

## Современная геометрия золотой пропорции

*Вдохновение нужно в поэзии, как и в геометрии*  
(А.С. Пушкин «О статьях Кюхельбекера»)

Вдохновение особо благоприятно для различных видов творческой деятельности.

Происходит глубокая сосредоточенность духовных сил человека на объекте творчества.

Их сопровождают эмоциональный подъем, радость создания.

Труд становится исключительно продуктивным и нацеленным на результат.

Вместе с тем его эффективность во много крат возрастает с возникновением различных образов ассоциативного ряда.

Шутки ради, как в одном анекдоте, когда одному персонажу во всём виделся женский бюст. Глядя на облака, горы, волны и даже ... будильник с его тиканьем "тик-так".

Хотя в каждой шутке есть только доля шутки.

Не случайно А.С.Пушкин проводил параллели между поэзией и геометрией.

Иногда утверждают, что самые лучшие геометрические фигуры – женские.

Окружность, трапеция, пирамида...

И не только в геометрии.

Вероятно, именно поэтому наиболее экстравагантные из математических терминов имеют также отношение к лучшей половине человечества:

функция, производная, дуга, инверсия, медиана, биссектриса, пропорция...

Что ни слово, то новый женственный образ.

Наиболее общий и многозначный из них, пожалуй, математическая пропорция как равенство разнообразных отношений.

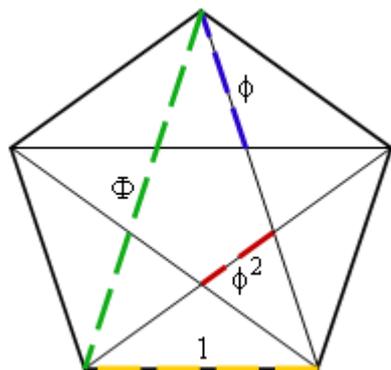
В частности, золотая пропорция. – С её удивительной формой равновесия, синтеза и созидания [1]:

*целое так относится к своей части как она к собственному отклонению от целого.*

Понятие целого здесь представлено широко и не обязательно соотносится с прямолинейным отрезком, да и геометрией вообще.

В общем случае деление целого на две неравные части допускает бесконечное множество соотношений между целым и одной из его частей, а также между самими частями целого. Но только в единственной вариации эти отношения могут быть равными.

Этот случай представляет собой золотое сечение – высшее проявление структурного и функционального единения целого и его частей.



Широко распространенное представление золотой пропорции (золотого сечения) долгое время сводилось к общеизвестному делению прямолинейного отрезка с помощью его достройки до прямоугольного треугольника с соотношением катетов 1 : 2.

Ну, и конечно, традиционный равносторонний пятиугольник или звезда-пентаграмма, сплошь усеянная золотыми числами:

$$\Phi = \phi^{-1} = (1 + \sqrt{5}) / 2.$$

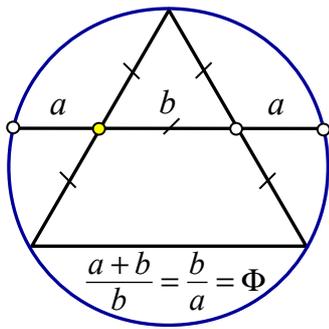
Со временем появились новые оригинальные геометрические построения.

Некоторые из них проанализированы в публикациях [2–4].

Они позволяют шире представить себе "золотоносную" геометрию, хотя, конечно, не охватывают всевозможные находки исследователей.

Целью настоящей работы является упорядочение-обзор наиболее ярких представителей множества "золотых" построений с добавлением новых интерпретаций и оригинальных формообразований.

**Равносторонний треугольник.** Д.Одом дал удивительно простую конструкцию золотого отношения с использованием равностороннего треугольника [5].



