С.Л. Василенко

Пропорции в симбиозе золотоносных и гармоничных треугольников

Симбиоз – дружба без равенства

В золотоносной тематике, похоже, дохнуло свежее дуновение перемен. После многих лет фактического застоя. С их несообразными и нелепыми обобщениями (что называется задом наперед) золотого феномена. Который в свое время был осознанно выделен из общей массы отношений в самостоятельный и уникальный вид математической пропорции.

Слабо обоснованные или просто бездоказательные утверждения-хождения вокруг темы золотого сечения (ЗС), часто с многократными пересказами давно известных тез, видимо, постепенно подходят к своему закономерному и логичному спаду-завершению.

Одновременно появляются глубоко содержательные публикации.

Среди последних можно выделить монографию Г.Аракеляна [1], несмотря на известную критику [2, 3] в части использования очевидных тождеств (определений натурального логарифма и гиперболического синуса), справедливых для любого числа, что существенно снижает уровень заявленного им тезиса про обобщение теории ЗС.

О намечающейся перезагрузке-обновлении ярко свидетельствуют и работы, если можно так сказать, московской школы [4–8].

Их характерной особенностью является глубокий анализ предметной области и несомненная новизна полученных результатов.

Можно, конечно, продолжить обсуждение отдельных вопросов. В частности, о первичности точек Брокара с их конкретным отражением на примере золотого треугольника $\Phi:\Phi:1$ [5]. Тогда понятие «золотых полюсов» как бы несколько утрачивает свою особенность-новизну. Но даже в этом случае озвученные материалы содержат россыпь ранее неизвестных свойств. Среди них особый интерес, на наш взгляд, представляет схождение логарифмической спирали, проходящей через вершины треугольников, в точку Брокара.

Ну, а в золотом прямоугольнике [4] золотой полюс бесспорно и наглядно доказывает свою оригинальность и полезность. Например, как модель роста многих жизненных процессов в природе.

С ней тесно перекликается работа [9], в которой вместо привычного деления (анализа), исследована золотоносная проблематика приумножения (синтеза). Кроме того, в отличие от привычных схем, целое не раскладывается на две составляющие. Из него выделяется одна часть (доля). Вторая часть терминологически и понятийно отсутствует. Вместо неё рассматривается отклонение вычлененной части от целого.

Сама задача ЗС формулируется следующим образом: целое так относится к своей части, как она – к своему отклонению от целого: $1 : x = x : (1-x)$.

В работе [7] развивается новый вектор в исследовании, связанный с расширением геометрической модели золотого сечения. Известное деление линейного отрезка в золотой пропорции расширяется на переменные отрезки ломаной линии, два конца которых закреплены, а другой движется по окружности.

В статье [8] эта модель увязывается с функцией средних значений общего вида, включая гармоническое, геометрическое, арифметическое, квадратичное и кубичное среднее.

В целом изложенный материал информационно насыщен и отличается строгостью изложения, что заметно выделяет его на общем фоне золотоискательских исследований.

Вместе с тем возникают и дискуссионные моменты. Они связаны в основном с разноречивой терминологией и неточной формулировкой новизны, о чем более подробно будет сказано ниже.

А пока несколько слов в части определения понятийной базы.

Некоторые понятийные особенности.

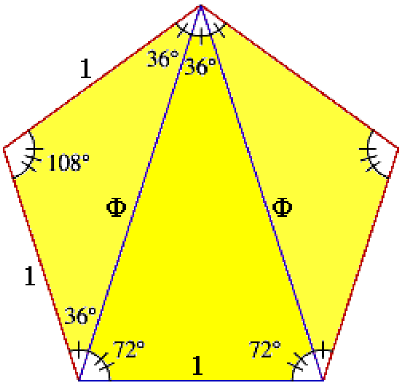
Плоский геометрический треугольник часто называют золотым, если отношение двух его сторон равно константе золотого сечения Φ.

Для четкой и однозначной идентификации формы фигуры только этого условия, конечно, недостаточно.

Поэтому необходимы дополнительные уточнения.

1) Самое простое условие детализации: треугольник должен быть равнобедренным.

В том случае возможно два варианта [10]:



а) остроугольный треугольник с отношением сторон – $\Phi:\Phi:1$ и углами 72–72–36 градусов. Это наиболее распространенное название золотого треугольника.

б) тупоугольный треугольник с отношением сторон – $1:1:\Phi$ и углами 36–36–108.

С современных позиций первый треугольник можно считать классическим. Именно он сегодня представлен на известных электронных ресурсах по математике [11, 12], исторически именуясь золотым [13].

Понятно, что это название не является строгим и совершенным, ибо возможны другие варианты-аналоги.

Чтобы не вносить терминологический разнобой, будем называть треугольники, содержащие элементы ЗС, *золотоносными*.

Остроугольный треугольник со сторонами $\Phi:\Phi:1$ пусть остается *золотым*.

В справочнике [14] тупоугольный треугольник 36–36–108 назван *золотым гномоном*. Почему бы и нет.

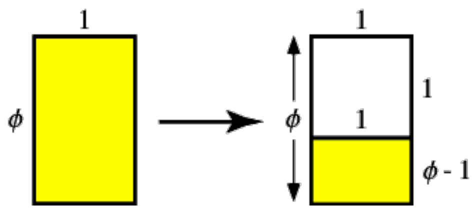
2) Кроме равенства двух сторон треугольника, допустимы и другие модификации.

Например, фиксация прямого угла.

Здесь приемлемы также два варианта:

а) отношение двух катетов равно $\Phi:1$;

б) отношение гипотенузы и катета равно $\Phi:1$.



В варианте (а) имеем диагональную половину от золотого прямоугольника[1], стороны которого образуют золотое сечение.

Характерная черта этой фигуры: при отрезании квадратной части, в остатке образуется новый золотой прямоугольник. Такое отрезание квадратов можно повторять бесконечно.

При этом углы квадрата образуют бесконечную последовательность точек на золотой спирали – особом случае логарифмической спирали.

В основе деления лежит следующая пропорция, приводящая к константе ЗС:

$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1} \quad \Rightarrow \quad \Phi^2 = \Phi + 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

В варианте (б) больший катет становится средним пропорциональным между его гипотенузой и меньшим катетом.

