С.Л. Василенко

Золотые пропорции полинома четвёртой степени (кварта-модель)

Если четыре причины возможных неприятностей заранее устранены, то всегда найдется пятая

(А.Блох, Законы Мерфи)

Учёные и специалисты постепенно свыкаются с мыслью о проявлении фундаментальной константы золотого сечения Φ при самых неожиданных обстоятельствах.

Речь идёт, прежде всего, о безусловном и математически выверенном представлении числа $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$, а не надуманных и часто искусственно "притянутых" приближений-отношений, находящихся в интервале между 1,5 и 2.

Тем не менее, каждое новое присутствие-проявление золотой константы вызывает изумление и неподдельное восхищение не только авторов, но и заинтересованной части научного сообщества. К немалому удивлению эта математическая структура продолжает эффектно "выплывать" во всей своей красе в самых непредвиденных местах и приложениях, открывая новые горизонты в познании удивительного феномена.

Мы продолжаем наши исследования в золотоносной сфере последних лет.

В настоящей статье речь пойдёт о золотых пропорциях, обусловленных алгебраическим полиномом четвёртой степени.

Первые проработки на эту тему выполнил Л.Макмулин [1].

Некоторые преобразовательные подходы изложены в заметке [2].

Общие сведения.

Кварта-полином является многочленом чётной степени, поэтому ему свойственен один и тот же предел при стремлении к $\pm$ бесконечности.

Если коэффициент при старшей степени больше нуля, то функция возрастает к + бесконечности с обеих сторон, образуя глобальный минимум.

Полином четвёртой степени (кварта-полином – *quartic polynom*) имеет одну весьма характерную особенность.

Четвёртая степень алгебраических уравнений является наивысшей (критической), при которой существует аналитическое решение общего вида[1] в радикалах, то есть при любых значениях коэффициентов уравнения.

Так, теорема Абеля–Руффини[2] (1824) утверждает, что общее уравнение степени n при $n \geq 5$ неразрешимо в радикалах. Иначе говоря, для произвольного уравнения степени больше четвертой невозможно указать решение в виде так называемой *закрытой формулы*, содержащей только арифметические операции и корни произвольной степени. Например, корни так называемой формы Бринга-Жерара $x^5 - x + 1 = 0$ не выражаются через радикалы[3].

Именно это свойство кварта-уравнения с одновременным наличием в нём уникальных свойств золотой пропорции вызывает особенный интерес.

Так или иначе, но совокупность этих черт позволяет посмотреть на проблему разрешимости уравнений в явном виде несколько под иным углом зрения.

Не исключено, что именно присутствие-отсутствие возможности проведения золотоносной линии через график полинома становится определяющим фактором такой резкой смены качественного формата уравнения. С его разрешимости на неразрешимость...

---

[1] http://ru.wikipedia.org/?oldid=49263767.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Abel–Ruffini_theorem.

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Quintic_equation.

Первая линия золотого сечения.

Без потери общности рассуждений рассмотрим приведенный или унитарный полином (многочлен), старший коэффициент которого равен единице $k_4 = 1$:

$$p(x) = x^4 + k_3 x^3 + k_2 x^2 + k_1 x + k_0 .$$

Определим вторую производную

$$p''(x) = 12x^2 + 6k_3 x + 2k_2 = 12(x-b)(x-c) = 12\left[x^2 - (b+c)x + bc\right].$$

Приравняв её нулю, получаем корни квадратного уравнения

$$c, b = -\mu \pm \Delta ,$$

где $\mu = \dfrac{k_3}{4}$, $\Delta = \sqrt{\mu^2 - \dfrac{k_2}{6}}$.

Если подкоренное выражение строго больше нуля или $k_2 < \dfrac{3}{8} k_3^2$, то график исходного полинома $p(x)$ имеет две несовпадающие точки перегиба c, b, в которых $p''(x) = 0$, а значит, и три действительных корня.