Если через середины двух сторон треугольника провести прямую линию до пересечения с описанной окружностью, то образуемые три точки находятся в золотой пропорции с константами-отношениями:

$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad \phi = \Phi^{-1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

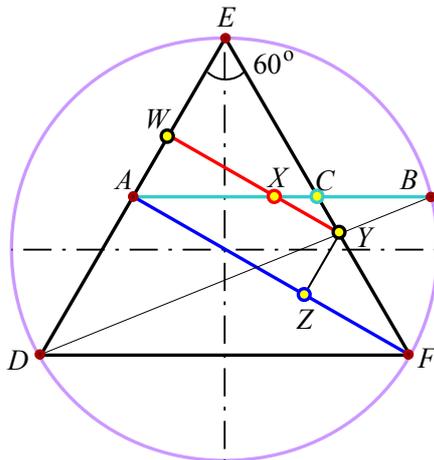
Это свойство использовано, в частности, при построении так называемой «русской матрешки в геометрических образах золотой пропорции» [6].

Действительно, согласно теореме о пересекающихся хордах (произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды) имеем:

$$b \cdot b = (b + a) \cdot a \text{ или (разделив на } a^2) \quad x^2 = x + 1,$$

$$\text{где } x = \frac{b}{a} > 0, \text{ откуда } x = \Phi.$$

Но это не всё... Несколько добавочных линий (рис. 1), и на базе равностороннего треугольника мы получаем целый набор вариантов золотой пропорции на разных отрезках.



Последовательность построений:

$\Delta EDF$ ,  $\bullet A (EA = AD)$ ,  $\bullet C (EC = CF)$ ,  
 $AB (AC), DB, YZ \perp AF, YW \perp ED$ .

$$\Phi = \frac{AC}{CB} = \frac{EY}{YF} = \frac{AZ}{ZF} = \frac{WX}{XY} = \frac{EW}{WA} = \frac{\widehat{EB}}{\widehat{BF}}$$

$$\Phi = \frac{AB}{AC} = \frac{EF}{EY} = \frac{AF}{AZ} = \frac{WY}{WX} = \frac{EA}{EW} = \frac{\widehat{EF}}{\widehat{EB}}$$

Рис. 1. Формирование множества золотых сечений на основе равностороннего треугольника

Аналогичным образом могут быть выполнены геометрические построения относительно и других серединных точек треугольника (типа C).

Этим самым разрушается привычный миф об исключительной "золотоносности" пентаграммы и связанной с ней пятиконечной звезды.

Как видно, равносторонний треугольник способен продуцировать целый букет золотых сечений.

**Египетский треугольник.** Любопытно построение золотого сечения в египетском прямоугольном треугольнике  $\triangle ABC$  со сторонами 3–4–5 [7, с. 43–44]<sup>1</sup>.

Проведем биссектрису угла  $B$  (рис. 2).

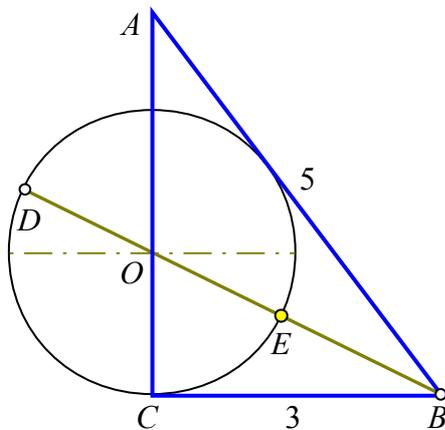


Рис. 2. Золотое сечение на биссектрисе египетского треугольника

Точка  $O$  делит катет  $AC = 4$  в пропорции:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{CB} = \frac{5}{3} \rightarrow AO = \frac{5}{2}, \quad OC = \frac{3}{2}.$$

Очертим окружность  $C(O)$ .

Согласно свойству степени точки  $B$  относительно окружности<sup>2</sup> выполняется равенство

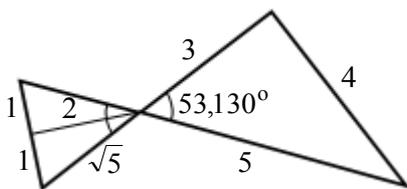
$$BE \cdot BD = BC^2$$

или  $(BO - 3/2) \cdot (BO + 3/2) = 9$ , откуда  $BO = 3\sqrt{5}/2$ .