Наличие такой пропорции приводит к прямоугольному треугольнику Кеплера или Прайса [10], стороны которого соотносятся в геометрической прогрессии: $1:\sqrt{\Phi}:\Phi$.

[1] Golden rectangle. – http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_rectangle.

Этот золотоносный треугольник с большой исторической достоверностью нашел свое воплощение в пирамидальной теме [15, 16]. При этом для египетской пирамиды Хеопса одновременно выполняется пропорция площадей: площадь основания относится к сумме площадей боковых граней как последняя – к полной поверхности пирамиды.

Описанные пропорции нашли применение в проектировании. Динамическая симметрия, как пропорциональная система и методология природного проектирования, описана в книге Д.Хембиджа [17]. В её основе лежат прямоугольники на основе таких отношений как √2, √3, √5, золотое сечение (Φ = 1,618 ...), его квадратный корень (√Φ = 1,272 ...) и квадрат (Φ^2 = 2,618 ....), серебряное соотношение 1+√2.

С.Кимберлинг определял другой тип золотоносного треугольника, в котором углы соотносятся как $\Phi : 1$ [18]. – Почему бы и нет...

Устранение отдельных разночтений.

В общем случае математическая пропорция, как равенство двух отношений $a:b=c:d$, имеет $2\times 2=4$ члена.

С незапамятных времен древние исследователи изучали особые частные случаи с тремя членами, когда вместо четвертого элемента в пропорцию вводилось дополнительная связь между оставшимися тремя членами.

Арифметическая (разностная) пропорция – равенство разностей: <u>насколько вторая</u> величина превосходит <u>первую</u>, <u>настолько третья</u> величина превосходит <u>вторую</u>.

Геометрическая (кратная) пропорция – равенство кратных отношений: <u>во сколько раз вторая</u> величина превосходит <u>первую, во столько раз третья</u> величина превосходит <u>вторую</u>.

В геометрической пропорции всего три элемента, причем один из них общий $c:\underline{b}=\underline{b}:a$.

Об этом в свое время говорил ещё Евклид:

«*Пропорция же состоит, по меньшей мере, из трех членов... Когда все три величины пропорциональны, то говорят, что первая к третьей имеет двойное отношение первой ко второй*» [19, с. 143].

В данном случае речь идет о непрерывной пропорции $a:b=b:c$.

Евклид выражал мысль, что $a:c=(b:c)^2$. Его термин *двойное отношение* следует понимать как отношение, повторенное множителем два раза.

Если принять ещё одно дополнительное условие $c=a+b$, то приходим к золотой пропорции – разновидности геометрической пропорции, имеющей всего два члена a и b:

сумма двух членов (целое) так относится к одному из них, как он – к другому.

А вот с гармонической пропорцией в литературе, к сожалению, произошла некоторая путаница, тиражируемая до сих пор.

Так, в ряде обзоров словарного типа (большая советская энциклопедия, большой энциклопедический словарь и др.) гармоническая пропорция представлена как пропорция, средние члены которой равны, а последний член представляет собой разность между первым и средним $c:b=b:(c-b)$.

Такое разложение числа c на два слагаемых b и $a=c-b$, образующих гармоническую пропорцию, называют иногда гармоническим делением[2] или золотым сечением (?), а также делением в крайнем и среднем отношении.

Вряд ли такое смешение золотого сечения и гармонической пропорции можно назвать верным.

Если уже и вести речь в плоскости гармонии или стройности, то золотое сечение *допустимо называть г а р м о н и ч н ы м д е л е н и е м .*

Однако сама пропорция остается быть геометрической!

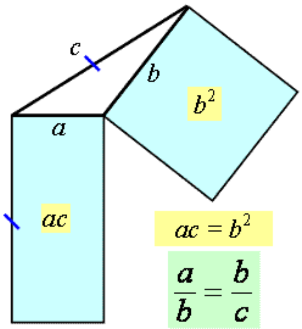
[2] Большая советская энциклопедия. – http://slovari.yandex.ru/~книги/БСЭ/Гармоническая%20пропорция/

Но никак не гармонической.

Ибо из пропорции $c:b=b:a$ следует $b=\sqrt{ac}$ – *среднее геометрическое*[3] a и c.

То есть в терминологическое поле незаметно вкралось смешение двух понятий:

- гармоничного (слаженного, красивого) сопоставления;
- гармонического представления, давно закрепленного в математике.



Среднее геометрическое двух чисел также называется их *средним пропорциональным*[4].

В частности, при золотом сечении геометрического отрезка на две части большая часть является *средним пропорциональным* между всем отрезком и меньшей частью [20].

Тему среднегеометрической пропорции в треугольниках пробовал развивать С.Алферов [21]. При этом он терминологически верно различал треугольник золотой пропорции и «золотой треугольник» – равнобедренный с острым углом 36° в вершине.

Гармоническая пропорция – пропорция вида $a:c=(a-b):(b-c)$, в которой первое число (или отрезок) так относится к третьему, как разность между первым и вторым относится к разности между вторым и третьим.

Здесь величина b – есть среднее гармоническое[5] чисел a и c, то есть обратная величина среднего арифметического обратных значений $b=\dfrac{2}{a^{-1}+c^{-1}}=\dfrac{2ac}{a+c}$, что полностью отвечает принятой терминологии в области средних значений.

Именно это становится определяющим фактором в точном принятии определения гармонической пропорции.

И всё становится на свои места.

Геометрические обобщения.

Вернемся к работам А.Шелаева. На предмет преемственности понятий и формулировок.

В частности, он отмечает [7]: «до последнего времени и в течение многих веков существовала единственная геометрическая интерпретация золотого сечения, как деления отрезка длиной на 2 части $a<b$, связанные соотношением: $(a+b)/b=b/a$... автором статьи была введена [6] <u>обобщенная геометрическая модель золотого сечения</u>. При этом золотое сечение обобщается (?) от указанного выше частного случая деления отрезка прямой линии до отношения переменных отрезков ломаной линии, одни концы которых закреплены, а другие движутся по окружности».

Далее и вовсе происходит перекрестное смешение суждений.

Говорится о «геометрической модели обобщенных золотых сечений» так, что «геометрическое место точек на плоскости – окружность радиуса позволяет обобщить понятие золотого сечения, как отношение отрезков переменной ломаной линии AMB» [7].

