стринг.

В изучении формальных языков широко применяется комбинаторика слов¹⁰.

Её изучение возникло независимо в нескольких математических направлениях, таких как теория чисел, теория групп, теория вероятностей.

Она имеет приложение в комбинаторном исчислении и фрактальном анализе.

Появляется в задачах теоретической информатики, теории автоматов, символической динамики и лингвистики.

Одним из наиболее ярких проявлений в словесной комбинаторике является фибоначчьево слово (*Fibonacci word*) [32, с. 1004–1005; 33, с. 41] или "золотой стринг"¹¹.

Задаются два исходных слова $S_0 = 0$ и $S_1 = 01$.

Каждое последующее слово, как последовательность двоичных цифр или символов из любых двух букв алфавита, является объединением двух предыдущих слов по схеме ($n \geq 2$):

$$S_n = S_{n-1}S_{n-2}.$$

В результате такой операции рекуррентно и поэтапно формируется бесконечная последовательность S , состоящая из совмещаемых частей:

$$S_0 = 0$$

$$S_1 = 01$$

$$S_2 = 010$$

$$S_3 = 01001$$

$$S_4 = 01001010$$

$$S_5 = 0100101001001$$

$$S_6 = 010010100100101001010...$$

¹⁰ http://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorics_on_words.

¹¹ http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_string.

➤ число $0.010010100\dots$, десятичные знаки которого совпадают с цифрами бесконечного слова Фибоначчи, является трансцендентным;

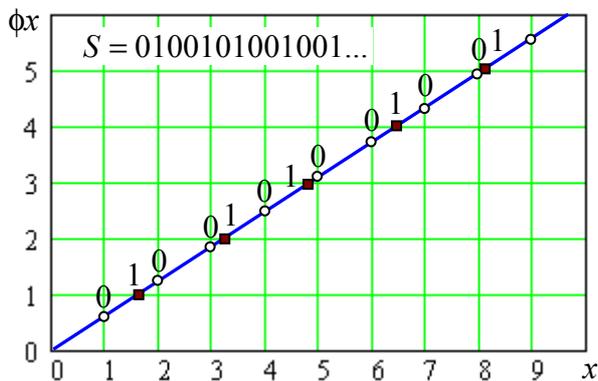


Рис. 2. Бесконечное слово Фибоначчи как режущая последовательность

➤ буквы (литеры) 1 находятся на позициях, задаваемых верхней последовательностью Витгофа $\langle n\Phi^2 \rangle$;

➤ буквы (литеры) 0 находятся на позициях, задаваемых нижней последовательностью Витгофа $\langle n\Phi \rangle$;

➤ бесконечное слово Фибоначчи S может содержать 3 повторения одинаковых последовательных фрагментов (подслов), но никогда 4; слово S содержит не

более $2 + \Phi$ повторений – это наименьший (критический) показатель в классе слов Штурма¹⁴ (бильярдных последовательностей);

➤ слово S часто используется в качестве наихудшего случая-теста для алгоритмов обнаружения повторов в анализируемой строке данных.

Порождающий золотой морфизм.

В работе [6] рассмотрены бесконечные ряды последовательного наращивания двоичных элементов в единое слово с использованием разных соответствий $0 \rightarrow ab, 1 \rightarrow cde$, сопоставляя нулю – ab и единице – cde (сочетание знаков 0 и 1).

В этой связи представляет интерес другое соответствие $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 10$, которое начинается с единицы и образует бесконечное слово¹⁵ (A005614)

$$10110101101101011010110101101011\dots$$

Фактически имеем рассмотренное выше бесконечное слово Фибоначчи S , в котором нули и единицы поменялись местами.

Данное слово известно ещё одной особенностью.

Будучи преобразованным из двоичной формы $0,10110101101101\dots_2$ в десятичную, оно представляет случайную константу (A014565) $R = 0,70980344286129\dots$ ¹⁶.

Само же слово (случайная последовательность единиц и нулей) является частным случаем – первой строкой более общей матрицы (A126999), формируемой согласно аналитической формуле

$$T_{i,j} = f(i\Phi) + f(j\Phi) - f(i\Phi + j\Phi),$$

где $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ – дробная часть числа x .

То есть де-факто генерируется 0-1-бинарный массив на основе дробной части иррационального числа – золотой константы Φ :

¹⁴ http://en.wikipedia.org/wiki/Sturmian_word.

¹⁵ <http://mathworld.wolfram.com/RabbitSequence.html>.

¹⁶ <http://mathworld.wolfram.com/RabbitConstant.html>.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Вторая строка данной матрицы – характеристическая последовательность (A123740) для AB -чисел Витгофа [6].

С данной матрицей перекликается друга форма

$$T_{i,j} = \text{floor}(j\Phi) + \text{floor}(i\Phi) - \text{floor}(j\Phi - i\Phi),$$

где $\text{floor}(\xi)$ – наибольшее целое, которое не больше ξ .

Отметим, что для положительных значений величин ξ эта функция совпадает с выделяемой целой частью (trunc), для отрицательных величин ξ она работает несколько иначе.

Так, $\text{floor}(-1,2) = -2$, $\text{trunc}(-1,2) = \lfloor -1,2 \rfloor = -1$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Первая строка здесь отвечает фибоначчивому слову с морфизмом $0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 011$.