Окончательно получаем золотое сечение на биссектрисе угла  $B$ :

$$\frac{DE}{BE} = \frac{3}{3(\sqrt{5}-1)/2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi.$$

Крайне занимательно совместное рассмотрение равнобедренно треугольника с высотой равной основанию и египетского треугольника.



У первого из них боковая сторона равна корню из пяти – прямому прародителю золотого сечения.

Но наиболее примечательный момент состоит в абсолютной стыковке фигур через равенство острых углов:

$$2 \cdot \arctg \frac{1}{2} = \text{arccctg} \frac{4}{3} = 0,9273 \xrightarrow{180/\pi} 53,130^\circ.$$

**Квадрат.** Если одну из сторон квадрата разделить пополам, то можно образовать прямоугольный треугольник с соотношением сторон 1 : 2.

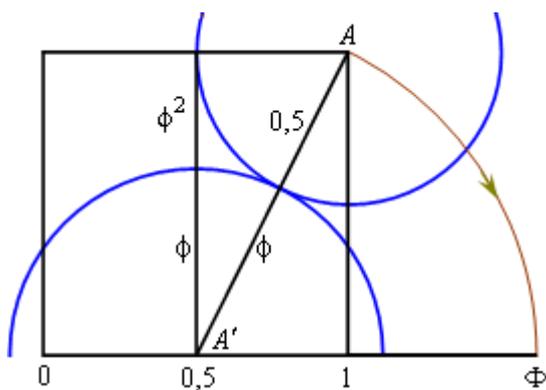


Рис. 3. Варианты золотой пропорции в квадрате

Далее на этой подоснове легко образуются разные варианты золотой пропорции.

Например, соединяем середину единичного  $1 \times 1$  квадрата  $A'$  с противоположной вершиной  $A$  и поворотом полученного отрезка длиной  $\sqrt{1+0,5^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$  фиксируем на горизонтали золотую

константу  $\Phi = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2}$ .

Вокруг вершины  $A$  проводим окружность радиусом 0,5. Она отсекает на отрезке  $AA'$  малую золотую константу  $\phi = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$ .

Поворотом вокруг  $A'$  можно восстановить  $\phi$ -отрезок на вертикали:  $\phi + \phi^2 = 1$ .

В итоге мы построили отрезки, численно равные малой и большой золотым константам.

<sup>1</sup> Golden Ratio and the Egyptian Triangle. – [http://www.cut-the-knot.org/do\\_you\\_know/GoldenRatio345.shtml](http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio345.shtml).

<sup>2</sup> Power of a point. – [http://en.wikipedia.org/wiki/Power\\_of\\_a\\_point\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Power_of_a_point_theorem).

Заметим, что в традиционной задаче деления отрезка золотым сечением его большая часть равна  $\phi$  и имеет размерность исходного целого. Но вот константа  $\Phi$  не имеет метрики и определяется как отношение большей части к меньшей. То есть, само сечение мы проводим, а геометрически представить величину  $\Phi$  не можем.

В этом контексте гораздо выгоднее выглядит геометрическое представление золотых констант в задачах синтеза [1], где  $\Phi$  становится числом роста и приумножения.

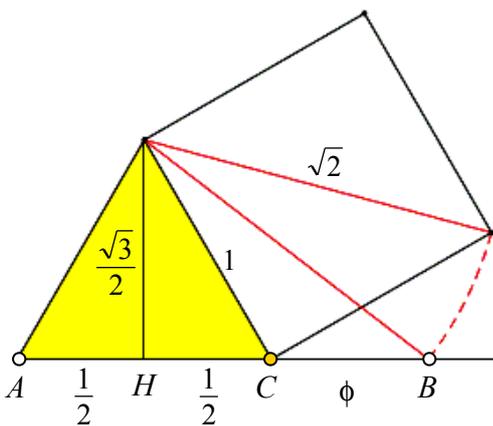
Константа  $\Phi$  приобретает четкую метрику и содержательный геометрический смысл как новый увеличенный отрезок. Или новое увеличенное (подросшее) целое в результате увеличения исходного единичного отрезка на величину приращения  $\phi$ . В тех же единицах, что исходный отрезок 1 и добавка к нему  $\phi$ .