Путём интегрирования второй производной можно восстановить функцию $p(x)$, но уже в модифицировано-эквивалентной записи, с заменой $k_2, k_3 \to c, b$:

$$p'(x) = 4x^3 - 6(b+c)x^2 + 12bcx + k_1 ,$$

$$p(x) = x^4 - 2(b+c)x^3 + 6bcx^2 + k_1 x + k_0 . \tag{1}$$

Проведём через две точки c, b прямую линию

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{p(c) - p(b)}{c-b}(x-b) + p(b) = \\ &= \frac{\left(-c^4 + 4bc^3\right) - \left(-b^4 + 4cb^3\right)}{c-b}(x-b) + \left(-b^4 + 2cb^3\right) + k_1 b + k_0 = \\ &= \left[k_1 - \left(c^3 - 3c^2 b - 3cb^2 + b^3\right)\right] x + bc\left(b^2 - 3bc + c^2\right) + k_0 . \end{aligned} \tag{2}$$

Взяв за основу выражение полинома (1), определим разность двух функций

$$p(x) - y(x) = x^4 - 2(b+c)x^3 + 6bcx^2 + \left(c^3 - 3c^2 b - 3cb^2 + b^3\right)x - bc\left(b^2 - 3bc + c^2\right). \tag{3}$$

Прямая линия $y(x)$ пересекает график полинома $p(x)$ ещё в двух точках a и d так, что $a < b < c < d$.

Разность функций (3) можно также записать в стандартном исполнении с учётом обобщённой теоремы Виета:

$$\begin{aligned} &p(x) - y(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = \\ &= x^4 - (a+b+c+d)x^3 + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 - (abc+abd+acd+bcd)x + abcd . \end{aligned} \tag{4}$$

Сравнение в выражениях (3) и (4) коэффициентов при кубе x^3 приводит к равенству

$$a + d = b + c . \tag{5}$$

Аналогичное сопоставление свободных коэффициентов даёт

$$ad = -b^2 + 3bc - c^2 \cdot$$

Таким образом, имеем сумму и произведение двух чисел a и d, которые по теореме Виета можно воспроизвести в виде корней квадратного уравнения:

$$z^2 - (a+d)z + ad \ = \ z^2 - (b+c)x - \left(b^2 - 3bc + c^2\right) \ = \ 0 .$$

Откуда получаем уникальную взаимосвязь точек (a, b, c, d) через малую и большую золотые константы:

$$\begin{cases} d \ = \ \dfrac{b+c-(b-c)\sqrt{5}}{2} \ = \ c\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} - b\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \ = \ c\Phi - b\phi ; \\ a \ = \ \dfrac{b+c+(b-c)\sqrt{5}}{2} \ = \ b\dfrac{\sqrt{5}+1}{2} - c\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \ = \ b\Phi - c\phi . \end{cases} \qquad (6)$$

После подстановки значений b, c можно записать эквивалентное представление

$$d, a = -\mu \ \pm \ \Delta\sqrt{5} .$$

Отметим некоторые очевидные соотношения.

Из (5) следует равенство отрезков:

$$b - a = d - c .$$

С учётом тождества $\Phi + \phi = \sqrt{5}$ отношение разностей крайних к средним точкам согласно (6) составляет:

$$\frac{d-a}{c-b} \ = \ \sqrt{5} .$$

Таким образом, прямая $y(x)$, проходящая через две несовпадающие точки перегиба (b, c, если они есть) полинома четвёртой степени $p(x)$, формирует симметрично-двойную золотую пропорцию вместе с точками (a, d) пересечения полинома и прямой:

$$\frac{c-a}{c-b} \ = \ \frac{c-b}{b-a} \ = \ \Phi \ = \ \frac{d-b}{c-b} \ = \ \frac{c-b}{d-c} .$$

Пример 1 (рис. 1).

$$p(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 1 .$$

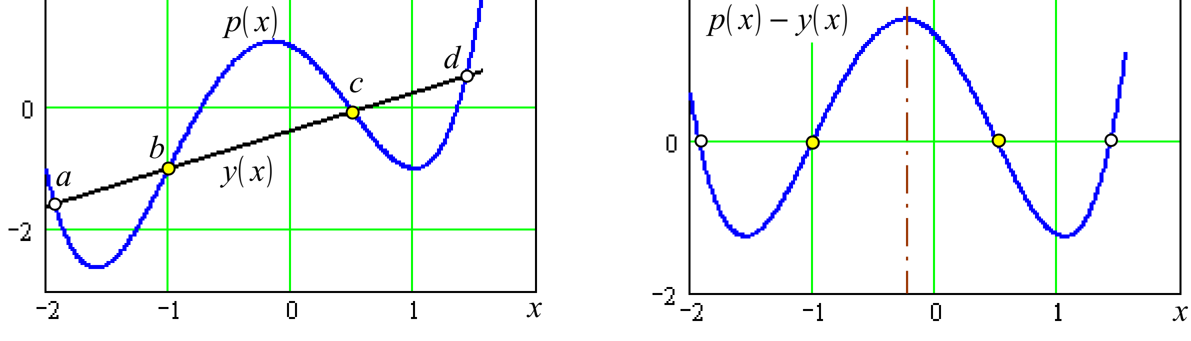


Рис. 1. Характерный пример золотого сечения на графике полинома четвёртой степени