А вот последовательность $a_n = \lfloor kn\Phi \rfloor - k \lfloor n\Phi \rfloor$ даёт псевдослучайное распределение натуральных чисел $0, 1, \dots, (k-1)$ с одинаковой вероятностью $(k-1)^{-1}$.

Последовательности разно-вероятностных чисел.

В библиотеке числовых последовательностей OEIS – <http://oeis.org/> есть множество рядов, объединяемых общей схемой формирования по аналитической формуле:

$$a_n = \lfloor (bn+c)\Phi \rfloor - b \lfloor n\Phi \rfloor - \lfloor c\Phi \rfloor,$$

где b, c – априори задаваемые целочисленные параметры; $\lfloor \xi \rfloor$ – целая часть числа ξ ;

Ряд a_n составляют целые числа из интервала $[0, b]$, то есть $0 \leq a_n \leq b$.

Последовательные позиции одинаковых чисел отличаются в точности на числа Фибоначчи.

Вероятности p_0, p_b появления в данной последовательности нулей и b -чисел равны соответственно дробным частям вещественных чисел $c\phi^2$ и $c\phi$:

$$p_0 = c\phi^2 - \lfloor c\phi^2 \rfloor, \quad p_b = c\phi - \lfloor c\phi \rfloor.$$

Количество p_k каждого из остальных целых чисел $k \in [1, b-1]$ одинаково и составляет $\frac{1}{b}$ часть.

Таким образом, общее количество 0-чисел и b -чисел в анализируемой последовательности равно $p_0 + p_b = \frac{1}{b}$. А их соотношение между собой зависит от параметра c .

Например, последовательность a_n с параметрами $(b, c) = (9, 2)$ имеет вид:

5 2 7 4 1 6 3 8 5 1 7 3 0 6 2 8 4 1 6 3 9 5 2 7 4 0 6 2 8 5 1 7 3 0 5 2 8 4 1 6 3 8 5 1 7 4 0
 6 2 8 4 1 7 3 9 5 2 7 4 0 6 3 8 5 1 7 3 0 6 2 8 4 1 6 3 8 5 2 7 4 0 6 2 8 5 1 7 3 0 5 2 7 4 1
 6 3 8 5 1 7 4 0 6 2 8 4 1 6 3 9 5 2 7 4 0 6 3 8 5 1 7 3 0 5 2 8 4 1 6 3 8 5 2 7 4 0 6 2 8 4 1
 7 3 9 5 2 7 4 1 6 3 8 5 1 7 3 0 6 2 8 4 1 6 3 9 5 2 7 4 0 6 2 8 5 1 7 3 0 5 2 8 4 1 6 3 8 5 1
 7 4 0 6 2 8 4 1 7 3 9 5 2 7 4 0 6 3 8 5 1 7 3 0 6 2 8 4 1 6 3 8 5 2 7 4 0 6 2 8 5 1 7 3 0 5 2
 7 4 1 6 3 8 5 1 7 4 0 6 2 8 4 1 6 3 9 5 2 7 4 0 6 2 8 5 1 7 3 0 5 2 8 4 1 6 3 8 5 1 7 4 0 6 2
 8 4 1 7 3 9 5 2 7 4 0 6 3 8 5 1 7 3 0 6 2 8 4 1 6 3 8 5 2 7 4 0 6 2 8 5 1 7 3 0 5 2 7 4 1 6 3
 8 5 1 7 4 0 6 2 8 4 1 6 3 9 5 2 7 4 0 6 3 8 5 1 7 3 0

Нули повторяются через интервалы, хаотически равные одному из чисел Фибоначчи $(F_6, F_7, F_8) = (8, 13, 21)$:

13 8 13 13 8 13 8 13 13 8 13 21 13 8 13 13 8 13 8 13 13 13 8 ...

Единицы повторяются через интервалы из подмножества $(F_5, F_6, F_7) = (5, 8, 13)$:

5 8 13 8 5 8 13 8 13 8 5 8 13 8 13 8 5 8 13 8 5 8 13 8 13 8 ...

С такими же интервалами, но в другой повторяемости идут и числа $2 \div 8$.

Число $b = 9$ следует с интервалами $(F_8, F_9, F_{10}) = (21, 34, 55)$:

34 55 34 21 34 55 34 55 34 21 34 55 34 21 34 55 34 55 34 21 ...

За счёт разных шагов чередования, в конечном итоге, образуются чёткая вероятность присутствия в общей последовательности каждого из целых чисел $[0, b]$.

Разложение Энгеля¹⁷.

Разложение Энгеля [34] положительного действительного числа x – уникальная неубывающая последовательность положительных целых чисел $\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ такая, что имеет место бесконечная сумма произведений

$$x = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \prod_k^n \frac{1}{a_k}.$$

Рациональные числа x имеют ограниченное разложение, в то время как иррациональным числам x свойственно бесконечное разложение.

Последовательность имеет вид (A028259):

1, 2, 5, 6, 13, 16, 16, 38, 48, 58, 104, 177, 263, 332, 389, 4102, 4575, 5081, 9962, 18316, 86613, 233239, ...