Что же именно является предметом обобщения в указанных работах?

В одном и том же случае автор сначала говорит про «обобщенную геометрическую модель золотых сечений». Затем про «геометрическую модель обобщенных золотых сечений».

Тем самым нарушаются причинно-следственные отношения.

---

[3] Среднее геометрическое. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=44810596.

[4] Большая советская энциклопедия. – http://slovari.yandex.ru/~книги/БСЭ/Среднее%20пропорциональное/.

[5] Среднее гармоническое. – http://ru.wikipedia.org/?oldid=43776524.

В первом варианте речь идет про обобщение геометрической модели, во втором варианте – самого золотого сечения. Что, конечно, не одно и то же.

В действительности золотое сечение (золотая пропорция), равно как и золотая константа, остаются без изменения. На то она и константа!

Зато расширяется геометрическая интерпретация. При этом изменяется целое (точнее его суммарная геометрическая длина), которое теперь уже проецируется как ломаная линия, составленная из двух отрезков – в их неизменном золотом отношении $1:\Phi$.

На самом деле обобщается не золотое сечение, а его геометрическая интерпретация.

С таким же успехом вместо изменяемого линейного отрезка можно использовать дугу с переменным радиусом кривизны.

Поэтому в понятийном аспекте более правильно следует говорить: «обобщенная геометрическая модель золотого сечения». То есть де-факто суть понятия золотой пропорции остаётся неизменной, но расширяется её геометрическое толкование.

Причем, нужно отдать должное, весьма удачно, информационно насыщено и наглядно.

Достаточно взглянуть на совмещенные графики двух моделей (рис. 1), подпадающих под определение семейства *резольвент Вассера*[6] – геометрического множества вершин плоского треугольника с фиксированным основанием и заданной пропорцией сторон.

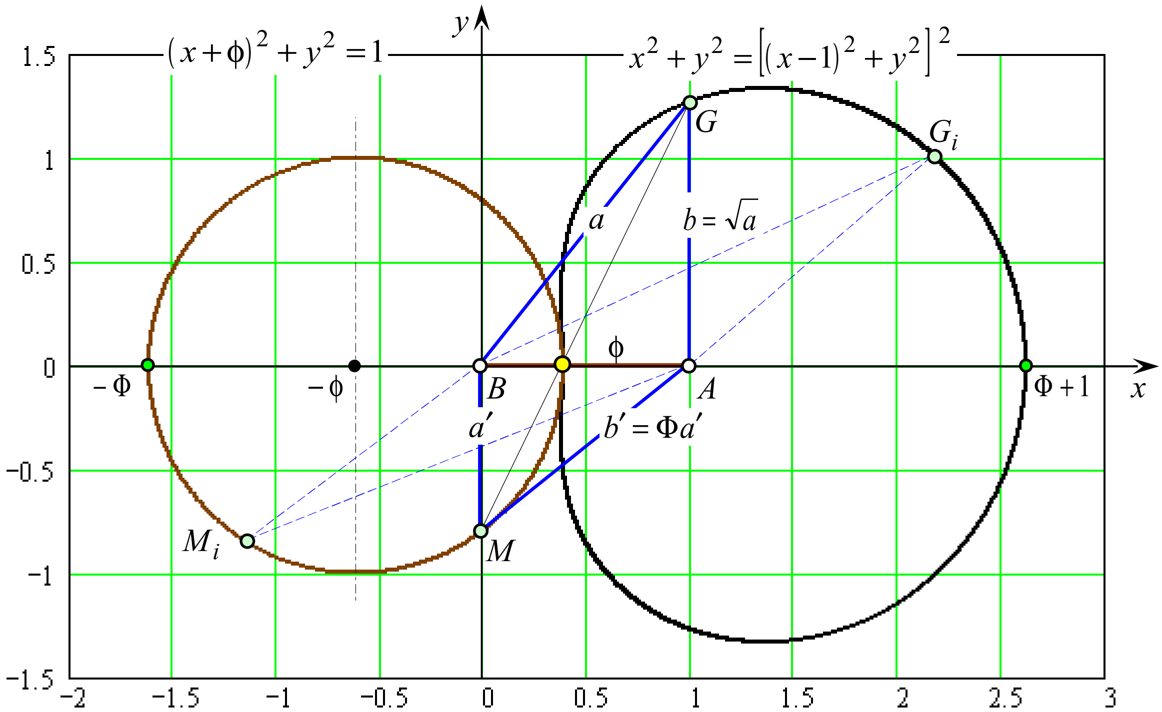


Рис. 1. Совмещение двух моделей формирования треугольников (a, b, $c = 1$):
золотоносные треугольники ABM $b/a=\Phi$ – окружность;
гармоничные треугольники ABG $b/a=1/b$ – резольвента Вассера с геометрической пропорцией сторон

На первый взгляд, модели сильно разнятся.

В действительности, по своей главной сути отличие не столь существенно, ибо кривые сформированы путем использования одного и того же подхода:

на фиксированном единичном отрезке AB достраивается множество треугольников с фиксированными соотношениями боковых сторон.

---

[6] *Вассер*: Василенко Сергей – гидролог-системотехник. Wasser (нем.) – вода, влага, жидкость и т.п.

В частности, принимаются соотношения: $b = a\Phi$ или $b = \sqrt{a}$.

То есть, различие происходит лишь в априори выбираемой пропорции между сторонами треугольника.

Так или иначе, но здесь повторяется способ формирования непрерывной линии, описываемой вершиной треугольника, предложенный в нашей работе [22], датированной ещё 22.07.2010. Статья [6] размещена уже позже, в последнем выпуске № 6 (2010) электронного журнала.

Наша главная идея, которая повторяется затем и в работе [6], состоит в выходе за пределы <золотого> деления линейного отрезка на плоскость с формированием геометрически непрерывного множества треугольников с заданными свойствами.

Неодинаково только соотношение между боковыми сторонами, выбор которого может быть неограниченно разнообразным.

В исходно-изначальном варианте [22] строятся гармоничные треугольники с использованием *геометрической пропорции сторон*: $c/b = b/a$ или $b^2 = a$. Именно таким путем золотое сечение "покидает" пределы чистого отрезка как вырожденного треугольника.