Другими словами, все величины в равенстве  $1 + \phi = \Phi$  имеют одинаковую метрику.

Очень важное методологическое расширение!

Теперь у нас золотое число  $\Phi$  – «новая созидательная единица», образуемая из обычной единицы 1 в золотой пропорции. Это наглядно видно на исходном чертеже (см. рис. 3).

**Равносторонний треугольник и квадрат.** Ещё одно комбинированное построение (рис. 4). Здесь осуществляется переход от равностороннего треугольника (с длиной стороны = 1) к квадрату, и далее через поворот его диагонали  $\sqrt{2}$  к золотому сечению отрезка  $AB$  [8].



По теореме Пифагора имеем.

$$HB = \sqrt{2 - \frac{3}{2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Отсюда следует:

$$AB = AH + HB = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \Phi,$$

$$CB = HB - HC = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} = \phi.$$

Рис. 4. Золотая пропорция в симбиозе треугольника и квадрата

Таким образом,  $C$  – точка золотого сечения отрезка  $AB$ :  $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \Phi$ .

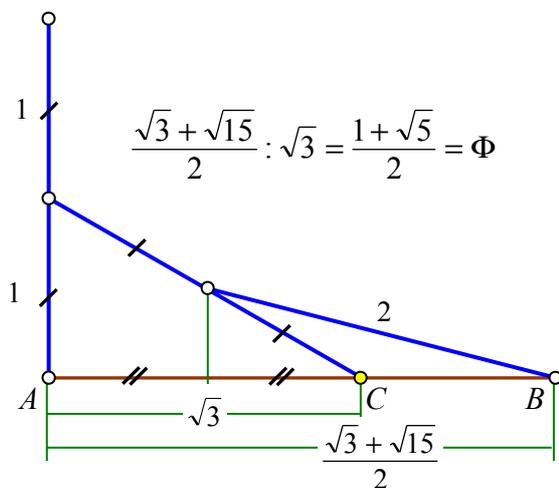


Рис. 5. "Трёх-сегментное" золотое сечение

**Три сегмента.** Сравнительно недавно предложен изящный путь исполнения золотой пропорции с тремя равными сегментами, их серединами и парой перпендикулярных линий [9].

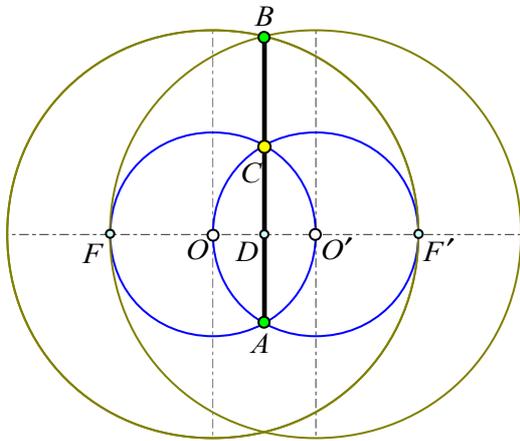
Без потери общности рассуждений примем для удобства рассуждений длину исходного отрезка, равной 2.

Один конец второго сегмента движется по первому вертикальному сегменту до его середины, а второй край – по горизонтали.

Затем точно также один конец третьего сегмента движется по второму сегменту до его середины (рис. 5).

В итоге на горизонтали образуется золотое сечение.  
Все построения и расчеты наглядно представлены на чертеже.

**Две пары окружностей.** Любопытный способ отображения золотого сечения представлен в работе [10] на основе двух одинаковых пар концентрических окружностей (рис. 6), в скобках фигурируют центры:



$$O'(O), O(O'), F'(O), F(O')$$

Примем для определенности радиус меньшей окружности равным  $OO' = 2$ .