В работе [35] подмечено, что разложение Энгеля может быть также записано в виде *восходящего варианта цепной дроби*, и в частности, для золотого сечения:

¹⁷ <http://mathworld.wolfram.com/EngelExpansion.html>; http://en.wikipedia.org/wiki/Engel_expansion.

$$\Phi = \frac{1 + \frac{1 + \dots}{a_3}}{1 + \frac{a_2}{a_1}} = 1 + \frac{1 + \frac{1 + \dots}{6}}{5}.$$

Подобные восходящие дроби изучались ещё Фибоначчи (1202), который представлял последовательность числителей и знаменателей в виде поднимающейся цепной дроби:

$$\frac{p_1}{q_1} \frac{p_2}{q_2} \frac{p_3}{q_3} \frac{p_4}{q_4} = \frac{p_4 + \frac{p_3 + \frac{p_2 + \frac{p_1}{q_1}}{q_2}}{q_3}}{q_4}.$$

Алгоритмическое построение разложение Энгеля довольно простое и сводится к двум итерационным операциям ($u_1 = x, k = 1, 2, 3 \dots$):

$$a_k = \left\lceil \frac{1}{u_k} \right\rceil, \quad u_{k+1} = u_k a_k - 1,$$

где $\lceil \xi \rceil$ – ceiling-функция – наименьшее целое, которое не меньше ξ .

Образно говоря $\lfloor \xi \rfloor$ и $\lceil \xi \rceil$ – ограничения вещественного числа ξ ближайшими целыми числами соответственно снизу и сверху (пол – потолок)¹⁸, то есть: $\lfloor \xi \rfloor \leq \xi \leq \lceil \xi \rceil$.

Фрактальные матрицы натуральных чисел.

```
D(m) := (k v500) ← (1 0)
for i ∈ 0..m
  while v_k ≠ 0
    k ← k + 1
    (v_k Di,0) ← (k k)
    for j ∈ 1..m
      c ← trunc(Φ · Di,j-1 + 0.5)
      Di,j ← c
      v_c ← c if c ≤ 500
  D
```

Пусть n – возрастающая последовательность натуральных чисел.

Вариация (дисперсия) натурального ряда n – это двумерный массив D , в котором каждое натуральное число присутствует (встречается) только единожды.

То есть D – перестановка натуральных чисел.

Исходная единица расположена в угловой ячейке

$$D_{0,0} = 1.$$

Каждая i -я строка массива-вариации D формируется по заданному правилу (формуле) относительно предшествующего элемента

$$D_{i,j} = f(D_{i,j-1}).$$

Начальный элемент строки $D_{i,0}$ определяется как наименьшее натуральное число, которое ещё не встречалось при генерации вышерасположенных строк.

Последовательность u , определяемая как $u(t)$ = (номер строки из D , которая содержит t), является фрактальной последовательностью.

Таким образом, имеет место бесконечно большое количество непересекающихся (не имеющих одинаковых элементов) бесконечных последовательностей положительных целых чисел.

В частности, разновидности (A191426–A191428, A191433– A191437).

¹⁸ Целая часть // Википедия. – <http://ru.wikipedia.org/?oldid=47464301>.

$$D_{i,j} = [D_{i,j-1}\Phi + d]$$

$d = 0,5$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 \\ 4 & 6 & 10 & 16 & 26 & 42 & 68 \\ 7 & 11 & 18 & 29 & 47 & 76 & 123 \\ 9 & 15 & 24 & 39 & 63 & 102 & 165 \\ 12 & 19 & 31 & 50 & 81 & 131 & 212 \\ 14 & 23 & 37 & 60 & 97 & 157 & 254 \\ 17 & 28 & 45 & 73 & 118 & 191 & 309 \end{pmatrix}$	$d = 1,5$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 11 & 19 & 32 & 53 \\ 2 & 4 & 7 & 12 & 20 & 33 & 54 \\ 5 & 9 & 16 & 27 & 45 & 74 & 121 \\ 8 & 14 & 24 & 40 & 66 & 108 & 176 \\ 10 & 17 & 29 & 48 & 79 & 129 & 210 \\ 13 & 22 & 37 & 61 & 100 & 163 & 265 \\ 15 & 25 & 41 & 67 & 109 & 177 & 287 \end{pmatrix}$	$d = 3$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 17 & 30 & 51 & 85 \\ 2 & 6 & 12 & 22 & 38 & 64 & 106 \\ 3 & 7 & 14 & 25 & 43 & 72 & 119 \\ 5 & 11 & 20 & 35 & 59 & 98 & 161 \\ 8 & 15 & 27 & 46 & 77 & 127 & 208 \\ 10 & 19 & 33 & 56 & 93 & 153 & 250 \\ 13 & 24 & 41 & 69 & 114 & 187 & 305 \end{pmatrix}$
--	---	--

$$D_{i,j} = [D_{i,j-1}\Phi^2 + d]$$

$d = 0,5$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 21 & 55 & 144 \\ 2 & 5 & 13 & 34 & 89 & 233 \\ 4 & 10 & 26 & 68 & 178 & 466 \\ 6 & 16 & 42 & 110 & 288 & 754 \\ 7 & 18 & 47 & 123 & 322 & 843 \\ 9 & 24 & 63 & 165 & 432 & 1131 \end{pmatrix}$	$d = 1,5$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 11 & 30 & 80 & 210 \\ 2 & 6 & 17 & 46 & 121 & 318 \\ 3 & 9 & 25 & 66 & 174 & 457 \\ 5 & 14 & 38 & 100 & 263 & 690 \\ 7 & 19 & 51 & 135 & 354 & 928 \\ 8 & 22 & 59 & 155 & 407 & 1067 \end{pmatrix}$	$d = \Phi$ $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 & 33 & 88 & 232 \\ 2 & 6 & 17 & 46 & 122 & 321 \\ 3 & 9 & 25 & 67 & 177 & 465 \\ 5 & 14 & 38 & 101 & 266 & 698 \\ 7 & 19 & 51 & 135 & 355 & 931 \\ 8 & 22 & 59 & 156 & 410 & 1075 \end{pmatrix}$
--	---	--