$$(a\ \ b\ \ c\ \ d) = (-1{,}927..\ \ -1\ \ \ 0{,}5\ \ \ 1{,}427..)\,.$$

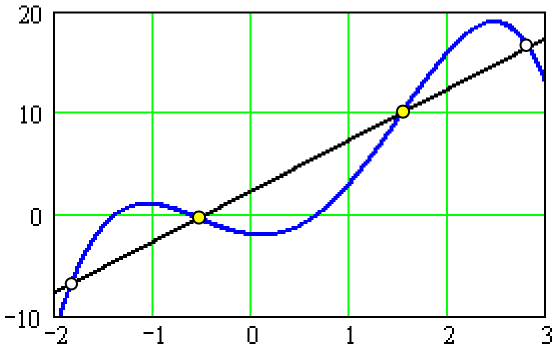
$$y(x) = \frac{5}{8}x - \frac{3}{8}\,.$$

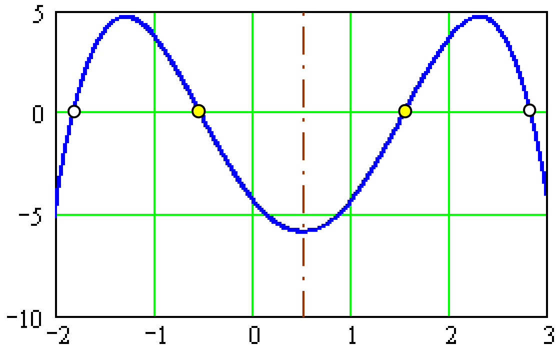
Пример 2.

$$p(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x^2 - x - 2\,.$$

$$(a\ \ b\ \ c\ \ d) = (-1{,}827..\ \ -0{,}541..\ \ \ 1{,}541..\ \ \ 2{,}827..)\,.$$

$$y(x) = 5x - \frac{83}{36}\,.$$





Отметим ещё некоторые частные особенности кварта-модели.

Проходящая через точки перегиба прямая $y(x)$ будет параллельна оси абсцисс, если коэффициент при x в (2) равен нулю $k_1 - \left(c^3 - 3c^2 b - 3cb^2 + b^3\right) = 0$, откуда следует соотношение между коэффициентами

$$k_1 = k_3\,\frac{4k_2 - k_3^2}{8}\,.$$

Прямая $y(x)$ проходит без вертикального сдвига, то есть через начало координат, если в (2) свободный коэффициент $bc\left(b^2 - 3bc + c^2\right) + k_0 = 0$ или

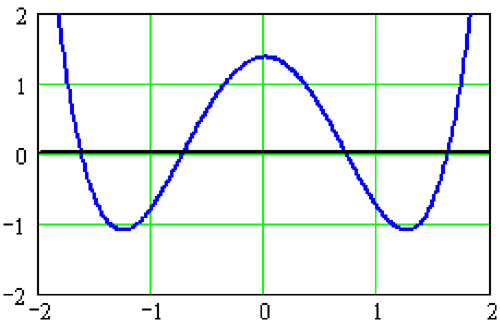
$$k_0 = \frac{k_2}{12}\left(\frac{5}{3}k_2 - \frac{1}{2}k_3^2\right).$$

Для обеспечения симметрии полинома относительно оси ординат необходимо положить коэффициент $k_3 = 0$, а значит и $k_1 = 0$.

Полином приобретает вид $p(x) = x^4 - qx^2 + \dfrac{5}{36}q^2$.

Его корни равны $(a\ \ b\ \ c\ \ d)\ =\ \sqrt{\dfrac{q}{6}}\cdot\left(-\sqrt{5}\ \ \ -1\ \ \ 1\ \ \ \sqrt{5}\right)$.