Автор работы [6] в качестве отношения двух сторон использует золотое сечение:

$$b = a\Phi \text{ или } a = b\phi,\ \phi = \Phi^{-1}.$$

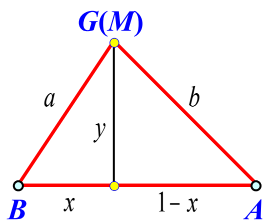
Понятно, что с таким же успехом могут применяться и многие другие виды пропорции, в частности на основе разнообразных средних значений (Cesaro, Chisini, Heronian, Heinz, Stolarsky... – http://en.wikipedia.org/wiki/Mean).

Например, та же гармоническая пропорция.

От того, что вместе треугольника употребляется терминология ломаной линии, состоящей из двух отрезков, ровным счётом ничего не меняется. Ибо налицо всё те же треугольники с изменяемой геометрией в соответствии с априори выбранной пропорцией.

Сопоставление треугольников. Без потери общности рассуждений исходный отрезок логично принять равным единице: $c = AB = 1$.

Для удобства изложения, как и ранее, точку B можно совместить с началом координат.



Тогда координаты вершин треугольников удовлетворяют двум равенствам:

$$a^2 = x^2 + y^2;$$

$$b^2 = (1-x)^2 + y^2.$$

В зависимости от принятой пропорции сторон приходим к таким соотношениям:

Золотоносные треугольники с отношением двух сторон, равным ЗС	Гармоничные треугольники с геометрической пропорцией сторон
$a = b\phi$	$a = b^2$
$x^2 + y^2 = \phi^2(1-x)^2 + \phi^2 y^2$	$x^2 + y^2 = \left[(1-x)^2 + y^2\right]^2$
$x^2 + y^2 = \phi^2\left(x^2 + y^2\right) + \phi^2(1-2x\phi) = \phi(1-2x\phi)$	$a \in \left[\phi^2,\ \Phi + 1\right]$:
$(x+\phi)^2 + y^2 = 1$	$X(a) = \left(a^2 - a + 1\right)/2;\quad Y(a) = \sqrt{a^2 - X(a)}$

Вершина C гармонических треугольников описывает кривую, которая напоминает лимакону[7] или улитку Паскаля с её уравнением [23, с. 74]

$$\left(x^2 + y^2 - \alpha x\right)^2 = \beta^2\left(x^2 + y^2\right)$$

для коэффициентов $(\alpha,\ \beta) = (2,\ 1)$:

лимакона $\qquad x^2 + y^2 = \left(x^2 + y^2 - 2x\right)^2;$

резольвента Вассера $\qquad x^2 + y^2 = \left(x^2 + y^2 - 2x + 1\right)^2.$

Эти алгебраические кривые, хотя и внешне похожи, но всё ж не совпадают.

Так, в уравнении резольвенты Вассера (с геометрической пропорцией сторон) наличествует свободный член, равный 1.

Примечательно, что в случае прямоугольных треугольников прямолинейный отрезок GM проходит точно через точку золотого сечения на исходном отрезке AB (см. рис. 1).

Действительно, $(b,\ a') = \left(\sqrt{\Phi},\ \sqrt{\phi}\right)$. Значит, отношения катетов равны $\dfrac{\sqrt{\Phi}}{\phi} = \dfrac{\sqrt{\phi}}{\phi^2}$, то есть треугольники подобны. Отсюда следует равенство их углов.

Расширение спектра построений.

Некоторые разновидности среднего двух величин можно вычислять по общей формуле:

$$b = \left(\frac{a^m + c^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{1}$$

В частности,

R_a – арифметическое среднее, $\quad m = 2$;
R_g – геометрическое среднее, $\quad m \to 0$;
R_h – гармоническое среднее, $\quad m = -1$;

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}, \qquad y = \sqrt{a^2 - x^2}. \tag{2}$$

Если зафиксировать одну сторону треугольника $c = 1$, другую сторону a варьировать, а третью b вычислять по формуле (1), то в зависимости от степенного показателя m получаем набор резольвент (рис. 2) с изменяющимися координатами (2) точек.

Там же для удобства сопоставления приведена и "золотая резольвента" R_ϕ, сдвинутая по оси x вправо на интервал $\Phi + \sqrt{2} - 1 \approx 2{,}03$ так, что её крайние точки совпадают с аналогичными точками "геометрической резольвенты" Вассера R_h.

При этом все крайние точки на графике становятся взаимно обратимыми:

$$\frac{1}{3}\cdot 3 \ = \ \phi^2 \cdot \Phi^2 \ = \ \left(\sqrt{2} - 1\right)\cdot\left(\sqrt{2} - 1\right) \ = \ 1.$$

Начальный участок резольвент в укрупненном масштабе приведен на рис. 3.

[7] Limacon. – http://mathworld.wolfram.com/Limacon.html.

Более рельефное и полное представление о форме кривых в первом и четвертом квадрантах дает рис. 4.

Следует отметить, что сама по себе константа золотого сечения Ф не вносит ничего примечательного в форму резольвенты Вассера.

В случае линейной зависимости боковых сторон $b = ka$, кривые обращаются в окружности (рис. 5), независимо от коэффициента пропорциональности k.