$$D_{i,j} = [D_{i,j-1}\Phi^2 + 3]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 16 & 44 & 118 & 311 \\ 2 & 8 & 23 & 63 & 167 & 440 \\ 3 & 10 & 29 & 78 & 207 & 544 \\ 4 & 13 & 37 & 99 & 262 & 688 \\ 6 & 18 & 50 & 133 & 351 & 921 \\ 7 & 21 & 57 & 152 & 400 & 1050 \end{pmatrix}$$

$$D_{i,j} = [D_{i,j-1}\Phi^2 + \phi^2]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 21 & 55 & 144 \\ 2 & 5 & 13 & 34 & 89 & 233 \\ 4 & 10 & 26 & 68 & 178 & 466 \\ 6 & 16 & 42 & 110 & 288 & 754 \\ 7 & 18 & 47 & 123 & 322 & 843 \\ 9 & 23 & 60 & 157 & 411 & 1076 \end{pmatrix}$$

$$D_{i,j} = 2[D_{i,j-1}\Phi]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 18 & 58 & 186 \\ 3 & 8 & 24 & 76 & 244 & 788 \\ 4 & 12 & 38 & 122 & 394 & 1274 \\ 5 & 16 & 50 & 160 & 516 & 1668 \\ 7 & 22 & 70 & 226 & 730 & 2362 \\ 9 & 28 & 90 & 290 & 938 & 3034 \end{pmatrix}$$

Существуют и другие схемы разбиения натурального ряда на подобные матрицы. Например, (A182849, A182801):

$$T_{i,j} = \sum_{k \geq 1} \left[j \frac{i+\phi}{k+\phi} \right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 9 & 14 & 18 \\ 2 & 7 & 13 & 19 & 27 & 36 \\ 4 & 11 & 21 & 31 & 43 & 56 \\ 5 & 16 & 30 & 45 & 61 & 78 \\ 8 & 22 & 39 & 57 & 79 & 101 \\ 10 & 28 & 50 & 73 & 98 & 126 \end{pmatrix}$$

$$T_{i,j} = \sum_{k \geq 1} [j\Phi^{i-k}]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 10 & 12 \\ 2 & 6 & 9 & 13 & 18 & 21 \\ 4 & 11 & 16 & 23 & 31 & 36 \\ 8 & 19 & 28 & 39 & 52 & 61 \\ 14 & 32 & 48 & 66 & 86 & 102 \\ 25 & 54 & 81 & 110 & 141 & 168 \end{pmatrix}$$

Отличительной особенностью здесь является аналитическая (не рекуррентная) форма генерирования преобразованного массива натуральных чисел.

Естественно суммирование по индексу k осуществляется до тех пор, пока целые части выражений отличны от нуля.

В частности, первое суммирование равносильно равенству

$$T_{i,j} = \sum_{k=1}^{c-\phi} \left\lfloor \frac{c}{k+\phi} \right\rfloor, \quad c = j(i+\phi).$$

Соответственно, второе суммирование

$$T_{i,j} = \sum_{k=1}^{i+c \ln j} \left\lfloor j\Phi^{i-k} \right\rfloor, \quad c = \frac{1}{\ln \Phi}.$$

С использованием золотого сечения натуральный ряд можно также разбить на заданное конечное число $m + 1$ последовательностей-строк с помощью универсальной формулы:

$$T_{m-i,j} = j + \sum_{k=0, k \neq i}^m \left\lfloor j \frac{\Phi+k}{\Phi+i} \right\rfloor, \quad i = \overline{0, m}, \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

Ниже показаны примеры разбиения натурального ряда на 2–6 строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 11 & 12 & 14 \\ 2 & 5 & 7 & 10 & 13 & 15 & 18 & 20 & 23 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 & 11 & 15 & 17 & 20 & 24 \\ 2 & 5 & 9 & 12 & 16 & 19 & 23 & 26 & 30 \\ 3 & 8 & 13 & 18 & 22 & 27 & 32 & 37 & 41 \\ 6 & 14 & 21 & 29 & 38 & 45 & 52 & 59 & 68 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 7 & 10 & 12 & 15 & 16 & 19 \\ 2 & 5 & 8 & 11 & 14 & 17 & 20 & 23 & 26 \\ 4 & 9 & 13 & 18 & 24 & 28 & 33 & 37 & 43 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 11 & 15 & 16 & 21 & 24 & 27 \\ 2 & 6 & 10 & 14 & 17 & 22 & 25 & 29 & 34 \\ 3 & 8 & 13 & 18 & 23 & 28 & 33 & 38 & 43 \\ 5 & 12 & 19 & 26 & 32 & 39 & 47 & 54 & 60 \\ 9 & 20 & 31 & 42 & 55 & 65 & 76 & 86 & 99 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 12 & 16 & 21 & 22 & 27 & 31 \\ 2 & 6 & 10 & 15 & 20 & 23 & 29 & 33 & 37 \\ 3 & 8 & 14 & 19 & 24 & 30 & 35 & 40 & 46 \\ 4 & 11 & 18 & 25 & 32 & 38 & 45 & 52 & 59 \\ 7 & 17 & 26 & 36 & 44 & 54 & 64 & 74 & 82 \\ 13 & 28 & 43 & 58 & 75 & 89 & 104 & 118 & 135 \end{pmatrix}$$

Частные случаи приведены в библиотеке последовательностей:

- две строки _ A000201, A001950 – нижняя и верхняя последовательности Витгоффа;
- три строки _ A184901, A184903, A016789;
- четыре строки _ A190504–A190507.