Можно положить, например $\sqrt{\dfrac{5q}{6}} = \Phi$, откуда $q = \dfrac{6}{5}\Phi^2$, и полином становится равным $x^4 - \dfrac{6\Phi^2}{5}x^2 + \dfrac{\Phi^4}{5}$ с корнями (они же точки ЗС)



$$(a\ \ b\ \ c\ \ d) = \left(-\Phi\ \ -\frac{\Phi}{\sqrt{5}}\ \ \frac{\Phi}{\sqrt{5}}\ \ \Phi\right).$$

Заметим, что в этом примере возникает величина

$$\frac{6\Phi^2}{5} = 3{,}14164...$$

Она очень близка к фундаментальной константе $\pi = 3{,}14159...$. После обычного округления происходит совпадение пяти знаков.

Вторая линия золотого сечения.

Из вышеприведенных графиков кварта-полинома следует, что на построенной линии двух золотых сечений $y(x)$ посредине находится больший отрезок $c - b = \Phi(d - c)$.

Очевидно, что выше прямой $y(x)$ можно провести подобную линию с золотыми пропорциями так, чтобы посредине располагался меньший отрезок.

Поскольку и в этом случае два крайних (бо́льших) отрезка равны между собой, вторая линия ЗС будет параллельна первой, то есть $Y(x) = y(x) + z$.

Кроме того, она представима в виде (4) со своими точками пересечения $A < B < C < D$ с исходным полиномом.

Собирая теперь воедино все свойства, получаем систему уравнений

$$D - C = B - A,$$

$$\frac{D - B}{C - B} = \frac{C - B}{D - C} = \Phi,$$

$$A + B + C + D = k_3,$$

$$AB + AC + AD + BC + BD + CD = k_2.$$

После выполнения довольно рутинных преобразований установлено, что вторая линия золотого сечения описывается уравнением прямой

$$Y(x) = y(x) + \frac{16}{5}\Delta^4.$$

То есть первая линия ЗС проходит через точки перегиба, вторая – выше первой с её параллельным переносом на величину $z = \frac{16}{5}\Delta^4$.

Соответствующие точки пересечения второй линии золотого сечения с полиномом четвёртой степени имеют следующие абсциссы

$$C, B = -\mu \pm \beta,$$

$$D, A = -\mu \pm \beta\Phi^3,$$

где $\beta = \Delta\phi\sqrt{\frac{3}{3+\phi}}$, $\mu = \frac{k_3}{4}$, $\Delta = \sqrt{\mu^2 - \frac{k_2}{6}}$, $\Phi = \phi^{-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Пример 3.

Используя тождество $\Phi^2 + \phi^2 = 3$, запишем такой "золотоносный" полином

$$p(x) = \left(x^2 - \Phi^2\right)\left(x^2 - \phi^2\right) = x^4 - 3x^2 + 1$$

с условно нулевой линией ЗС, проходящей по оси абсцисс (рис. 2).

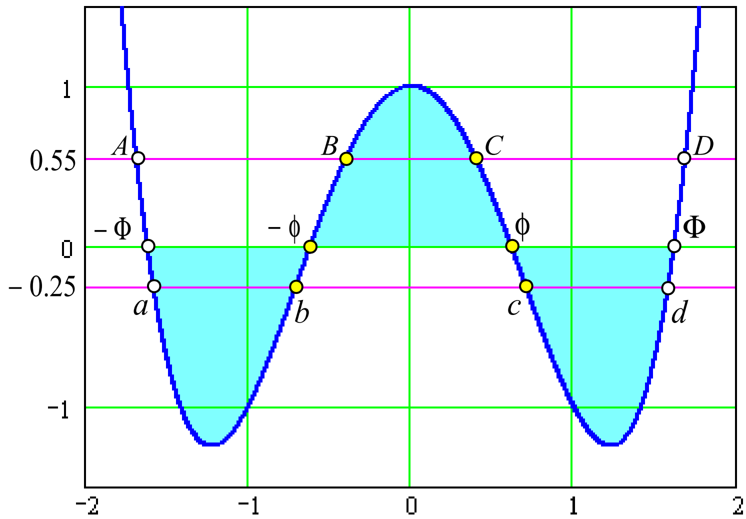


Рис. 2. Линии ЗС для полинома

Из равенства нулю второй производной находим характерные точки первой линии ЗС:

$$p''(x) = 12x^2 - 6 = 0 \quad \to \quad c, b \ = \ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \ \approx \ \pm 0{,}707; \quad d, a \ = \ \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \ \approx \ \pm 1{,}581 .$$