Тогда

$$AC = 2CD = 2\sqrt{2^2 - 1^2} = 2\sqrt{3}$$

$$AB = AD + BD = \sqrt{3} + \sqrt{4^2 - 1^2} = (1 + \sqrt{5})\sqrt{3}$$

Отсюда вытекает золотое отношение:

$$\frac{AB}{AC} = \Phi$$

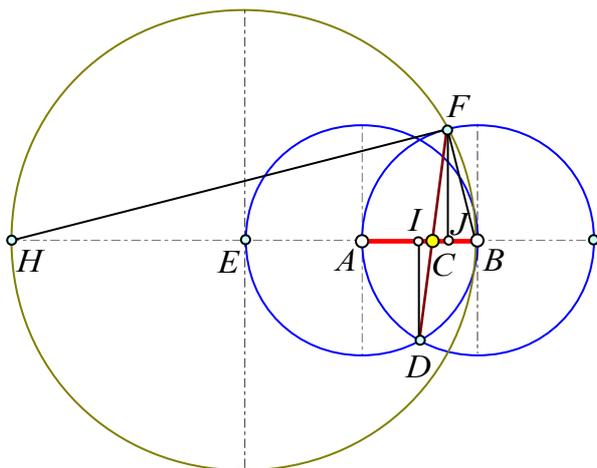
Рис. 6. Золотая пропорция в структуре двух пар окружностей  
 $x = OD/r$  в долях от радиуса  $r$ .

Примем в качестве переменной расстояние

Тогда при удалении окружностей друг от друга площадь их общего (удвоенного) сегмента по отношению к площади круга равна  $S(x) = \frac{\theta - \sin \theta}{\pi}$ , где  $\theta = 2 \arccos x$  – угол сектора  $COA$ .

В частности,  $S(0.25) \approx 0.685$ ,  $S(0.5) \approx 0.391$ .

**Три окружности.** Далее из той же серии, но 5-шаговое деление отрезка в золотом отношении [11] с использованием трех окружностей (рис. 7).



Продолжим исходный отрезок  $AB$  влево.  
Очертим три окружности  $A(B)$ ,  $B(A)$  и  $B(F)$ . Проведем линию  $FD$ .

Точка пересечения  $C$  – золотое сечение заданного отрезка  $AB$ .

*Доказательство.* Без потери общности рассуждений примем исходный отрезок равным единице  $AB = 1$  и проведем к нему перпендикуляры  $DI$  и  $FJ$ .

Тогда  $BF = 1$ ,  $BH = 4$ .

Поскольку  $(BF)^2 = BH \cdot BJ$ , то  $BJ = 1/4$ , а значит,  $IJ = 1/2 - 1/4 = 1/4$ .

По теореме Пифагора

$$BF = \sqrt{1^2 - (1/4)^2} = \sqrt{15}/4$$

Рис. 7. Золотая пропорция в структуре трёх окружностей

Из подобия треугольников имеем пропорцию  $\frac{IC}{CJ} = \frac{ID}{JF} = \frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{15}/4} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

Отсюда следует:

$$IC = CJ \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{4} - IC\right) \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-2}{2} \quad \text{и} \quad AC = \frac{1}{2} + IC = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi.$$

Довольно неочевидный и многозвенный вывод, в результате которого, тем не менее образуется золотая пропорция.

**Три одинаковые окружности.** К.Хофстеттер предложил аналогичную конструкцию «ржавого компаса» на основе трех одинаковых окружностей [12].

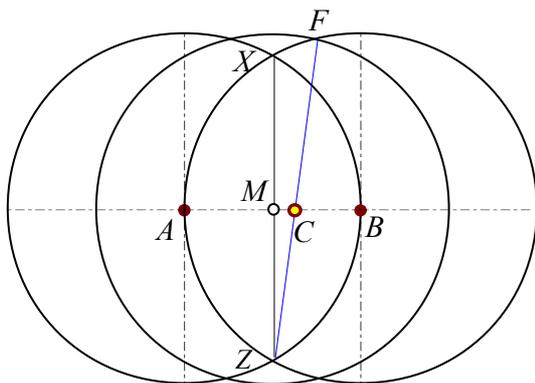


Рис. 8. Золотое сечение через три одинаковые окружности

Построение подобно предыдущим, за исключением последнего шага.