Аналогичным образом получаем другую разновидность формирования априори заданного конечного числа $m + 1$ последовательностей-строк согласно формуле

$$T_{m-i,j} = j + \sum_{k=0, k \neq i}^m \left\lfloor j\Phi^{k-i} \right\rfloor, \quad i = \overline{0, m}, \quad j = 1, 2, 3 \dots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 6 & 8 & 9 & 11 & 12 & 14 \\ 2 & 5 & 7 & 10 & 13 & 15 & 18 & 20 & 23 \end{pmatrix}
 \quad
 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 10 & 12 & 14 & 16 & 19 \\ 2 & 6 & 9 & 13 & 17 & 20 & 24 & 27 & 31 \\ 4 & 11 & 15 & 22 & 29 & 33 & 40 & 44 & 51 \\ 8 & 18 & 26 & 36 & 47 & 55 & 65 & 73 & 84 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 \\ 2 & 6 & 8 & 12 & 16 & 18 & 22 & 24 & 28 \\ 4 & 10 & 14 & 20 & 26 & 30 & 36 & 40 & 46 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 10 & 12 & 15 & 17 & 20 \\ 2 & 6 & 9 & 13 & 18 & 21 & 26 & 29 & 34 \\ 4 & 11 & 16 & 23 & 31 & 36 & 43 & 48 & 56 \\ 8 & 19 & 28 & 39 & 51 & 60 & 71 & 80 & 92 \\ 14 & 32 & 47 & 65 & 84 & 99 & 116 & 131 & 150 \\ 25 & 53 & 79 & 107 & 136 & 162 & 189 & 215 & 244 \end{pmatrix}$$

Частный случай таких матричных конструкций можно найти в библиотеке последовательностей для четырёх строк: A054770, A190508, A190509, A190511.

Приближение фрактальной кривой Коха.

В теории фракталов [36, с. 25–28; 37, с. 23–26] хорошо известна кривая Коха (1904).

Строится она так: отрезок единичной длины делится на три равные части и средний интервал заменяется равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев-отрезков длины 1/3.

На следующем шаге операция повторяется для каждого из четырёх получившихся звеньев и т.д. Предельная линия и есть кривая Коха, построенная геометрически.

Похожую линию, напоминающую кривую Коха, можно изобразить на основе числовых соотношений с использованием константы золотого сечения Φ .

Образуем аддитивную последовательность в виде накопительной суммы (A085005)

$$a_n = - \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k (-1)^{\lfloor m\Phi \rfloor} .$$