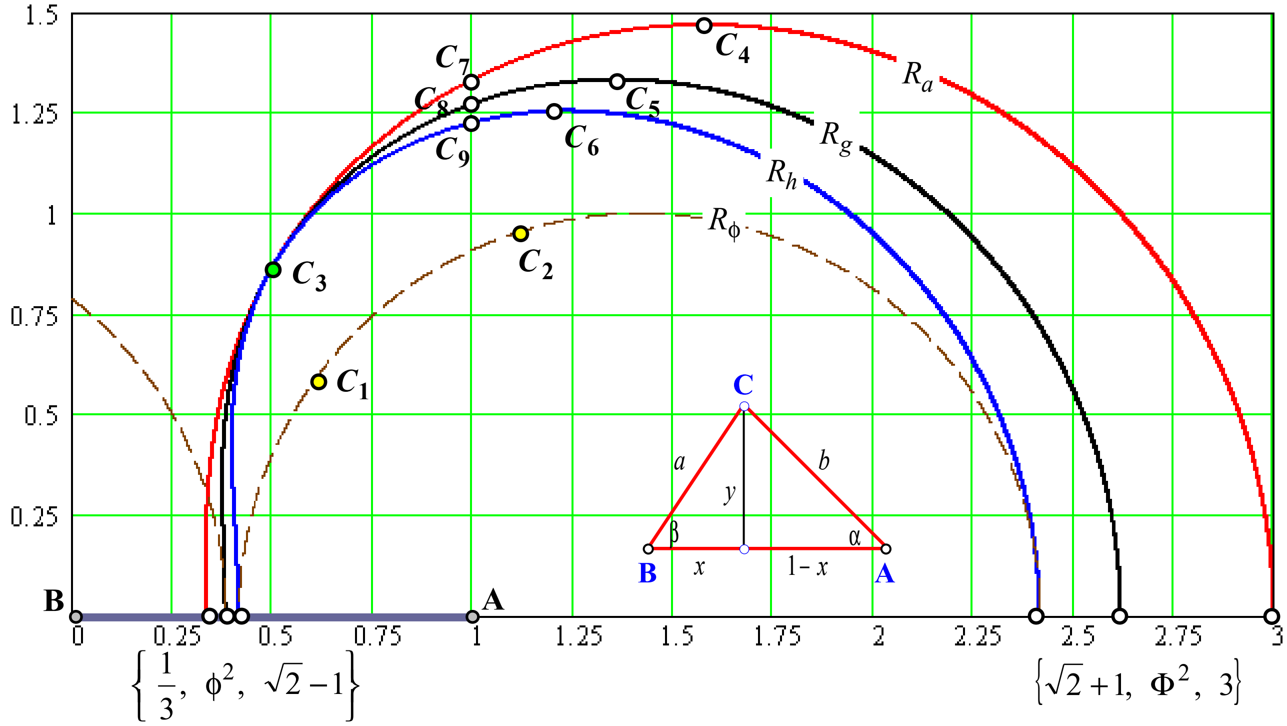


Рис. 2. Типовые резольвенты Вассера R с их наиболее характерными точками C_i

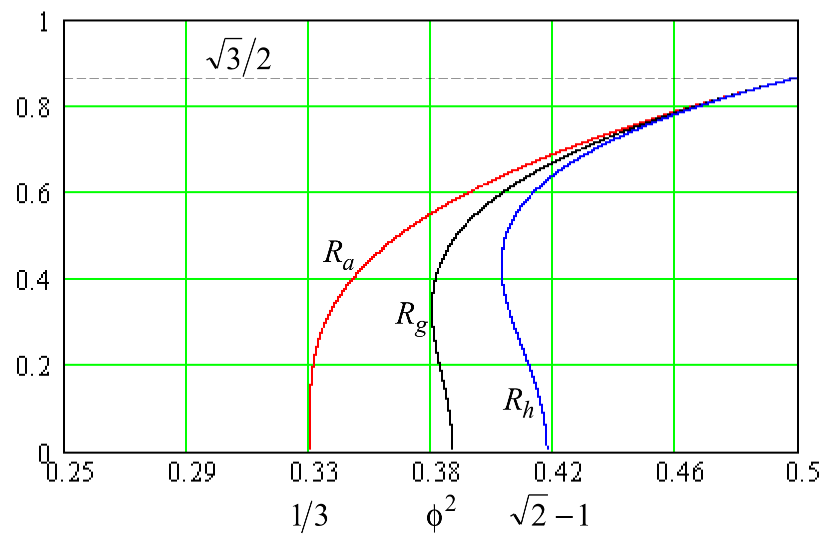


Рис. 3. Начальный участок формирования резольвент Вассера

В треугольниках с единичным основанием резольвенты Вассера с гармонической и геометрической пропорцией сторон отсекают на оси x отрезки соответственно длиной 2 и $\sqrt{5} = \Phi^2 - \phi^2$.

Ниже описаны наиболее примечательные случаи (не следует забывать, что первые две точки C_1, C_2 на рис. 2 были сдвинуты вправо):

1. ΔABC_1 – золотой остроугольный: $b = c,\ a = b\phi,\ \angle\beta = 36°$.

2. ΔABC_2 – золотой тупоугольный: $a = c,\ b = a\Phi,\ \angle\alpha = 108°$.

3. ΔABC_3 – равносторонний: $a = b = c$.

4. C_4 – точка максимума "арифметической резольвенты":

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0\ \Rightarrow 3a^3 - 3a^2 - 7a - 1 = 0\ \Rightarrow\ (a, b, x, y) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}},\ 1 + \frac{1}{\sqrt{3}},\ 1 + \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}\right);$$

$$x_{\max} = b, \quad y_{\max} = \sqrt{a}\ .$$

5. C_5 – точка максимума "геометрической резольвенты":

$$\frac{\partial y}{\partial a} = 0\ \Rightarrow 2a^3 - 3a^2 - a - 1 = 0\ \Rightarrow\ a = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{3} + \frac{5}{u} + 1\right) \approx 1{,}901; \quad u = \sqrt[3]{108 + 3\sqrt{921}}\ ;$$

$$b = \sqrt{a} \approx 1{,}379\ ; \quad x_{\max} = \frac{1 + a^2 - a}{2} \approx 1{,}357\ ; \quad y_{\max} = \sqrt{a^2 - x^2} \approx 1{,}332\ .$$

6. C_6 – точка максимума "гармонической резольвенты":

$$x_{\max} \approx 1.23506, \qquad y_{\max} \approx 1.25343\ .$$

7. ΔABC_7 – прямоугольный треугольник с арифметической пропорцией сторон:

$$b = \frac{a + c}{2} = \frac{a + 1}{2}, \qquad a^2 = b^2 + c^2 \qquad \Rightarrow \qquad (a,\ b,\ c) = \left(\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{3}{3}\right).$$

8. ΔABC_8 – прямоугольный треугольник с геометрической пропорцией сторон:

$$b^2 = ac = a, \qquad a^2 = b^2 + c^2 \qquad \Rightarrow \qquad (a,\ b,\ c) = \left(\Phi,\ \sqrt{\Phi},\ 1\right).$$

Другими словами, это треугольник с золотой пропорцией.