Вторая линия ЗС пересекает исходный полином в точках:

$$C, B \ = \ \pm\sqrt{\frac{3}{\Phi^6 + 1}} \ \approx \ \pm 0{,}380; \qquad D, A \ = \ \pm\sqrt{\frac{3}{\phi^6 + 1}} \ \approx \ \pm 1{,}686 .$$

Примечательно, что закрашенные сектора имеют одинаковую площадь, равную 0,8.
Например,

$$\int_{\phi}^{\Phi}\left(x^4 - 3x^2 + 1\right)dx = \frac{x^5}{5} - x^3 + x\Bigg|_{\phi}^{\Phi} = \frac{\Phi^5 - \phi^5}{5} - \left(\Phi^3 - \phi^3\right) + (\Phi - \phi) = \frac{11}{5} - 4 + 1 = -\frac{4}{5} .$$

Размышлизмы.

Итак, кварта-полином четвертой степени $p(x) = x^4 + k_3x^3 + k_2x^2 + k_1x + k_0$ с коэффициентами $k_2 < 3k_3^2/8$ в графическом исполнении обладает двумя несовпадающими точками перегиба, в которых вторая производная равна нулю.

Проходящая через них прямая пересекает полином в общей сложности в четырёх точках, образуя три конечных отрезка с золотыми пропорциями. Это решение обосновано строго аналитически.

С другой стороны, общее алгебраическое уравнение пятого порядка уже неразрешимо в радикалах. То есть оно не имеет явно выраженной формулы, построенной на основе лишь арифметических операций и корней произвольной степени.

Последнее хорошо изучено и досконально аргументировано математиками.

Доказано-то да. Причём абсолютно точно.

Но вот что именно на стыке степеней 4–5 заставляет всколыхнуть-сформировать такой качественный скачок (разрешимости–неразрешимости), сдаётся, до сих пор не до конца осмыслено-изучено.

То есть доказать некое положение, вовсе не означает вскрыть настоящий побудительный мотив: почему происходит так, а не иначе.

Анализ формирования возможных линий золотых сечений на графике полиномов разного порядка позволяет нам высказать гипотезу-предположение, что первооснова неразрешимости общего уравнения степени $n \geq 5$ взаимообусловлена золотой пропорцией.

А точнее её отсутствием или возможностью однозначного формирования.

В квадратичной модели линии ЗС вообще нет. Зато есть частное уравнение $x^2 = x+1$, генерирующее золотую константу Φ. Кроме того, парабола всегда симметрична, независимо от сдвига относительно начала координат, что само по себе отражает гармоничное начало.

В кубическом уравнении через точку перегиба можно провести две пересекающиеся линии ЗС, на каждой из которых образуется своя золотая пропорция с соответствующим расположением меньшего отрезка справа или слева от данной точки.

Кварта-полином формирует линию ЗС через две точки перегиба с двумя симметрично-золотыми пропорциями.

Наконец квинта-модель, как и последующие полиномы (более высоких порядков), не способны образовать единую прямую линию, на которой допустимо создать три и более золотые сечения.

Именно это становится первопричиной справедливости теоремы Абеля–Руффини.

Таким образом, суть озвученной гипотезы сводится к следующему:

отсутствие аналитического решения алгебраического уравнения более четвёртого порядка в радикалах вызвано потерей гармоничного начала, которое обусловлено невозможностью проведения единой линии золотых пропорций.

Это, можно сказать, описательная характеристика выявленной закономерности.

Возможно, в последующих исследованиях удастся выполнить её строгое обоснование.

Литература:

1. *McMullin L.* The Golden Ratio and Quartic Polynomials. – 2007. – http://www.linmcmullin.net/PDF_Files/Qolden_Ratio_in_Quartics_2007.pdf.

2. *Bogomolny A.* Inflection Points of Fourth Degree Polynomials. – http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Calculus/FourthDegree.shtml#4th.

Украина, Харьков

Авторские страницы:

http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3

http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm

http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html