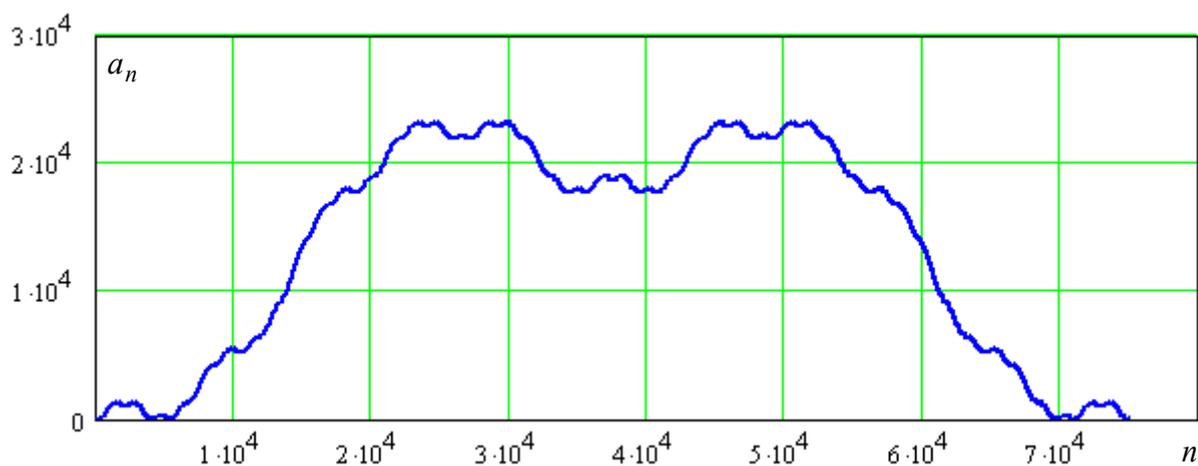
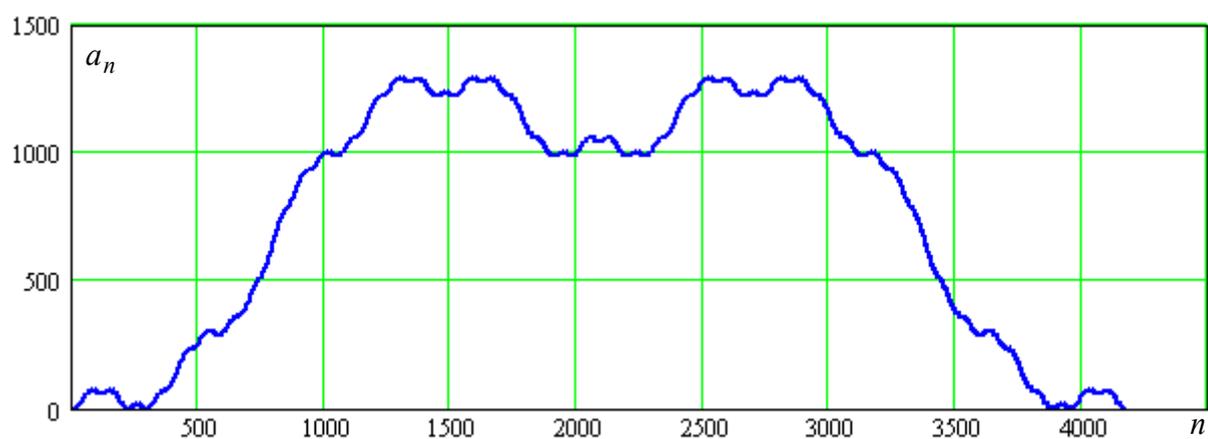
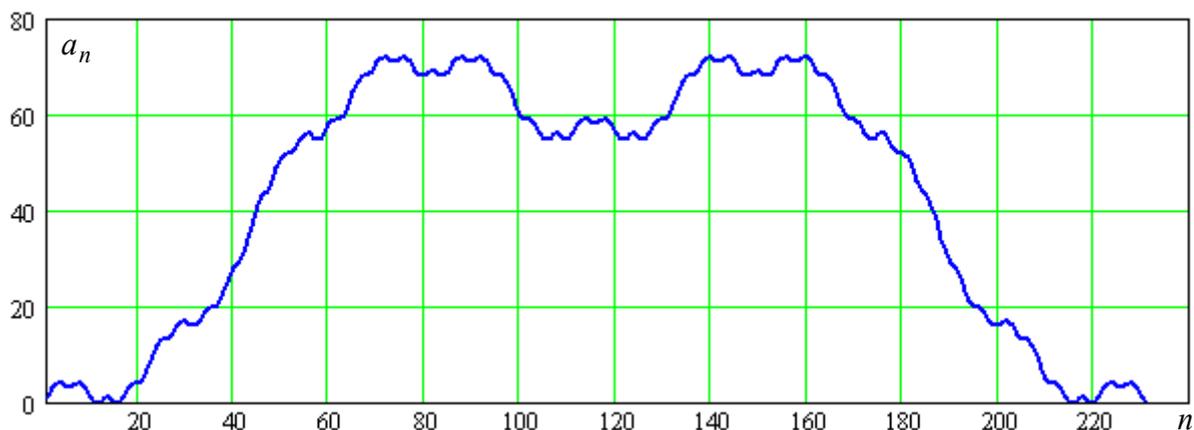
Альтернативная формула формирования ряда имеет вид:

$$a_n = 2 \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^k (\lfloor m\Phi \rfloor - 2\lfloor m\Phi/2 \rfloor) .$$

Двойное суммирование для больших значений n весьма трудоёмко по времени, поэтому его целесообразно заменить рядом последовательных операций, $k = \overline{1, n}$:

- $A_k = (-1)^{\lfloor k\Phi \rfloor}$ – вычисление степеней отрицательной единицы;
- $S_k = S_{k-1} + A_k, S_0 = 0$ – определение первых текущих сумм;
- $a_k = a_{k-1} + S_k, a_0 = 0$ – подсчёт вторых текущих сумм;
- $a_k = -a_k$ – смена знака.

В результате получаем причудливые формы, напоминающие кривую Коха. Причём с изменением объема суммирования n форма линии остаётся прежней. Варьирует только масштаб, что и выделяет специфические фрактальные свойства. Замечательный результат проявления уникальных свойств золотого числа Φ .



Порождение иррациональных чисел, отличных от корня из пяти.

В теории матриц [38] характеристический полином квадратной матрицы A размером $k \times k$ – это многочлен степени k от переменной λ , который равен $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$, где I – единичная матрица порядка k .

Корни характеристического многочлена являются собственными значениями матрицы.

Так, симметричная "золотоносная" матрица $M = \begin{pmatrix} 0 & -\phi & \Phi \\ -\phi & 2\phi & 1 \\ \Phi & 1 & 2\Phi \end{pmatrix}$ имеет

характеристический полином $\lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 8\lambda)$ с тремя корнями: $0, 1 \pm \sqrt{3}$.

Выполним последовательное преобразование вектора $v, n = 1, 2, 3, \dots$

$$v_0^T = (0 \ 1 \ 1), \quad v_n = Mv_{n-1}.$$

Первые элементы этого вектора образуют целочисленную последовательность (A117110): 0, 1, 7, 22, 100, 376, 1552, 6112, 24640, 98176, 393472, 1572352, 6292480, ...