9. ΔABC_8 – прямоугольный треугольник с гармонической пропорцией сторон:

$$b = \frac{2ac}{a + c} = \frac{2a}{a + 1}, \qquad a^2 = b^2 + c^2 \qquad \Rightarrow \qquad (a,\ b,\ c) = (1.581546,\ 1.225270,\ 1)\ .$$

Здесь a – положительный корень алгебраического полинома $a^4 + 2a^3 - 4a^2 - 2a - 1$.

Один частный случай.

Л е м м а . Существует треугольник, длины сторон которого образуют геометрическую прогрессию, а величины внутренних углов – арифметическую прогрессию.

Пусть Δ – разность арифметической прогрессии углов α, β, γ треугольника, лежащих соответственно напротив сторон a, b, c.

Тогда сумма углов составляет

$$\alpha + \beta + \gamma = (\beta - \Delta) + \beta + (\beta + \Delta) = 3\beta = 180°.$$

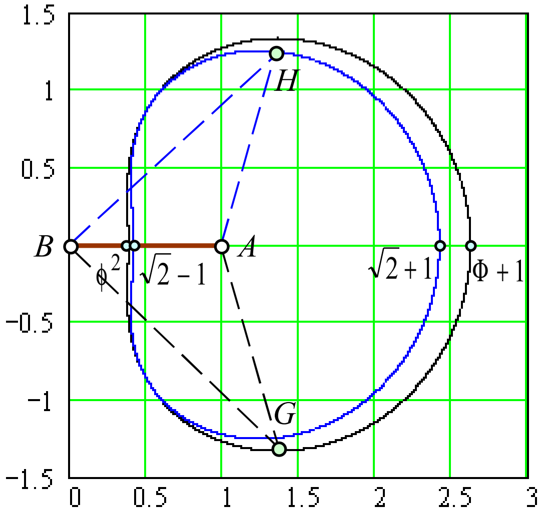


Рис. 4. Совмещённые резольвенты Вассера: гармоническая H и геометрическая G пропорция сторон

Откуда $\beta = 60°$. То есть один угол обязательно равен $60°$. Его косинус $\cos\beta = 0{,}5$.

Из геометрической прогрессии сторон следует равенство $b^2 = ac$.

Согласно теореме косинусов имеем:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

или

$$ac = a^2 + c^2 - ac \quad \rightarrow \quad (a-c)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad a = c.$$

Итак, получается равнобедренный треугольник $(a = c)$ с углом при вершине $60°$, то есть фактически равносторонний треугольник.

Возникает довольно любопытный, можно сказать "вырожденный" случай.

Треугольник действительно существует, но разность арифметической прогрессии равна нулю, а знаменатель геометрической прогрессии – единице.

Таким образом, в равностороннем треугольнике длины сторон образуют геометрическую прогрессию, а величины внутренних углов – арифметическую прогрессию.

Других треугольников с таким свойством нет.

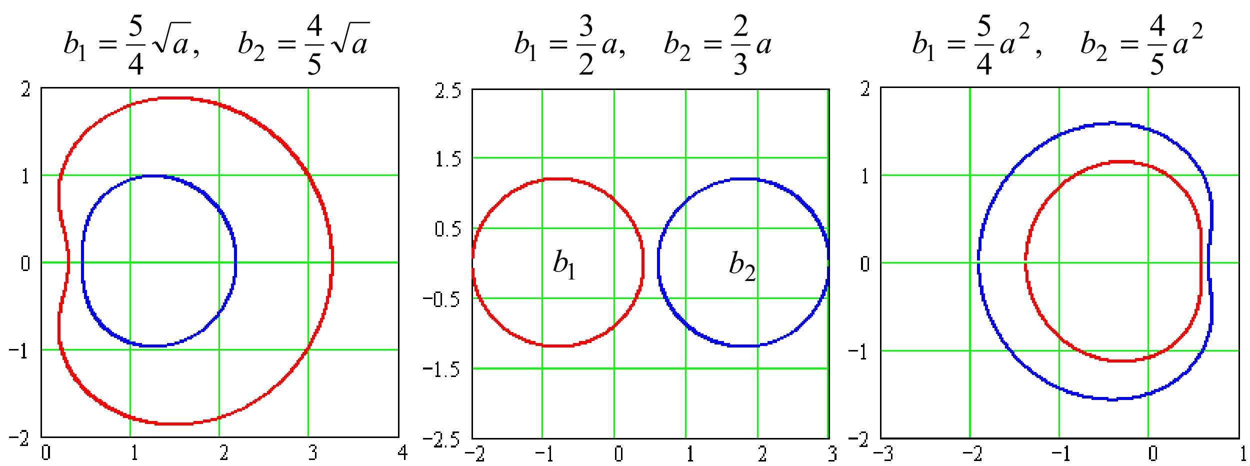


Рис. 5. Семейство резольвент Вассера с разными соотношениями боковых сторон: линейной зависимости (посредине) соответствуют окружности

"Золотое" неравенство треугольника.

В евклидовой геометрии хорошо известно неравенство треугольника[8]: сумма длин двух сторон не меньше длины третьей стороны.

Строгое неравенство достигается для невырожденного треугольника, когда три его вершины не находятся на одной прямой линии.

Доказательство изложено ещё Евклидом, – предложение 1.20 [19, с. 32].

Практическое использование неравенства треугольника приводит к любопытным результатам.

1) Пусть в треугольнике стороны находятся в арифметической прогрессии, и равны a, $a+d$, $a+2d$.

Из неравенства треугольника следует:

$$0<a<2a+3d,$$

$$0<a+d<2a+2d,$$

$$0<a+2d<2a+d.$$

Чтобы одновременно удовлетворить эти соотношения, необходимо выполнение неравенств: $a>0$, $-\frac{a}{3}<d<a$.

Самое простое решение $d=0$ приводит к равностороннему треугольнику с нулевым приращением арифметической прогрессии.

Если положить $d=\frac{a}{3}$, то генерируется прямоугольный треугольник, который всегда адекватен пифагорейской тройке со сторонами $3,\ 4,\ 5$.

2) Теперь рассмотрим треугольник, в котором стороны находятся в геометрической прогрессии: $a,\ aq,\ aq^2$.