Для отрезка  $AB = 1$  проводим окружности  $A(B)$  и  $B(A)$  (рис. 8). Соединяем точки их пересечения линией  $XZ$ , которая делит заданный отрезок пополам в точке  $M$ .

Вокруг этой точки проводим окружность единичным радиусом  $AB$ , которая пересекается с окружностью  $A(B)$  в точке  $F$ .

Линия  $FZ$  делит исходный отрезок  $AB$  в точке  $C$  золотым сечением:  $AB/AC = \phi$ .

Следует особо отметить, что количество операций геометрических построений в описанных выше случаях на самом деле небольшое.

Так, проведение окружностей  $A(B)$  и  $B(A)$  с последующим соединением точек их пересечения де факто означает деление заданного отрезка  $AB$  пополам.

**Гармония восприятия.** А теперь приведем один пример на гармоничность золотого сечения из ранних построений [2].

Очертим три концентрические полуокружности  $A(O)$ ,  $A'(O)$ ,  $F(O)$  такие, что  $AA' = FO$ . Проведем прямые линии  $A-B$  и  $A'-B'$  до пересечения в точках  $C, C'$  (рис. 9).

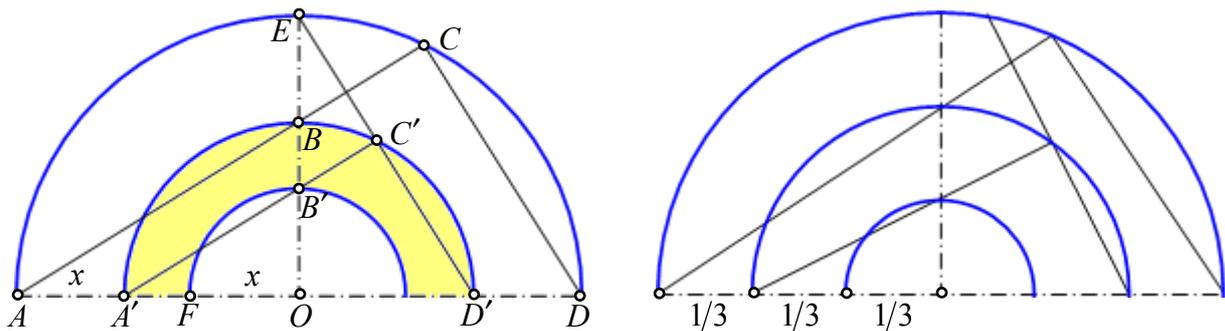


Рис. 9. Иллюстрация разной сходимости образующих отрезков в концентрических окружностях: идеальное сочленение наблюдается лишь при золотой пропорции радиусов

Без потери общности рассуждений примем для простоты изложения  $AO = 1$ .

Прямоугольные треугольники  $ACD$  и  $A'C'D'$  (с гипотенузами на диаметрах) подобны, если равны отношения катетов (тангенсы углов):

$$\frac{x}{x+(1-2x)} = \frac{x+(1-2x)}{1} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Искомым решением является корень квадратного уравнения, который меньше 1:

$$x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 1-\phi = \phi^2.$$

Из подобия треугольников следует параллельность сторон:  $AC \parallel A'C'$ ,  $CD \parallel C'D'$ .

Кроме того, при данных условиях прямоугольные треугольники  $\triangle A'C'D'$  и  $\triangle EOD'$  с одинаковым острым углом при вершине  $D$  также подобны.

Следовательно, точки  $E$ ,  $C'$ ,  $D'$  расположены на одной прямой.

Несмотря на, казалось бы, равное наращивание радиусов окружности на одну треть, более компактное и гармоничное образующих отрезков для концентрических окружностей идеальное сочленение наблюдается лишь при золотой пропорции радиусов.

Здесь просматриваются некоторые аналогии с идеальным сочленением чевиан и образующих линий, проходящих через три золотых фокуса треугольника [13].

### **Вместо заключения.**

Как видим, арсенал-копилка золотых построений постоянно пополняется.

Среди них есть простые и несколько усложненные варианты.