Рекуррентная форма данной последовательности имеет вид

$$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}, \quad (a_0, a_1, a_2) = (0, 1, 7).$$

Или альтернативная запись (модификация *P.Lava*, 2008): $a_{n+1} = \frac{-(-2)^n + 3 \cdot 4^n}{2}$.

Как видим, с помощью золотого числа можно сгенерировать не только числовые последовательности с аттрактором (отношением соседних членов) на основе корня из пяти, но и других иррациональных чисел.

В частности, ряд $a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}$ образован с использованием золотоносной процедуры, но сходится к аттрактору $1 + \sqrt{3}$, как наибольшему по модулю корню полинома.

Мета-рекурсия Фибоначчи.

В работе [39] рассмотрена, так называемая мета-рекурсия Фибоначчи $h_n = h_{n-h_{n-1}} + h_{n-h_{n-4}}$ – вариант Q -последовательности Хофстадера¹⁹ (Hofstadter's meta-Fibonacci Q -sequence).

Получен очень важный результат: для начальных условий $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 1$ доказана монотонность последовательности h_n с исключительными приращениями 0 или 1.

Поэтому последовательность h_n включает все натуральные числа.

Следует сказать, что среди всех версий второго слагаемого $h_{n-h_{n-k}}$ только $k = 4$ обеспечивает получение не вырождающегося ряда, в то время как остальные "умирают".

Это делает возможным повторное вычисление h_n для любого значения n .

Кроме того, допускается естественное разделение h -последовательности на блоки, имеющие практически одинаковые частотные свойства.

На основе изучения других наборов начальных условий, для которых данная мета-Фибоначчи рекурсия имеет решение, показано, что в каждом случае результирующая последовательность, по существу такая же, как и с единичными начальными условиями.

Описанный пример не содержит золотого окраса. Но приведен специально для демонстрации того факта, что имеют место случаи, когда модификация золотоносной модели Фибоначчи не работает. Возможно, особо подчёркивая её уникальность.

В частности двухчленная аддитивная рекурсия ($k = 4$) $h'_n = h'_{n-h_{n-1}} + h'_{n-h_{n-2}}$ постепенно вырождается в некий хаотический набор положительных и отрицательных чисел.

Следует сказать, что у Хофстадера есть "золотая" G -последовательность²⁰ (*Golden*)

¹⁹ http://en.wikipedia.org/wiki/Hofstadter_sequence.

²⁰ <http://mathworld.wolfram.com/HofstadterG-Sequence.html>.

$$g_n = n - g_{g_{n-1}}, \quad g_0 = 0,$$

которая непосредственно связана с золотым числом $\Phi = \phi^{-1}$ рекуррентными формами:

$$g_n = n - g_{\lfloor n\phi \rfloor} = \lfloor (n+1)\phi \rfloor = \lfloor (n+1)\Phi \rfloor - n - 1$$

и приводит к числовой последовательности (A005206): 0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 13, 14, 14, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 19, 19, 20, 21, 21, 22, 22, 23, 24, 24, 25 ...

Здесь приращения 1 и 0 следуют с частотой (вероятностью) соответственно ϕ и $\phi^2 = 1 - \phi$.

Примечательно, что эта последовательность не одинока и дополняется последовательностью (A060144)

$$g'_{n+1} = \lfloor (n+2)\phi^2 \rfloor = n - g'_n - g'_{n-g'_n}$$

так, что их сумма выражает натуральный ряд $n = g_n + g'_n$.

А вот добавление в g_n ещё одного вложенного индекса приводит к H -последовательность Хофстадтера (A005374)

$$h_n = n - h_{h_{n-1}}, \quad h_0 = 0$$

с её аналитическим представлением с точностью до единицы $h_n = \lfloor \lambda n \rfloor + \{0 \text{ or } 1\}$, где $\lambda = \frac{c}{6} - \frac{2}{c} \approx 0,68233$ – корень полинома $x^3 + x - 1$ с коэффициентом $c = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{93}}$.

Вместо заключения.

Копилка разнообразных свойств и проявлений золотой константы довольно быстро пополняется новыми оригинальными решениями.

Кому-то всё это покажется обычной тренировкой ума.

Кто-то захочет увидеть во всём реальный выход в виде конкретных приложений.

Отметим в этой связи только один, на наш взгляд, главный момент.

Когда мы говорим о прикладных аспектах, мы часто упускаем очень важное приложение в части привлечения инициативных людей, в первую очередь, к математике.

Ну, и конечно, к общей золотоносной проблематике.

Как говорится, были бы кости, а мясо нарастёт...

Продолжение следует...

Литература:

1. Демман И.Я. История арифметики: 2-изд., испр. – М.: Просвещение, 1965. – 416 с.
2. Василенко С.Л. Золотые россыпи в целочисленных прогрессиях // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16520, 18.05.2011. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161833.htm>.
3. Василенко С.Л. Обобщённые рекурсии с аттрактором золотого сечения // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.09.2011. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=49&sm=2>.
4. Василенко С.Л. Новые рекуррентные формы золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16997, 18.11.2011. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322035.htm> / Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 20.11.2011. – <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11534.html>.