Тогда неравенство треугольника требует выполнения:

$$0<a<aq+aq^2,$$

$$0<aq<a+aq^2,$$

$$0<aq^2<a+aq,$$

Поскольку в первом неравенстве $a>0$, то из второго следует $q>0$.

Кроме того первое неравенство эквивалентно $q^2+q-1>0$, то есть $q>\phi$ – малая золотая константа.

Соответственно из третьего неравенства $q^2-q-1>0$ следует, что $q<\Phi$.

Окончательно имеем:

$$\phi<q<\Phi.$$

Итак, *стороны треугольника могут находиться в геометрической прогрессии, если знаменатель прогрессии ограничен малой и большой константой золотой пропорции*.

В частности, если выбрать $q=\sqrt{\Phi}$, то формируется прямоугольный треугольник Кеплера с соотношением сторон $1:\sqrt{\Phi}:\Phi$ и теоремой Пифагора (тождеством) $\Phi^2=1+\Phi$.

[8] Triangle inequality. – http://en.wikipedia.org/wiki/Triangle_inequality.

Примечательно, если стороны треугольников образуют геометрическую прогрессию $(a,\ b,\ c) = \left(a,\ aq,\ aq^2\right)$, то логарифмы длин сторон образуют арифметическую прогрессию.

Действительно, взяв логарифмы, получаем: $\ln a + 0,\ \ln a + \ln q,\ \ln a + 2\ln q$.

Если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то его высоты также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q^{-1}.

В самом деле, исходя из формулы для площади треугольника (как половина произведения стороны на высоту, проведенную на эту сторону), получаем

$$(h_a,\ h_b,\ h_c) = \frac{2S}{a}\cdot\left(1,\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{q^2}\right).$$

Из другой формулы для площади (половина произведения сторон на синус угла между ними) следует, что синусы углов также образуют геометрическую прогрессию.

$$(\sin\gamma,\ \sin\beta,\ \sin\alpha) = \frac{2S}{a^2 q}\cdot\left(1,\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{q^2}\right).$$

Целочисленный треугольник с константой ЗС.

Целочисленный (*интегральный*) *треугольник*[9] – фигура, все три стороны которой имеют длины в виде целых чисел.

В принципе из любого рационального треугольника (со сторонами в виде рациональных чисел) можно получить целочисленный аналог, пересчитав-умножив все стороны на общее кратное их знаменателей.

Так что в этом смысле нет существенной разницы между такими целочисленными и рациональными треугольниками.

Рассмотрим один любопытный класс целочисленных треугольников, в которых один угол равен 3/2 другого [24], например, $\beta = \alpha\cdot 3/2$.

Класс эквивалентности таких треугольников определяется такими величинами сторон:

$$a = mn^3,$$
$$b = n^2\left(m^2 - n^2\right),$$
$$c = \left(m^2 - n^2\right)^2 - m^2 n^2,$$

с целыми числами m, n такими, что $0 < \Phi n < m < 2n$ или

$$\Phi < \frac{m}{n} < 2.$$

Заметим, что все треугольники с соотношением $\beta = \alpha\cdot 3/2$ и любыми сторонами удовлетворяют равенству $\left(b^2 - a^2\right)\left(b^2 - a^2 + bc\right) = a^2 c^2$.

Поскольку сумма трех углов равна π, то $\alpha < \frac{2}{5}\pi$.

Величина угла находится по теореме косинусов $\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Например,

$m = 5,\ n = 3;\quad (a, b, c) = (135,\ 144,\ 31);\quad (\alpha, \beta, \gamma) = (1.1714,\ 1.7571,\ 0.2132).$

---

[9] Integer triangle. – http://en.wikipedia.org/wiki/Integer_triangle.

Для $m = 20$ приемлемыми могут быть уже два числа $n = 11$, $n = 12$; для $m = 100$ величина $n = 51 \div 61$ и т.д.

Треугольники Герона[10] (с целочисленными сторонами a, b, c и площадью S) имеют стороны в арифметической прогрессии $a-d$, d, $a+d$ тогда и только тогда [25], когда

$$b = 2\left(m^2 + 3n^2\right)/g, \qquad d = \left(m^2 - 3n^2\right)/g,$$

где $g = \gcd\left(m^2 - 3n^2, 2mn, m^2 + 3n^2\right)$ – наибольший общий делитель.

Например,

m	n	g	d	a	b	c	S
3	1	6	1	3	4	5	6
4	1	1	13	25	38	51	456
4	2	4	1	13	14	15	84
9	5	6	1	51	52	53	1170

Идеальный гиперболический треугольник с константой ЗС.

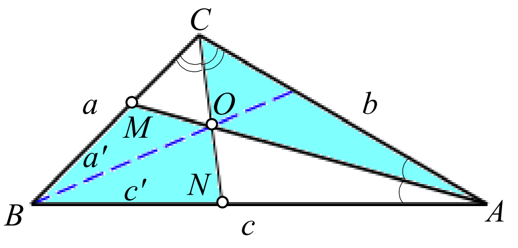
В гиперболической геометрии Лобачевского хорошо известен *идеальный треугольник* [26] – гиперболический треугольник[11], три вершины которого лежат на окружности в бесконечности.

В гиперболической метрике любые два идеальных треугольника конгруэнтны.

В стандартной гиперболической плоскости (с гауссовой кривизной –1 на каждую точку) идеальные треугольники (ИТ) удовлетворяют ряду свойств:

- Сумма внутренних углов ИТ равна нулю.
- Любой ИТ имеет площадь π.
- Любой ИТ имеет бесконечный периметр.
- Вписанная в ИТ окружность соответствует трем точкам касания, формируя равносторонний треугольник с длиной стороны **4·lnΦ**.

Биссектрисы в треугольнике с геометрической прогрессией сторон.



Утверждение. Пусть в треугольнике ABC стороны образуют геометрическую прогрессию так, что $b^2 = a \cdot c$, и проведены биссектрисы AM и CN, пересекающиеся в точке O. Тогда площади выделенных цветом фигур равны: $S_{COA} = S_{BMON}$.

Доказательство. Из геометрии известно, что точка пересечения O биссектрис углов треугольника является центром вписанной окружности радиуса r.