Но дело не в трудоемкости черчения. Сегодня это не проблема

Данные задачи показывают, прежде всего, разнообразие геометрических форм и их сочетаний-комбинаций, приводящих к золотой пропорции

Они могут, в частности, найти отражение в архитектурных изысканиях, применяться в исследовательских задачах, использоваться в школьных программах.

Наряду с этим поистине уникальные геометрические, алгебраические и числовые свойства золотого сечения гипотетически могут выступать в роли "застрельщиков" формирования глобальных мировых процессов.

Великий Галилей говорил: «Философия написана в грандиозной книге Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики».

Как нам представляется, велика вероятность, что в спектакле сотворения мира значительная роль отведена именно золотой пропорции.

Один из таких упрощенных сценариев, например, описан в работе [14]. В ней представлена численно-игровая математическая модель возникновения макрокосмоса "из ничего". В основе модели лежит золотая константа, как ядро генома мироздания.

Как утверждал "железный" стоический С.Хокинг: «Фундаментальная тяга человечества к знанию – достаточное основание для продолжения поисков. И мы не удовлетворимся меньшим, чем полное постижение Вселенной, в которой мы живем» [15, гл. 3].

### **Литература:**

1. Василенко С.Л., Никитин А.В. От золотого отношения к равновесию, синтезу и созиданию // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 17.01.2013. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=93&sm=2>.
2. Василенко С.Л. Золотые самородки в математике // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 30.10.2012. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=91&sm=2>.
3. Василенко С.Л. Геометрия золотого сечения // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.16409, 05.03.2011. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161806.htm>.
4. Bogomolny A. Golden Ratio in Geometry / Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles. – [http://www.cut-the-knot.org/do\\_you\\_know/GoldenRatio.shtml](http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenRatio.shtml).

5. *Odom G., J. van de Craats*. Elementary Problem 3007, American Math. Monthly, 90 (1983) 482; solution, 93 (1986) 572.
6. *Василенко С.Л.* Математические начала гармонии: русская матрешка в геометрических образах гармонической пропорции // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15978, 04.07.2010. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161668.htm>.
7. *Huntley H.E.* The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty. – N.Y., London: Dover, 1970. – 186 p.
8. *Bataille M.* Another Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum, **11** (2011), 55. – [http://www.cut-the-knot.org/do\\_you\\_know/MBatailleGoldenRatio.shtml](http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/MBatailleGoldenRatio.shtml).
9. *Niemeyer Jo.* A Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum, **11** (2011), 53. – [http://www.cut-the-knot.org/do\\_you\\_know/GoldenJo.shtml#Jo](http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/GoldenJo.shtml#Jo).
10. *Hofstetter K.* A Simple Construction of the Golden Section // Forum Geometricorum, **2** (2002), 65–66. – <http://forumgeom.fau.edu/FG2002volume2/FG200208.pdf>.
11. *Hofstetter K.* Another 5-step Division of a Segment in the Golden Section // Forum Geometricorum, **4** (2004), 21–22. – <http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200402.pdf>.
12. *Hofstetter K.* Division of a Segment in the Golden Section with Ruler and Rusty Compass // Forum Geometricorum, **5** (2005), 135–136.
13. *Василенко С.Л.* Треугольники и золотые чевианы // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.06.2012. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=76&sm=2> / Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.17549, 23.06.2012. – <http://www.trinitas.ru/rus/doc/0016/001c/00161974.htm>.
14. *Василенко С.Л.* Золотая пропорция как ядро генома мироздания // Математические и исторические исследования гармонии и красоты в природе и искусстве. – 12.07.2011. – <http://www.artmatlab.ru/articles.php?id=30&sm=2> // Научно-техническая библиотека SciTecLibrary. – 13.07.2011. – <http://www.sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/11214.html>.
15. *Хокинг С., Млодинов Л.* Кратчайшая история времени: Пер. с англ. – СПб: Амфора, 2006.

© ВаСиЛенко, 2013



Украина, Харьков



Авторские страницы:

<http://www.artmatlab.ru/authors.php?id=21&sm=3>

<http://www.sciteclibrary.ru/rus/avtors/v.html>

<http://www.trinitas.ru/rus/doc/avtr/01/0738-00.htm>