5. Василенко С.Л. Парные двухчленно-аддитивные рекурсии // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 08.10.2011. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=51&sm=2>.
6. Василенко С.Л. Удивительный мир золотиносных числовых рядов // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 18.10.2011. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=52&sm=2> // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17269, 29.01.2012. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322142.htm>.
7. Василенко С.Л. Рекурсии с периодически изменяемой структурой // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 28.10.2011. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=53&sm=2>.
8. Василенко С.Л. Гармония числовых золотиносных рядов. Ч. 1 // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 27.09.2012. – <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12253.html>.
9. Василенко С.Л. Гармония числовых золотиносных рядов. Ч. 2 // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 04.10.2012. – <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12266.html>.
10. Василенко С.Л. Золотой калейдоскоп: функция Эйлера и золотое сечение // Научно-техническая б-ка SciTecLibrary. – 18.08.2012. – <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12187.html>.
11. Василенко С.Л. Золотой калейдоскоп: функциональные уравнения и золотое сечение // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 30.08.2012. – <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/12197.html>.
12. Василенко С.Л. Золотая константа в числовых рядах // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 10.10.2012. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=87&sm=2>.
13. Василенко С.Л. "Золотой разговор" с Евклидом // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15649, 12.11.2009. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161575.htm>.
14. Начала Евклида. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.
15. Fowler D.H. A generalization of the golden section // Fibonacci Quarterly, **20.2** (1982), 146–158. – <http://www.fq.math.ca/Scanned/20-2/fowler.pdf>.
16. Koshhelev M. Fuzzy Logic Explains the Golden Proportion. – http://www.polytech.univ-savoie.fr/fileadmin/polytech_autres_sites/sites/listic/busefal/Papers/67.zip/67_02.pdf.
17. Заде Л.А. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня. – М.: Знание, 1974. – С.5–49 / Zadeh L.A. Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – **3**(1973), 28–44.
18. Odom G., J. van de Craats. Elementary Problem 3007, American Math. Monthly, **90** (1983) 482; solution, **93** (1986) 572.
19. Fowler D.H. The Mathematics of Plato's Academy, Oxford University Press, 1988.
20. Василенко С.Л. Математические начала гармонии: русская матрешка в геометрических образах гармонической пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15978, 04.07.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161668.htm>.
21. Hofstetter K.A Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum, **2** (2002), 65–66. – <http://forumgeom.fau.edu/FG2002volume2/FG200208.pdf>.
22. Василенко С.Л. Треугольники и золотые чевианы // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.06.2012. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=76&sm=2> / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17549, 23.06.2012. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161974.htm>.
23. Edwards H.M. Riemann's Zeta Function. – New York: Dover, 2001.
24. Viswanath D. Random Fibonacci sequences and the number 1.13198824... // Math. Comp.

69, No 231 (2000), 1131–1155. – <http://www.ams.org/journals/mcom/2000-69-231/S0025-5718-99-01145-X/S0025-5718-99-01145-X.pdf>.

25. *Hayes B.* The Vibonacci Numbers // *American Scientist*, 1999. – <http://www.americanscientist.org/issues/pub/the-vibonacci-numbers>.

26. *Devlin K.* New mathematical constant discovered // *MAA*, March 1999. – http://www.maa.org/devlin/devlin_3_99.html.

27. *Rittaud B.* On the Average Growth of Random Fibonacci Sequences // *J. of Integer Sequences*, 10 (2007), Article 07.2.4. – <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL10/Rittaud2/rittaud11.pdf>.

28. *Good I.J.* Complex Fibonacci and Lucas Numbers, Continued Fractions, and the Square Root of the Golden Ratio // *The Fibonacci Quarterly*, **31.1** (1993), 7–20. – <http://www.fq.math.ca/Scanned/31-1/good.pdf>.

29. *Василенко С.Л.* Базовые соотношения между фундаментальными константами // *Академия Тринитаризма*. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17327, 20.02.2012. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161934.htm>.

30. *Linn S.L., Neal D.K.* Approximating Pi with the Golden Ratio. – <http://people.wku.edu/david.neal/117/Acad/GoldenPi.pdf>.

31. *Huntley H.E.* The Golden Cuboid // *Fibonacci Quarterly*. – **2.3** (1964), p. 184, 240. – <http://www.fq.math.ca/Scanned/2-3/huntley-b.pdf>.

32. *Berstel J., Perrin D.* The origins of combinatorics on words // *European J. of Combinatorics*. – **28** (2007), 996–1022. – <http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Articles/2007Origins.pdf>.

33. *Lothaire M.* Algebraic combinatorics on words / *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, **90**. – Cambridge Univ. Press, 2002. – <http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Lothaire/AlgCWContents.html>.

34. *Engel F.* Entwicklung der Zahlen nach Stammbruechen // *Verhandlungen der 52. Versammlung deutscher Philologen und Schulmaenner in Marburg*, 1913, pp. 190–191.

35. *Kraaikamp C., Wu J.* On a new continued fraction expansion with non-decreasing partial quotients // *Monatshefte für Mathematik* **143**(4), 2004, 285–298.

36. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. – Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. – 160 с.

37. *Федер Е.* Фракталы: Пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.

38. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – 5-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 560 с.

39. *Balamohan B., Kuznetsov A., Tanny S.* On the Behavior of a Variant of Hofstadter's Q-Sequence // *J. of Integer Sequences*, Vol. 10 (2007), Article 07.7.1. – <https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL10/Tanny/tanny3.pdf>.

© ВаСиЛенко, 2012



Украина, Харьков

Авторские страницы:

<http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3>

<http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm>

<http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html>