Кроме того, биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим к ним сторонам, откуда следует:

$$a' = \frac{ac}{b+c}, \qquad c' = \frac{ac}{a+b}.$$

[10] Heronian_triangle. – http://en.wikipedia.org/wiki/Heronian_triangle; http://en.wikipedia.org/wiki/Integer_triangle.
[11] Hyperbolic triangle. – http://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_triangle.

Умножим обе части исходного равенства $b^2 = a{\cdot}c$ геометрической прогрессии сторон на периметр треугольника и выполним преобразования:

$$b^2(a+b+c) = ac(a+b+c);$$

$$b^3 + cb^2 + ab^2 = abc + a^2c + ac^2;$$

$$b^3 + abc + cb^2 + ab^2 = 2abc + a^2c + ac^2;$$

$$b(a+b)(b+c) = ac(a+2b+c);$$

$$b = ac\frac{(a+b)+(b+c)}{(a+b)(b+c)} = \frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c}.$$

Площади искомых фигур равны:

$$S_{COA} = 0{,}5r \cdot b;$$

$$S_{BMON} = S_{BMO} + S_{BNO} = 0{,}5r(a' + c') = 0{,}5r \cdot \left(\frac{ac}{a+b} + \frac{ac}{b+c}\right) = 0{,}5r \cdot b = S_{COA}.$$

Что и требовалось доказать.

Краткие итоги.

В продолжение наших ранних исследований (2010), произвольным образом заданное деление линейного отрезка единичной длины на две части геометрически расширяется с продолжением-вынесением на евклидову плоскость.

Точка деления отрезка становится вершиной плоского треугольника с единичным основанием и описывает ту или иную кривую из *семейства резольвент Вассера* – геометрического множества вершин треугольника с фиксированным основанием и априори заданной пропорцией сторон.

В частности, классическое золотое сечение отрезка – есть не что иное, как разновидность геометрической прогрессии для вырожденного треугольника с соотношением сторон $b^2 = ac, \ c = a + b$.

Для треугольников с геометрической прогрессией сторон продемонстрировано несколько полезных свойств-соотношений, которые фактически являются следствием "генетически" заложенной в них золотой константы. В разных интерпретациях её присутствия, включая неравенства-ограничения.

Литература:

1. *Аракелян Г.* О мировой гармонии, теории золотого сечения и её обобщениях // Академия Тринитаризма. – М., Эл № 77-6567, публ.17064, 06.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/2065-ar.pdf.

2. *Василенко С.Л.* Математика золотого сечения глазами философа // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 24.08.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=38&sm=2.

3. *Василенко С.Л.* Позолоченные балахоны // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17121, 19.12.2011. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/013a/02322093.htm.

4. *Белянин В.С.* Таинство чисел золотой пропорции. 3. Секрет золотого полюса // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 06.08.2011. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=33&sm=2.

5. *Белянин В.С.* Таинство чисел золотой пропорции. 4. Золотые полюса остроугольного треугольника // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 20.05.2012. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=72&sm=2.

6. *Шелаев А.Н.* Соотношения гармонии и экстремумы длин площадей и их производных в обобщенной модели золотого сечения. Актуальные проблемы современной науки. – 2010. – № 6. – С.162–164.

7. *Шелаев А.Н.* Обобщенная геометрическая модель золотых сечений и соответствующие ей характерные экстремумы длин, площадей и их производных // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17431, 29.04.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321252.htm.

8. *Шелаев А.Н.* Обобщенная геометрическая модель золотых сечений и функций средних значений // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17485, 28.05.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321255.htm.

9. *Василенко С.Л.*, *Никитин А.В.* От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2 / http://andrejnikitin.narod.ru/zolotoe_ravnovesie.pdf.

10. *Василенко С.Л.* В поисках математической гармонии мира // Академия Тринитаризма. – М., Эл № 77-6567, публ.17347, 06.03.2012. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161940.htm.

11. *Weisstein E.W.* Golden Triangle // MathWorld – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html.

12. *Golden triangle* (mathematics) // From Wikipedia, the free encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Golden_triangle_(mathematics).

13. *Bicknell M.*, *Hoggatt V.E.Jr.* Golden Triangles, Rectangles, and Cuboids // Fib. Quart. **7**, 73–91, 1969.

14. *Weisstein E.W.* Golden Gnomon // MathWorld – A Wolfram Web Resource. – http://mathworld.wolfram.com/GoldenGnomon.html.

15. *Якушко С.И.* Определение характерных размеров пирамиды Хеопса через золотое сечение // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14858, 22.07.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321091.htm.

16. *Щетников А.И.* Золотое сечение, квадратные корни и пропорции пирамид в Гизе // Историко-математические исследования. – 13(48), 2009. – С. 198–217. – http://www.nsu.ru/classics/pythagoras/Pyramis.pdf.

17. *Хембидж Д.* Динамическая симметрия в архитектуре: Пер с англ. – М.: Изд-во академии архитектуры, 1936.

18. *Kimberling C.* A New Kind of Golden Triangle // Applications of Fibonacci Numbers: Proceedings of the Fourth International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications,' Wake Forest University. – Dordrecht, Netherlands: Kluwer, 1991. – pp. 171–176.

19. *Начала Евклида*. Книги I–VI: Пер. с греч. и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии М.Я. Выгодского и И.Н. Веселовского. – М. –Л.: ГИТТЛ, 1948. – 448 с.

20. *Белянин В.С.*, *Романова Е.Н.* Золотая пропорция. Новый взгляд // Наука и жизнь. – 2003. – № 6. – http://www.nkj.ru/archive/articles/3070/.

21. *Алферов А.А.* О среднем геометрическом (и не только) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.13671, 17.08.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321027.htm.

22. *Василенко С.Л.* Математические начала гармонии: гармонические треугольники // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16007, 22.07.2010. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161680.htm.

23. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.

24. *Deshpande M.N.* Some new triples of integers and associated triangles // Mathematical Gazette 86, November 2002, 464–466.

25. *Buchholz R.H.*, *MacDougall J.A.* Heron Quadrilaterals with sides in Arithmetic or Geometric progression // Bull. Austral. Math. Soc. – 59 (1999), 263–269.

26. *Ideal triangle*. (2012, May 25). – In Wikipedia, The Free Encyclopedia. – http://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_triangle.

Украина, Харьков

Авторские страницы:
http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3
http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm
http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html